

FONCTIONS

EXPONENTIELLES et LOGARITHMES

Appliquer les fonctions exponentielles et logarithmiques.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- l'utilisation du vocabulaire et de la notation des fonctions dans la description de divers phénomènes.
- l'utilisation d'une fonction exponentielle pour construire un modèle d'un phénomène à l'aide de sa description verbale ou d'un critère algébrique.
- l'utilisation d'une fonction logarithmique pour construire un modèle d'un phénomène.
- l'utilisation des logarithmes pour résoudre des équations exponentielles et d'équations logarithmiques.

OBJECTIFS

- 5.1** Construire un modèle exponentiel ou logarithmique à partir de la description verbale d'un phénomène.
- 5.2** Analyser un phénomène dont le lien entre les variables est exponentiel ou logarithmique.
- 5.3** Transformer une expression algébrique à l'aide des propriétés des logarithmes.
- 5.4** Résoudre des équations exponentielles en ayant recours aux propriétés des exposants et des logarithmes.

CHAPITRE

5

Modélisation

exponentielle 146

Mise en situation

Caractéristiques

du modèle exponentiel

Critère algébrique du modèle

Calcul de la valeur initiale

Calcul du taux

Exercices 155

Logarithmes 157

Équation exponentielle

Bases de calcul

Propriétés des logarithmes

Logarithmes, les acteurs,
note historique

Fonction logarithmique

Décibel

Alexander Graham Bell

note historique

Exercices 167

5.1 Modélisation exponentielle

Le présent chapitre vise à mettre en évidence les caractéristiques qui permettent de reconnaître et de confirmer l'existence d'un lien exponentiel entre les variables d'un phénomène et de décrire algébriquement ce lien.

Mise en situation

On place un capital de 10 000 \$ à un taux d'intérêt de 6 % capitalisé annuellement. On veut déterminer la valeur de ce placement à la fin de chacune des trois années suivantes. Soit $C(1)$, le capital accumulé en un an. Ce capital est constitué du placement de 10 000 \$ auquel s'ajoute 6 % de cette somme :

$$\begin{aligned} C(1) &= 10\,000 + (6\% \times 10\,000) = 10\,000 + (0,06 \times 10\,000) \\ &= 10\,000 + 600 = 10\,600 \text{ $.} \end{aligned}$$

À la fin de la deuxième année, le capital $C(2)$ est constitué du capital de 10 600 \$ accumulé à la fin de la première année, auquel s'ajoute 6 % de ce montant :

$$\begin{aligned} C(2) &= 10\,600 + (6\% \times 10\,600) = 10\,600 + (0,06 \times 10\,600) \\ &= 10\,600 + 636 = 11\,236 \text{ $.} \end{aligned}$$

À la fin de la troisième année, le capital $C(3)$ est constitué du capital de 11 236 \$ accumulé à la fin de la deuxième année auquel s'ajoute 6 % de ce montant :

$$\begin{aligned} C(3) &= 11\,236 + (6\% \times 11\,236) = 11\,236 + (0,06 \times 11\,236) \\ &= 11\,236 + 674,16 = 11\,910,16 \text{ $.} \end{aligned}$$

Pour généraliser ce résultat, on représente d'abord le capital initial par C_0 . En ajoutant 6 % à ce capital, on obtient $1,06C_0$. On constate que la valeur du capital à la fin de chaque année subséquente s'obtient en multipliant par 1,06 la valeur en début d'année :

$$\begin{aligned} C(1) &= 1,06 C_0, \\ C(2) &= 1,06 C(1), \\ C(3) &= 1,06 C(2), \\ &\quad \dots \\ C(n+1) &= 1,06 C(n) = (1 + 0,06) C(n). \end{aligned}$$

On peut décrire le capital à la fin de chaque année en fonction du capital initial.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| Le capital après un an est | $C(1) = C_0 (1,06);$ |
| le capital après deux ans est | $C(2) = C(1) (1,06) = C_0 (1,06)^2;$ |
| le capital après trois ans est | $C(3) = C(2) (1,06) = C_0 (1,06)^3.$ |
| En général, | |

$$C(n) = C_0 (1,06)^n = C_0 (1 + 0,06)^n.$$



Exposants_01



FonctExpo01

Dans le cas d'un capital initial de 10 000 \$, le modèle décrivant le capital accumulé au bout de n années est

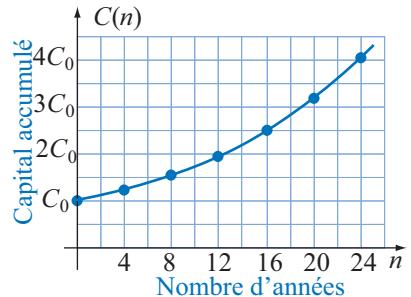
$$C(n) = 10\ 000 (1,06)^n.$$

Ce résultat est très intéressant, car il permet de constater la structure sous-jacente du phénomène, à savoir que la croissance du capital suit un modèle dont la variable indépendante est en exposant. Ce modèle sert à déterminer la valeur du placement à n'importe quel moment. Ainsi, pour connaître la valeur du placement après trois ans, on calcule $C(3)$, en substituant 3 à n dans le modèle :

$$C(3) = 10\ 000 (1,06)^3 = 11\ 910,16 \text{ $.}$$

Pour représenter graphiquement le modèle, il n'est pas nécessaire de calculer les correspondances de façon très précise. Il faut simplement respecter la proportionnalité, de sorte qu'on peut exprimer les valeurs du capital. On obtient ainsi le graphique donné ci-contre.

Prix de vente $P(n)$		
n	$P_0(1,05)^n$	200 000(1,05) n
0	C_0	200 000,00 \$
2	1,10 C_0	220 500,00 \$
4	1,22 C_0	243 101,25 \$
6	1,34 C_0	268 019,13 \$
8	1,48 C_0	295 491,09 \$
10	1,63 C_0	325 778,93 \$
12	1,80 C_0	359 171,27 \$



EXEMPLE 5.1.1

Les spécifications d'un appareil précisent que, si on coupe l'alimentation du moteur, la roue d'inertie perd 15 % de sa vitesse à chaque minute.

- Décrire la vitesse de la roue en fonction du nombre de minutes écoulées depuis l'arrêt de l'alimentation.
- Représenter la fonction graphiquement.
- Calculer la vitesse de la roue dix minutes après l'arrêt de l'alimentation si la vitesse au moment de l'arrêt est de 250 r/min.

Solution

a) Identification des variables

Les variables sont le nombre n de minutes écoulées depuis la coupure de l'alimentation et la vitesse V de la roue d'inertie. Pour faciliter la description du phénomène, représentons par V_0 la vitesse de la roue au moment où l'alimentation a été coupée et par $V(n)$ la vitesse après n minutes.

Définition du lien entre les variables

La vitesse $V(1)$, une minute après l'arrêt est

$$V(1) = V_0 (0,85);$$

la vitesse $V(2)$, deux minutes après l'arrêt est

$$V(2) = V(1) (0,85) = V_0 (0,85)^2;$$

la vitesse $V(3)$, trois minutes après l'arrêt est

$$V(3) = V(2) (0,85) = V_0 (0,85)^3;$$

En généralisant cette définition par récurrence, on obtient

$$V(n) = V_0 (0,85)^n = V_0 (1 - 0,15)^n.$$

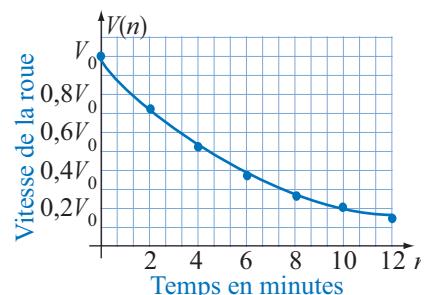
- Pour esquisser le graphique, on calcule quelques correspondances, regroupées dans le tableau donné ci-contre.



REMARQUE

Il est plus facile de tracer graphique si on choisit valeurs numériques des multiples de C_0 ou de V_0 .

Vitesse $V(n)$	
n (min)	$V(n)$ (tours/mi)
0	V_0
2	0,73 V_0
4	0,52 V_0
6	0,38 V_0
8	0,27 V_0
10	0,20 V_0
12	0,14 V_0



Utilisation du modèle

c) Reformulation de la question

Quelle est l'image de $n = 10$ par la fonction ?

Calculs

$$V(10) = 250(0,85)^{10} = 49 \text{ r/min.}$$

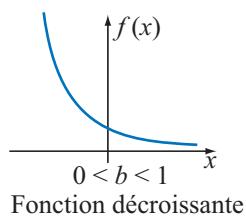
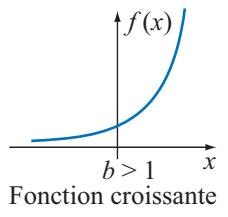
Rédaction de la réponse

La vitesse, dix minutes après la coupure de l'alimentation, est de 49 r/min.

FonctExpo_03

REMARQUE

a et b sont les paramètres de la fonction exponentielle.



REMARQUE

Dans une fonction exponentielle dont la variable est le temps t , le paramètre a est appelé **valeur initiale de la variable dépendante**. C'est l'image au temps $t = 0$.

Dans un problème écrit, un taux de variation sans unité au numérateur (par exemple, 15% par cm ou double tous les jours) justifie un lien exponentielle entre les variables.

Fonction exponentielle

Soit b , un nombre réel tel que $b > 0$ et $b \neq 1$. On appelle **fonction exponentielle** toute fonction définie par une équation de la forme $y = ab^x$ où b est la **base** de la fonction exponentielle.

Une fonction exponentielle est donc une fonction dont la variable indépendante est en exposant. Le domaine d'une fonction exponentielle est l'ensemble des nombres réels et son codomaine est l'intervalle $]0; \infty[$. Deux fonctions exponentielles sont représentées ci-contre.

Une fonction exponentielle est toujours concave vers le haut. De plus, elle est **croissante** lorsque sa base est plus grande que 1 ($b > 1$) et **décroissante** lorsque sa base est plus petite que 1 ($0 < b < 1$). Dans la modélisation de phénomènes, on rencontre souvent des expressions définies à l'aide d'une exponentielle, par exemple une fonction de la forme $f(x) = B - Ab^x$. Il est alors utile de trouver l'asymptote horizontale de la fonction pour en esquisser le graphique. Il suffit de se rappeler que :

- b^{-x} tend vers 0 lorsque x tend vers ∞ ,
- b^x tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$.

Caractéristique du modèle exponentiel

Les modèles établis dans la mise en situation et dans l'exemple 5.1.1 sont de la forme $y = ab^x$. Dans la mise en situation, le capital croît de 6% par année, la base de l'exponentielle est $b = 1 + r = 1 + 0,06 = 1,06$ et $a = 10\ 000\$\text{, soit le capital initial}$. Dans l'exemple 5.1.1, la vitesse décroît de 15% par minute. Dans ce cas, la base de la fonction exponentielle est $b = 1 - r = 1 - 0,15 = 0,85$ et la vitesse initiale est $a = 250 \text{ r/min.}$

Les phénomènes étudiés sont caractérisés par le fait que la variation de la variable dépendante peut s'exprimer en pourcentage (sans unité) de l'unité de la variable indépendante. C'est ainsi que l'on reconnaît une situation descriptible par un modèle exponentiel. Dans les applications, on désigne de préférence les variables par des lettres évocatrices, comme i pour un taux d'intérêt et C pour un capital,

PROCÉDURE**Modélisation d'un phénomène de croissance ou de décroissance**

- Identifier la variable indépendante et la variable dépendante.
- Identifier la valeur initiale et le taux de croissance ou de décroissance.
- Déterminer la base k du modèle exponentiel; $b = 1 + r$ ou $b = 1 - r$, où r est le taux, selon le cas.
- Établir la relation entre les variables.
- Utiliser le modèle pour analyser le phénomène.

EXEMPLE 5.1.2

Les riverains d'un lac ont ensemencé celui-ci avec 2 000 truites, mais on observe un taux de mortalité de 1,8% par jour à cause de la pollution causée par des installations septiques non conformes.

- Construire un modèle mathématique qui décrit le nombre de truites n jours après l'ensemencement.
- Combien reste-t-il de truites 24 jours après l'ensemencement ?
- Esquisser le graphique de la fonction du nombre de truites vivantes sur une période de 72 jours.

Solution**a) Identification des variables**

Les variables sont n , le nombre de jours écoulés depuis l'ensemencement et V , le nombre de truites vivantes.

Définition du lien entre les variables

Le phénomène est caractérisé par une décroissance exprimée en pourcentage par unité de temps, soit 1,8% par jour. On décrit donc le lien entre les variables par un modèle de la forme

$$V(n) = V_0 (1 - r)^n$$

où le nombre initial de truites est $V_0 = 2\ 000$ et $r = 0,018$. Ce modèle est

$$V(n) = 2\ 000(1 - 0,018)^n = 2\ 000 (0,982)^n$$

où n est le temps exprimé en jours.

Utilisation du modèle**b) Reformulation de la question**

Quelle est l'image de $n = 24$ par la fonction V ?

Calculs

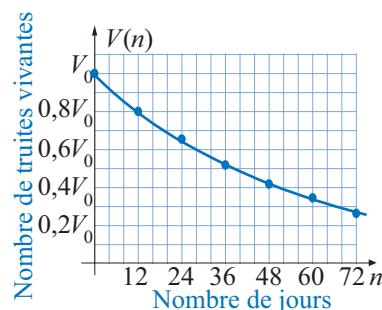
$$V(24) = 2\ 000 (0,982)^{24} = 1\ 293,319$$

Rédaction de la réponse

Après 24 jours, il devrait y avoir environ 1 290 truites vivantes.

- On connaît l'allure générale de la courbe mais, pour esquisser le graphique, il faut calculer quelques correspondances. Les valeurs obtenues et leur représentation sont donnée ci-contre.

Nombre $V(n)$	
n jours	$V(n)$
0	V_0
12	$0,80 V_0$
24	$0,65 V_0$
36	$0,52 V_0$
48	$0,42 V_0$
60	$0,34 V_0$
72	$0,27 V_0$



Critère algébrique du modèle

Les phénomènes étudiés nous permettent également de définir un critère grâce auquel, on peut confirmer l'existence d'un lien exponentiel à l'aide de données expérimentales. Dans la mise en situation, la croissance de capital a donné les relations suivantes

 FonctExpo_04

$$C(1) = 1,06 C(0),$$

$$C(2) = 1,06 C(1),$$

$$C(3) = 1,06 C(2),$$

...

$$C(n + 1) = 1,06 C(n).$$

Dans l'exemple la vitesse de la roue d'inertie, on a obtenu :

$$V(1) = 0,85 V(0),$$

$$V(2) = 0,85 V(1),$$

$$V(3) = 0,85 V(2),$$

...

$$V(n + 1) = 0,85 V(n).$$

Ainsi, on peut décrire la caractéristique des modèles exponentiels par l'expression

$$f(x + 1) = (1 + r)f(x).$$

Si $r > 0$, le modèle décrit un phénomène de croissance et, si $r < 0$, il décrit un phénomène de décroissance. En général, lorsque le pas est p , la relation est exponentielle si

$$f(x + p) = (1 + r)f(x).$$

On peut reformuler cette condition sous une forme plus simple à utiliser en divisant chaque membres de l'équation par $f(x)$ et on obtient alors :

$$\frac{f(x+p)}{f(x)} = 1 + r.$$

CRITÈRE ALGÉBRIQUE

Reconnaissance d'un lien exponentiel

L'existence d'un lien exponentiel entre des données à pas constant est confirmée si le rapport des images consécutives est constant :

$$\frac{f(x+p)}{f(x)} = b^p.$$

REMARQUE

Le critère algébrique est un moyen rapide de vérifier l'existence de certains types de relations. Nous verrons au chapitre 5 qu'il ne constitue cependant pas le meilleur moyen de définir la relation.

Ce critère permet de vérifier rapidement si des données à pas constant peuvent être décrites par un modèle exponentiel. La marche à suivre est la suivante.

PROCÉDURE**Description de données à pas constant par un modèle exponentiel**

1. Identifier les variables du problème et les représenter par des symboles appropriés, accompagnés des unités de mesure des variables.
2. Définir en compréhension la relation entre les variables en justifiant le choix du modèle.
 - 2.1. S'assurer que les données sont à pas constant (c'est-à-dire que les valeurs de la variable indépendante sont à intervalles réguliers).
 - 2.2. Calculer le rapport $\frac{f(x+p)}{f(x)}$ des valeurs consécutives de la variable dépendante et vérifier qu'il est relativement constant, ce qui confirme l'existence d'un lien exponentiel.
 - 2.3. Calculer la base $b = 1 \pm r$ du modèle en prenant la valeur moyenne des rapports.
 - 2.4. Écrire le modèle sous la forme $f(x) = a(1 \pm r)^x$ où a est l'image de 0 (ou la valeur initiale).
3. Utiliser le modèle pour résoudre le problème.
 - 3.1. Reformuler la question (ou les questions) en utilisant les variables du problème.
 - 3.2. Effectuer les calculs et les manipulations algébriques permettant de répondre à la question.
 - 3.3. Rédiger la réponse à la question posée.

REMARQUE

Lorsqu'on utilise le critère algébrique, il faut bien remarquer qu'il faut faire le rapport entre une image et l'image précédente et non l'inverse.

EXEMPLE 5.1.3

On a soumis un matériau à des tests pour déterminer sa capacité d'absorption des rayons X. Pour ce faire, on a bombardé des plaques de différentes épaisseurs avec un faisceau de rayons X dont l'intensité est de 2,400 unités et on a mesuré l'intensité du faisceau de l'autre côté des plaques. Les mesures sont rassemblées dans le tableau donné ci-contre. L'industrie qui produit les plaques utilisées indique que la précision des épaisseurs est de l'ordre de 1×10^{-3} cm.

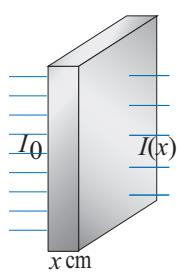
- a) Construire un modèle mathématique qui décrit le phénomène.
- b) À l'aide du modèle, calculer l'intensité du faisceau qui traverse une plaque de 2,6 cm du même matériau.

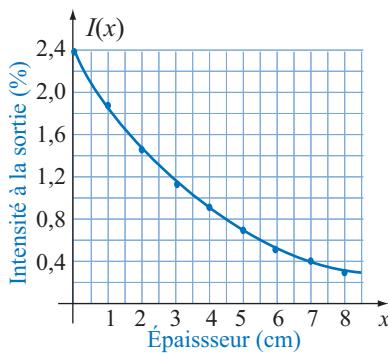
Solution**a) Identification des variables**

La variable indépendante du problème est l'épaisseur x de la plaque et la variable dépendante est l'intensité I du faisceau de rayons X ayant traversé la plaque.



Intensité $I(x)$	
x	$I(x)$
0	2,400
1	1,872
2	1,460
3	1,140
4	0,888
5	0,693
6	0,540
7	0,422
8	0,329





Rapport des images

x	$I(x)$	$\frac{I(x+p)}{I(x)}$
0	2,400	—
1	1,872	0,7800
2	1,460	0,7799
3	1,140	0,7808
4	0,888	0,7789
5	0,693	0,7804
6	0,540	0,7792
7	0,422	0,7815
8	0,329	0,7796

Définition de la relation entre les variables

La représentation graphique des données est une courbe décroissante et concave vers le haut. De plus, la correspondance est définie lorsque la variable indépendante est nulle et la valeur correspondante est non nulle. On peut donc poser l'hypothèse d'un lien exponentiel entre les variables.

Puisque les valeurs de la variable indépendante sont à intervalles constants, on peut confirmer l'existence d'un lien exponentiel en calculant le rapport des valeurs consécutives de la variable dépendante. Les résultats sont regroupés dans le tableau donné ci-contre.

On constate que les rapports sont relativement constants et que la moyenne est 0,7801. En utilisant cette valeur comme base de l'exponentielle et la valeur initiale 2,400, on obtient le modèle

$$I(x) = 2,400 \times (0,7801)^x.$$

Utilisation du modèle

b) Reformulation de la question

On doit déterminer l'image de 2,6 par le modèle.

Calculs

$$I(2,6) = 2,400 \times 0,7801^{2,6} = 1,2583\dots$$

Rédaction de la réponse

En tenant compte de la précision des données, on considère que l'intensité du faisceau ayant traversé une plaque de 2,6 cm d'épaisseur est de 1,258 unités.

EXEMPLE 5.1.4



FonctExpo_06

Population	
Année	Milliers d'habitants
1960	15,0
1965	16,0
1970	17,5
1975	18,8
1980	20,3

Rapport des images		
n	P	$\frac{P(n+p)}{P(n)}$
0	15,0	—
1	16,0	1,0667
2	17,5	1,0938
3	18,8	1,0743
4	20,3	1,0798

Sachant qu'une population croît de façon exponentielle, construire un modèle décrivant la population d'une petite ville à l'aide des valeurs regroupées dans le tableau donné ci-contre.

- Décrire algébriquement la correspondance entre les variables.
- À l'aide du modèle, estimer la population en l'an 2030.

Solution

a) Identification des variables

La population ayant été dénombrée aux cinq ans, on prend comme variable indépendante le nombre n de périodes de cinq années écoulées depuis 1960. La variable dépendante est la population P en milliers d'habitants.

Définition de la relation entre les variables

L'énoncé du problème indique que le modèle est exponentiel. Pour déterminer la base du lien exponentiel, on calcule le rapport des valeurs consécutives. Les résultats sont rassemblés dans le tableau donné ci-contre. La moyenne des rapports est 1,0786. Si on utilise cette valeur comme base du modèle exponentiel, la description algébrique est :

$$P(n) = P_0 (1,0786)^n = 15,0 \times (1,0786)^n.$$

b) Utilisation du modèle

Reformulation de la question et calculs

En l'an 2030, il se sera écoulé 14 périodes de cinq ans depuis 1960.

On cherche donc la valeur de P pour $n = 14$

$$P(8) = 15,0 \times (1,0786)^{14} = 43,265\dots$$

Rédaction de la réponse

On estime donc la population en 2030 à environ 43 000 habitants.

On peut exprimer le modèle exponentiel de manière que la variable indépendante soit le nombre d'années. Pour ce faire, on détermine une base a telle que $a^5 = 1,0786$.

En résolvant cette équation, on obtient

$$a = (1,0786)^{1/5} = 1,01524\dots$$

Le modèle est donc

$$P(t) = 15,0 \times (1 + 0,0786)^{t/5} = 15,0 \times (1,01524)^t$$

où t est le temps en années.

Calcul de la valeur initiale

EXEMPLE 5.1.5

Un agent prétend que, grâce à la flambée des prix dans l'immobilier, on peut tripler un capital tous les cinq ans. Si cette affirmation est exacte, combien faut-il investir pour accumuler 1 200 000 \$ en vingt ans ?

Solution

a) Identification des variables

La variable indépendante est t , la durée du placement, et la variable dépendante est C , le capital accumulé.

Définition du lien entre les variables

Le phénomène est caractérisé par une croissance exprimée sous la forme d'un taux dont le numérateur n'a pas d'unités. Comme le montant investi triple tous les cinq ans, on peut décrire le lien entre les variables par un modèle de la forme

$$C(t) = C_0 b^t.$$

On sait que $b = 3^{1/5}$, donc,

$$C(t) = C_0 (3^{1/5})^t.$$

On peut également écrire cette relation sous la forme :

$$C(t) = C_0 3^{t/5}.$$

où t est le temps exprimé en années.

Utilisation du modèle

b) Reformulation de la question

Calculer la valeur C_0 pour laquelle $C = C_0 3^{t/5} = 1,2 \times 10^6$ si $t = 20$.

Calculs

En posant $t = 20$, on a $C_0 3^{20/5} = 1,2 \times 10^6$ donc $C_0 3^4 = 1,2 \times 10^6$.

En isolant C_0 dans cette équation, on obtient

$$C_0 = \frac{1,2 \times 10^6}{3^4} = 14814,81\dots$$

Rédaction de la réponse

Il faut investir environ 15 000 \$ pour accumuler 1 200 000 \$ en 20 ans.

Calcul du taux

EXEMPLE 5.1.6

À quel taux faut-il placer un montant de 4 500 \$ pour accumuler 9 000 \$ en 8 ans si les intérêts sont capitalisés annuellement ?

■ Solution

Identification des variables

La variable indépendante est i , le taux d'intérêt, et la variable dépendante est C , le capital accumulé.

Définition du lien entre les variables

Le phénomène est caractérisé par une croissance exprimée sous la forme d'un pourcentage par unité de temps. On peut donc décrire le lien entre les variables par un modèle de la forme

$$C = C_0(1 + i)^8.$$

Puisque $C_0 = 4 500$, alors $C = 4 500(1 + i)^8$.

Utilisation du modèle

Reformulation de la question

On cherche le taux i pour lequel $C = 9 000$. On cherche i tel que :

$$4 500(1 + i)^8 = 9 000.$$

Calculs

En divisant chaque membre de la dernière équation par 4 500, on obtient

$$(1 + i)^8 = 2$$

et, en extrayant la racine huitième, on a $1 + i = \pm 1,0905$.

Puisque i est un taux d'intérêt, la valeur négative est à rejeter et on retient :

$$1 + i = 1,0905; \text{ donc } i = 0,0905.$$

Rédaction de la réponse

Pour doubler le capital en 8 ans, il faut le placer à un taux de 9,05 %, les intérêts étant capitalisés annuellement.

5.2 Exercices

- Construire le modèle exponentiel donnant la valeur d'un capital de 7 500 \$ placé à 6,5 % les intérêts capitalisés annuellement.
 - Quelle est la valeur du capital après 5 ans?
 - Esquisser le graphique du modèle ($0 \leq n \leq 10$).
- On a mis au point un nouveau matériau pour l'insonorisation des murs dans les édifices. On peut installer des panneaux de ce matériau avant la pose du placoplâtre ou souffler des granules dans les murs d'édifices déjà existants. Selon la publicité, l'intensité des bruits est réduite de 40% pour chaque centimètre d'épaisseur des panneaux et de 20 % par centimètre si on emploie des granules.
 - Construire un modèle mathématique décrivant la relation entre l'intensité sonore d'un côté et de l'autre d'un panneau.
 - Calculer la réduction de l'intensité des bruits absorbée dans le cas d'un panneau de 3,5 cm d'épaisseur.
 - Si on souffle des granules dans un mur dont les montants sont des 2 sur 4, quelle est l'absorption ajoutée par cette opération ?
- Une compagnie renouvelle sa machinerie au coût de 300 000 \$. Ce type de machines se déprécie au taux de 1,7 % par mois.
 - Trouver la règle de correspondance donnant la valeur de la machinerie en fonction du temps.
 - Calculer la valeur de la machinerie deux ans après l'achat, trois ans après l'achat, cinq ans après l'achat.
 - Représenter graphiquement le modèle.
- Un sel radioactif se désintègre de telle sorte qu'à la fin de chaque année il reste les $49/50$ de la quantité présente en début d'année.
 - Construire un modèle mathématique donnant la quantité restante de sel après t années si la quantité initiale est Q_0 .
 - Représenter graphiquement le modèle.
 - Sachant que la quantité initiale est $Q_0 = 100$ unités, calculer la quantité restante après cinq ans, après dix ans.
- Le radium A se désintègre à une vitesse telle qu'à la fin de chaque minute il ne reste que les $8/10$ de la quantité initiale.

- Établir un modèle décrivant la quantité de radium en fonction du temps t , mesuré en minutes.

- Esquisser le graphique de la fonction.

Température

Durée (h)	T (°C)
1	19
2	16
3	14
4	12
5	10
6	9

- Au cours d'une panne d'électricité à la mi-janvier, vous avez noté la température à l'intérieur de la maison à chaque heure à partir du début de la panne et vous avez obtenu les valeurs du tableau donné ci-contre.

- Sachant que la température intérieure est normalement maintenue à 22 °C, construire un modèle mathématique décrivant la correspondance entre les variables en cause.
- Représenter graphiquement la fonction.
- Quel est le pourcentage de perte par unité de la variable indépendante?
- Quelle devrait être la température après dix heures de panne?

- On mesure la vitesse de rotation (v en t/min) d'une roue d'inertie

à différents moments, en minutes, après avoir coupé le courant. On obtient les valeurs regroupées dans le tableau donné ci-contre.

- De quel type est la correspondance entre les variables ?
- Déterminer la règle de correspondance entre les variables.

Vitesse

Temps (min)	Vitesse (t/min)
0,5	74
1,0	42
1,5	23
2,0	13
2,5	7
3,0	4

- Le maire de la municipalité qui vous emploie vous demande de faire une étude sur la croissance de la population de façon

à prévoir les services qu'il faudra offrir pour assurer le développement harmonieux de la municipalité. Vous trouvez dans les registres municipaux les résultats de quatre recensements effectués à des intervalles de quatre ans.

- Établir un modèle décrivant la population n périodes de quatre ans après 1972.
- Exprimer le modèle en fonction du temps t , en années depuis 1972.

- c) Par mesure de précaution, vérifier la concordance des résultats statistiques et des valeurs fournies par le modèle.
- d) Quelle est la population en l'an 2000?

9. Une compagnie veut fabriquer des abat-jours dans un matériau qui absorbe 15 % de la luminosité pour chaque millimètre d'épaisseur.



- a) Construire un modèle mathématique qui décrit la relation entre l'intensité lumineuse à l'extérieur de l'abat-jour et l'épaisseur de celui-ci.
- b) Calculer la capacité d'absorption d'un abat-jour ayant une épaisseur de : 3 mm, 5 mm, 7 mm.

10. La pression barométrique (p en kilopascals) dépend de l'altitude (h en kilomètres) au-dessus du niveau de la mer, comme l'indiquent les données ci-contre.

Pression	
Altitude (km)	Pression (kPa)
0,0	101,32
0,5	95,15
1,0	89,36
1,5	83,93
2,0	78,82
2,5	74,02
3,0	69,52
3,5	65,29
4,0	61,32

- a) Quel type de correspondance relie les variables ?
- b) Déterminer la règle de correspondance entre les variables.

11. Une automobile se déprécie à un taux de 15 % par année.

- a) Construire un modèle mathématique décrivant la valeur de l'automobile en fonction du temps n .

- b) Esquisser le graphique de la fonction.

- c) Si la valeur à neuf est de 10 000 \$, combien vaudra l'auto 8 ans plus tard ? 10 ans plus tard ?

12. À quel taux faut-il placer un montant de 5 000 \$ pour accumuler un montant de 12 000 \$ en 15 ans, si les intérêts sont capitalisés annuellement ?

13. Les mesures données ci-contre ont été prises durant une expérience de laboratoire. On sait que le lien entre les variables du phénomène est exponentiel, mais on croit qu'il s'est glissé une erreur dans les mesures. Déterminer la valeur erronée et estimer la valeur correcte.

Données	
x	y
0,0	5,0
2,0	7,5
4,0	11,1
6,0	19,3
8,0	25,0
10,0	37,0
12,0	55,0

Construire ensuite un modèle mathématique qui décrit le phénomène.

14. Une entreprise de construction achète une rétrocaveuse ayant deux ans d'usage au coût de 140 000 \$. La dépréciation sur une telle machine est de 16 % par année.
- a) Construire un modèle mathématique décrivant la valeur de cet équipement depuis l'achat.
- b) Utiliser le modèle pour calculer la valeur de revente de la rétrocaveuse cinq ans après l'achat.

15. Vous avez obtenu les mesures données ci-contre durant une expérience de laboratoire.

Données	
x	y
0,00	35,00
0,25	35,18
0,50	35,34
0,75	35,53
1,00	35,70
1,25	35,88
1,50	36,05
1,75	36,23
2,00	36,40

- a) Vous supposez que le lien entre les variables est exponentiel. Appliquer le critère algébrique pour vérifier votre hypothèse. Quelle est votre conclusion ?
- b) Construire le modèle exponentiel.
- c) Selon les consignes de l'activité de laboratoire, vous devez utiliser votre modèle pour prévoir la valeur de y si la variable indépendante est égale à 40. Effectuer ce calcul.
- d) Un de vos collègues prétend que le modèle n'est pas exponentiel mais affine. Pour lui prouver qu'il a tort, vous appliquez le critère algébrique servant à confirmer l'existence d'un lien affine aux données du tableau. Quelle est votre conclusion ?
- e) Écrire le modèle affine que vous suggérez ce nouveau tableau.
- f) Construire un modèle affine pour déterminer la valeur correspondante de $x = 40$.
- g) Dans le cas étudié, les deux modèles semblent décrire correctement les données de l'expérience, mais les résultats obtenus par extrapolation sont très différents. Que devez-vous faire pour vous assurer que le modèle retenu permet les meilleures prévisions possibles ?
- h) Peut-on toujours simplifier le travail en prenant un modèle affine au lieu d'un modèle exponentiel ? Justifiez votre réponse.

5.3 Logarithmes

Les logarithmes constituent un outil indispensable pour la résolution des équations exponentielles, où l'inconnue est en exposant. Dans la présente section, nous abordons la notion de logarithme et nous l'appliquons à la résolution d'équations exponentielles.

Équation exponentielle

Dans la mise en situation en début de chapitre, nous avons vu que si on place un capital de 10 000 \$ à un taux d'intérêt de 6 %, les intérêts étant capitalisés annuellement, le capital accumulé au cours des années peut être décrit par le modèle exponentiel

$$C(n) = 10\,000 (1,06)^n.$$

Si on désire savoir combien de temps on doit placer le capital pour doubler sa valeur, on cherche n tel que

$$10\,000 (1,06)^n = 20\,000.$$

En divisant chaque membre de l'équation par 10 000, on obtient

$$(1,06)^n = 2.$$

Une équation de cette forme est une **équation exponentielle** et, pour la résoudre, il faut déterminer la valeur de l'exposant n . Les procédures de résolution fondées sur les propriétés de l'égalité et utilisées jusqu'à maintenant ne sont d'aucune utilité. Il faut élaborer un outil adapté à la résolution de ce type d'équations, soit les **logarithmes**.

Équation exponentielle

Une **équation exponentielle** est une équation comportant une seule inconnue qui se trouve en exposant. La forme la plus simple d'une telle équation est la forme :

$$b^x = N,$$

où $b > 0$ et $b \neq 1$. Dans cette équation, x est une **inconnue**, N et b sont des nombres réels positifs et b est la **base de l'exponentielle**.

Pour résoudre une équation exponentielle de la forme $b^x = N$, il faut déterminer à quel exposant on doit éléver la base b pour obtenir le nombre N . Ainsi, l'équation

$$2^x = 32$$

est une équation exponentielle et, pour la résoudre on doit déterminer à quel exposant il faut éléver 2 pour obtenir 32. Dans ce cas, on peut exprimer le membre de droite de l'équation en base 2,

$$2^x = 2^5$$



Logarithme_01

REMARQUE

Le problème consiste à déterminer le temps nécessaire pour doubler le capital. Sa valeur est indépendante du capital initial : elle dépend seulement du taux d'intérêt.

Dans le cas de phénomènes descriptibles par un modèle exponentiel croissant, le temps nécessaire pour doubler une grandeur est une donnée physique intéressante. Le temps de dédoublement d'une population de bactéries en est un exemple.

Dans le cas de phénomènes descriptibles par un modèle exponentiel décroissant, le temps nécessaire pour réduire de moitié la quantité initiale est également une donnée intéressante. Le cas de demi-réaction d'une réaction chimique et la demi-vie d'un élément radioactif en sont des exemples.

Dans le cas d'une loterie dont le retour au consommateur est de 89% (une perte de 11% à chaque fois), on peut également calculer le nombre de fois qu'un consommateur doit jouer pour dilapider la moitié de sa fortune. Même s'il lui arrive de gagner, ses pertes seront à long terme supérieures à ses gains.

REMARQUE

Pour résoudre une équation dont l'inconnue est en exposant, il faut la ramener sous sa forme la plus simple.

REMARQUE

Le logarithme est un exposant. C'est l'exposant qu'il faut donner à la base b pour obtenir le nombre N . Cette formulation est très importante pour la compréhension des logarithmes et de leurs propriétés.

Les deux membres de l'équation étant exprimés dans une même base, les exposants sont nécessairement égaux : on en conclut que $x = 5$.

La résolution d'une équation exponentielle n'est pas toujours aussi simple. Cependant, il faut toujours pouvoir exprimer un nombre donné dans une base donnée, élevée à un exposant qui est un nombre réel. Cet exposant est appelé **logarithme**.

Logarithme en base b d'un nombre N

Soit b et N , deux nombres réels positifs et $b \neq 1$. Il existe un et un seul nombre réel n tel que $b^n = N$. L'exposant n est appelé **logarithme de base b du nombre N** , ce qui s'écrit

$$n = \log_b N.$$

EXEMPLE 5.3.1

Déterminer le logarithme de base 3 de 81.

Solution

On cherche $\log_3 81$, c'est-à-dire l'exposant auquel il faut éléver le nombre 3 pour obtenir 81. On doit donc résoudre l'équation exponentielle

$$3^x = 81.$$

En exprimant 81 en base 3, on obtient

$$3^x = 3^4.$$

Ainsi $x = 4$ et le logarithme de base 3 de 81 est 4,

$$\log_3 81 = 4.$$

Bases de calcul**Logarithme_02**

Pour pouvoir effectuer des calculs logarithmiques, on doit connaître les logarithmes d'une base donnée. La calculatrice se révèle alors un outil précieux. Même si, théoriquement, tout nombre positif et différent de 1 peut servir de base d'un système de logarithmes, en pratique on utilise seulement deux bases pour effectuer des calculs logarithmiques : la base 10 et la base $e = 2,718 28\dots$ Les calculatrices scientifiques effectuent directement les calculs dans ces bases. Pour simplifier l'écriture, on note $\log N$ le logarithme en base 10 d'un nombre N , et $\ln N$ le logarithme en base e d'un nombre N . Ainsi, $\log 3$ désigne le logarithme de base 10 du nombre 3, c'est-à-dire l'exposant auquel il faut éléver 10 pour obtenir 3, et $\ln 3$ est le logarithme de base e du nombre 3.

EXEMPLE 5.3.2

Exprimer le nombre 2,8 en base 10.

Solution

Si on veut exprimer 2,8 en base 10, on doit déterminer l'exposant auquel il faut éléver 10 pour obtenir 2,8. On cherche un nombre réel x tel que

$$10^x = 2,8.$$

La définition de logarithme permet d'écrire cette équation sous forme logarithmique. L'exposant à déterminer étant le logarithme en base 10 de 2,8, on cherche x tel que

$$x = \log 2,8.$$

On résout cette équation à l'aide d'une calculatrice

$$x = \log 2,8 = 0,447158\dots$$

On peut maintenant exprimer 2,8 en base 10

$$2,8 = 10^{0,447158\dots}.$$

EXEMPLE 5.3.3

Exprimer le nombre 7,3 en base e .

■ **Solution**

Pour exprimer 7,3 en base e , on cherche l'exposant auquel il faut éléver e pour obtenir 7,3, c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle $e^x = 7,3$,
 $e^x = 7,3 \Leftrightarrow x = \ln 7,3$ sous forme logarithmique de base e .

$$\Leftrightarrow x = 1,98787\dots \text{ Valeur obtenue en utilisant une calculatrice.}$$

$$\Leftrightarrow e^{1,98787\dots} = 7,3 \text{ sous forme exponentielle de base } e.$$

En exprimant 7,3 en base e , on obtient $e^{1,98787\dots} = 7,3$.



Logarithme_03

EXEMPLE 5.3.4

Soit N , un nombre réel tel que $\log_b N = 3$, calculer $\log_b N^2$.

■ **Solution**

Par hypothèse, $\log_b N = 3$. On a

$$\log_b N = 3 \Leftrightarrow N = b^3 \quad \text{sous forme exponentielle}$$

$$\Leftrightarrow N^2 = (b^3)^2 \quad \text{en éllevant chaque membre au carré.}$$

$$\Leftrightarrow N^2 = b^6 \quad \text{par les règles d'utilisation des exposants.}$$

$$\Leftrightarrow \log_b N^2 = 6. \text{ sous forme logarithmique.}$$

On obtient $\log_b N^2 = 6$.

Propriétés des logarithmes

On peut généraliser le résultat de l'exemple précédent de la façon suivante. Considérons un nombre N dont le logarithme en base b est n . On a alors :

$$\log_b N = n \Leftrightarrow N = b^n \quad \text{On exprime l'équation sous forme exponentielle.}$$

$$\Leftrightarrow N^p = (b^n)^p = b^{np} \quad \text{On élève chaque membre à l'exposant } p.$$

$$\Leftrightarrow N^p = b^{pn} \quad \text{On applique la commutativité de la multiplication.}$$

$$\Leftrightarrow \log_b N^p = pn, \quad \text{On exprime l'équation sous forme logarithmique.}$$

On obtient donc la propriété suivante $\log_b N^p = p \log_b N$, que nous considérons comme un théorème.

THÉORÈME

Logarithme d'une expression algébrique affectée d'un exposant

Si N est un nombre réel (ou une expression algébrique) tel que $\log_b N = n$, alors $\log_b N^p = pn$, c'est-à-dire

$$\log_b N^p = pn \log_b N.$$

Lorsque l'inconnue d'une équation est en exposant, on obtient une seconde équation en prenant le logarithme de chaque membres de l'équation initiale. Les propriétés des logarithmes et de l'égalité permettent de transformer la nouvelle équation de manière à isoler la variable.



Logarithme_04

REMARQUE

On parvient au même résultat en utilisant la base e . En prenant le logarithme de base e de chaque membre de l'équation exponentielle, on obtient

$$\ln 3^x = \ln 24, \text{ d'où } x \ln 3 = \ln 24.$$

En divisant chaque membre de la dernière équation par $\ln 3$, on obtient :

$$x = \frac{\ln 24}{\ln 3} = \frac{3,178\ 0...}{1,098\ 6...} = 2,892\ 7...$$

EXEMPLE 5.3.5

Résoudre l'équation exponentielle

$$3^x = 24.$$

Solution

Pour résoudre l'équation, il faut choisir une base de calcul. En utilisant la base 10, on a

$$\begin{aligned} 3^x = 24 &\Leftrightarrow \log 3^x = \log 24 \\ &\Leftrightarrow x \log 3 = \log 24 \text{ Puisque } \log_b N^p = p \log_b N. \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\log 24}{\log 3} \text{ On divise chaque membre par } \log 3. \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\log 24}{\log 3} = \frac{1,380\ 2...}{0,477\ 1...} = 2,892\ 7... \end{aligned}$$

En généralisant la démarche de résolution employée dans le dernier exemple, on démontre la **propriété de changement de base** afin de l'utiliser directement dans nos calculs.

Soit n tel que $a^n = N$. Par définition du logarithme,

$$a^n = N \Leftrightarrow n = \log_a N.$$

De plus,

$$\begin{aligned} a^n = N &\Leftrightarrow \log_b a^n = \log_b N \text{ On prend le logarithme en base } b. \\ &\Leftrightarrow n \log_b a = \log_b N \text{ En vertu de la propriété } \log_b N^p = p \log_b N. \\ &\Leftrightarrow n = \frac{\log_b N}{\log_b a} \text{ On isole } n \text{ dans l'équation.} \\ &\Leftrightarrow \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \text{ Puisque } n = \log_a N. \end{aligned}$$

Cette généralisation démontre le théorème suivant.

THÉORÈME**Changement de base**

Soit a et b , deux nombres réels positifs et différents de 1, et N , un nombre réel positif (ou une expression algébrique), alors

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$



Logarithme_04

REMARQUE

Le changement de base permet d'écrire l'expression logarithmique dans l'une ou l'autre des bases usuelles lorsqu'on doit calculer la valeur de la variable indépendante.

EXEMPLE 5.3.6

On place un montant de 5 000 \$ à un taux d'intérêt de 9 %, les intérêts étant capitalisés annuellement. Déterminer le temps requis pour doubler le capital.

Solution

Le modèle est $C(n) = 5 000 (1,09)^n$. Le temps nécessaire pour doubler le capital est le temps n pour lequel

$$5 000 (1,09)^n = 10 000.$$

En divisant chaque membre de l'équation par 5 000,

$$(1,09)^n = 2, \text{ donc } n = \log_{1,09} 2 = \frac{\log 2}{\log 1,09} = 8,04.$$

À ce taux, le capital aura doublé dans huit ans.

PROPRIÉTÉS**Exposants et logarithmes**

Pour tout m, n et $p \in \mathbb{N}$ et pour tout b et $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M = b^m \text{ et } N = b^n, \text{ alors}$$

Propriétés des exposants

$$MN = b^m b^n = b^{m+n}$$

$$\frac{M}{N} = \frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$$

$$N^p = (b^n)^p = b^{np} = b^{pn}$$

$$b^0 = 1$$

$$b^1 = b$$

Équivalent logarithmique

$$\log_b MN = m + n = \log_b M + \log_b N$$

$$\log_b \frac{M}{N} = m - n = \log_b M - \log_b N$$

$$\log_b N^p = pn = p \log_b N$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$



Logarithme_05

REMARQUE

L'équation exponentielle $N = b^x$ est équivalente à l'équation logarithmique

$$x = \log_b N,$$

Autrement dit,

$$N = b^x \text{ si et seulement si } x = \log_b N.$$

Cette équivalence sert à exprimer une équation exponentielle sous forme logarithmique, et inversement.

Équation logarithmique

Une **équation logarithmique** est une équation qui comporte le logarithme d'une inconnue. Pour résoudre une telle équation, on se sert de l'équivalence

$$\log_b N = n \text{ si et seulement si } b^n = N.$$



Logarithme_06

Un peu d'*histoire*

LOGARITHMES, LES ACTEURS

Les premières tables de logarithmes ont été éditées par le mathématicien et lord écossais, John Napier, baron de Merchiston. Celui-ci cherchait des moyens pour simplifier les calculs fastidieux qui constituaient un frein important aux progrès de la science, et plus particulièrement en astronomie.



John Napier
1550-1617

Outre le développement des logarithmes, il mit au point des réglettes permettant d'effectuer des multiplications, des divisions et des extractions de racines assez rapidement. Les réglettes de Napier furent utilisées pendant plus d'un siècle en Écosse (NH Napier01). C'est en 1614 que Napier fit paraître un traité *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Description de la règle admirable des logarithmes*) où il décrit son système de logarithmes. Il y indique que deux idées l'ont amené à l'invention

des logarithmes, la première étant la relation entre une progression arithmétique et une progression géométrique. Cette relation avait été étudiée par Michaël Stifel, qui n'avait cependant pas calculé des correspondances suffisamment denses pour en tirer vraiment parti (NH Stifel). La deuxième idée qui inspira la notion de logarithme à Napier est celle des points mouvants (NH Napier02).

Un deuxième traité de Napier, intitulé *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, fut édité à titre posthume en 1619. Napier était contemporain de Galilée (1564-1642) (NH Galilée01) et de Johannes Kepler (1571-1630), dont les travaux ont porté en grande partie sur le système planétaire. Kepler construisit et édita lui-même des tables de logarithmes grâce auxquelles il établit les trois lois qui portent son nom. Cette découverte débute par l'étude de l'orbite de la planète Mars et nécessita 17 ans de travail et de calculs (NH Kepler01).

C'est cependant à Henry Briggs (1561-1630), professeur de géométrie à Oxford et admirateur de John Napier que revient le mérite d'avoir fait accepter les logarithmes par la communauté scientifique de l'époque. À la suite de rencontres, les deux savants en vinrent à la conclusion que le logarithme de 1 doit être 0 et que le logarithme de 10 doit être 1, ce qui constituait une étape décisive pour la définition de la notion de base de logarithme et de la création des logarithmes de base 10. Briggs construisit la première table de logarithmes de base 10. En 1617, année de la mort de Napier, il publia *Logarithmorum chilias prima* où il donne les logarithmes de 1 à 1 000 avec une précision de 14 décimales. C'est en 1624, dans *Arithmetica logarithmica*, qu'il présenta pour la première fois les concepts de **mantisso** et de **caractéristique**, qui permettent de simplifier

la construction et l'utilisation des tables de logarithmes (NH Briggs).

Nombre d'Euler

Leonhard Euler a été un autre acteur important dans le développement des logarithmes. On lui doit le nombre d'Euler, noté e , et défini par

$$e = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Sous cette forme, il a des applications en gestion.

Dans le calcul des intérêts, la relation

$$1 + r = (1 + j/m)^m$$

donne le taux réel r correspondant à un taux nominal j si les intérêts se capitalisent m fois par année. Plus la période de capitalisation est courte, plus m est grand. À la limite, lorsque m tend vers l'infini, l'intérêt est dit continu. On a alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m = e^j.$$

Donc, si la capitalisation se fait de façon continue, on a :

$$1 + r = e^j \text{ et } j = \ln(1 + r)$$

et le taux d'intérêt continu j équivaut au taux réel r est $j = \ln(1 + r)$. En pratique, un intérêt quotidien est considéré comme un intérêt capitalisé de façon continue.

Dans ses publications, Euler a employé différentes notations qui sont aujourd'hui d'usage courant :

- $f(x)$ pour désigner l'image d'un nombre x par une fonction f ;
- i pour désigner la racine carrée de -1 dans l'étude des nombres complexes;
- e pour désigner la base du logarithme naturel;
- π pour désigner le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre;
- Σ pour représenter de façon succincte une somme de termes.



Leonhard Euler

1707-1783

Considéré comme le mathématicien le plus prolifique de tous les temps, Leonhard Euler domina les mathématiques du XVIII^e siècle et contribua très largement à l'élaboration du calcul différentiel et intégral.

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

<http://www.lozedion.com/complements-dinfo/>

EXEMPLE 5.3.7

Trouver un nombre x tel que $\log_2(x - 2) + \log_2(x + 6) = 7$.

Solution

En vertu de la propriété $\log_b M + \log_b N = \log_b MN$, on peut écrire

$$\log_2[(x - 2)(x + 6)] = 7$$

et selon l'équivalence $\log_b N = n$ si et seulement si $b^n = N$, on a

$$(x - 2)(x + 6) = 2^7$$

$$x^2 + 4x - 12 = 128$$

$$x^2 + 4x - 140 = 0.$$

En décomposant le trinôme en facteurs, on obtient

$$(x + 14)(x - 10) = 0.$$

En vertu de l'intégrité des nombres réels, ce produit s'annule si $x = -14$ ou $x = 10$. En substituant -14 à x dans l'équation initiale, on a

$$\log_2(-16) + \log_2(-8) = 7.$$

Or, le logarithme d'un nombre négatif n'est pas défini de sorte que -14 n'est pas une solution. En substituant 10 à x dans l'équation initiale, on obtient

$$\log_2(8) + \log_2(16) = 7.$$

Or, $\log_2(8) = 3$ et $\log_2(16) = 4$. Ainsi, l'égalité est vérifiée et 10 est la solution recherchée.

REMARQUE

Pour utiliser l'équivalence qui permet d'écrire une équation logarithmique sous forme exponentielle, il faut que l'équation ne comporte qu'une seule expression logarithmique. L'équivalence ne s'applique donc pas à une somme ou une différence d'expressions logarithmiques. Il faut parfois employer les propriétés des logarithmes pour regrouper les termes, ce qui peut avoir pour effet d'introduire des solutions étrangères. Il faut donc, après avoir résolu l'équation, vérifier si les valeurs obtenues sont bien des solutions de l'équation de départ.

REMARQUE

L'intégrité des nombres réels signifie que le produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Fonction logarithmique

On obtient la fonction inverse d'une fonction exponentielle de la forme $f(x) = b^x$ en isolant la variable indépendante. Puisque $f(x)$ représente la valeur de la variable dépendante y , on a

$$y = b^x.$$

Par définition, $x = \log_b y$. En interchangeant les symboles des variables, on obtient $y = \log_b x$. Ainsi, la fonction inverse de $f(x) = b^x$ est

$$f(x) = \log_b x.$$

Pour tracer le graphique de la fonction inverse, on applique la propriété de symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

La fonction logarithmique de base 10 est simplement notée

$$f(x) = \log x$$

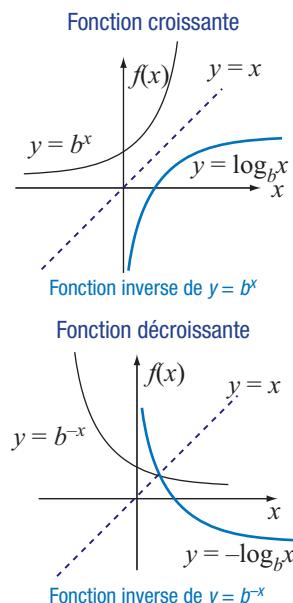
et la fonction logarithmique de base e est notée $f(x) = \ln x$.

Fonction logarithmique

Soit b , un nombre réel tel que $b > 0$ et $b \neq 1$. On appelle **fonction logarithmique de base b** toute fonction définie par une équation de la forme :

$$f(x) = a \log_b x + c,$$

où b est la **base** de la fonction logarithmique, et a et c sont des constantes.



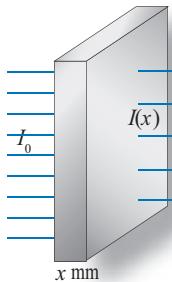
Relations_05



FonctionLog_01



FonctionLog_02



EXEMPLE 5.3.8

Une entreprise fabrique des plaques dans un matériau dont le coefficient d'absorption des rayons X est de 2, c'est-à-dire que

$$I(x) = I_0 e^{-2x}$$

où l'épaisseur x est mesuré en millimètres.

- On désire mesurer avec précision l'épaisseur des plaques en se servant de rayons X. Déterminer la fonction permettant de calculer l'épaisseur d'une plaque quand on connaît l'intensité du faisceau de rayons X ayant traversé la plaque.
- Si l'intensité du faisceau incident est de 10 unités, quelle est l'épaisseur d'une plaque qui laisse filtrer un faisceau de 3 unités.
- Construire un tableau de valeurs permettant de déterminer l'épaisseur d'une plaque en fonction de l'intensité du faisceau de rayons X à la sortie, en supposant toujours que $I_0 = 10$.

Solution

- On obtient la fonction recherchée en isolant x dans $I = I_0 e^{-2x}$. En prenant le logarithme de chaque membre de l'équation, on a :

$$\ln I = \ln I_0 e^{-2x}$$

$\ln I = \ln I_0 + \ln e^{-2x}$ Propriété du logarithme d'un produit.

$\ln I = \ln I_0 - 2x$ Définition de logarithme.

$$2x = \ln I_0 - \ln I$$

$$x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{I_0}{I} \right) \text{ Propriété du logarithme d'un quotient.}$$

$$\text{La fonction recherchée est donc } x(I) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{I_0}{I} \right).$$

- L'intensité du faisceau incident étant de 10 unités, l'épaisseur d'une plaque qui laisse filtrer un faisceau de 3 unités est

$$x(3) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{10}{3} \right) = 0,60 \text{ mm.}$$

- Un tableau de valeurs correspondantes est donné ci-contre.

Absorption de rayons X	
Intensité I à la sortie	Épaisseur x en millimètres
10	0
9	0,05
8	0,11
7	0,18
6	0,26
5	0,35
4	0,46
3	0,60
2	0,80
1	1,15

Paramètres d'une fonction exponentielle

Lorsqu'on sait qu'une situation est descriptible par une fonction exponentielle, mais que l'on ne connaît pas les paramètres, il faut les calculer en se servant de la forme du modèle et des données du problème. Les paramètres d'une fonction exponentielle de la forme $f(x) = ab^x$ sont a , l'image de 0 (soit la valeur initiale lorsque la variable indépendante est le temps), et la base b de la fonction. Ainsi, on peut représenter un phénomène démographique par :

$$P(n) = P_0(1 + i)^n.$$

La valeur initiale est alors la population initiale et la base est $b = 1 + r$. Les paramètres à déterminer pour obtenir la fonction sont donc la population initiale P_0 et le taux d'augmentation ou de diminution r .

EXEMPLE 5.3.9

La municipalité de banlieue pour laquelle vous travaillez est en pleine expansion. La population, qui est actuellement de 17 500 personnes a un taux de croissance de 5,2 % par année.

- Le service d'urbanisme de la municipalité doit prévoir la population au cours des cinq prochaines années. Quelle fonction permet ces prévisions et quelle sera la population dans cinq ans? Exprimer la fonction en base e .
- Durant la présentation des résultats de l'étude, l'économiste de la municipalité a contesté les conclusions en alléguant que le ralentissement économique influera sur l'expansion de la municipalité. Il prétend que le taux de croissance annuel sera plutôt de 2,4 % par année au cours des cinq prochaines années. Si on tient compte de cette information, quelle fonction décrit la population pour les prochaines années et quelle sera la population dans cinq ans?

Solution

- Soit P la population de la municipalité. La fonction recherchée est de la forme :

$$P(t) = P_0 (1,052)^t$$

où t est le nombre d'années et P_0 est la population initiale. On a

$$P(t) = 17\,500 (1,052)^t$$

$$\text{et } P(5) = 17\,500 (1,052)^5 = 22\,548.$$

Puisque $1,052 = e^{\ln 1,052} = e^{0,050\,693}$, on peut écrire :

$$P(t) = 17\,500 e^{0,050\,693 t}$$

- Dans ces conditions, la fonction est :

$$P(t) = 17\,500 (1,024)^t = 17\,500 e^{0,023\,7 t}$$

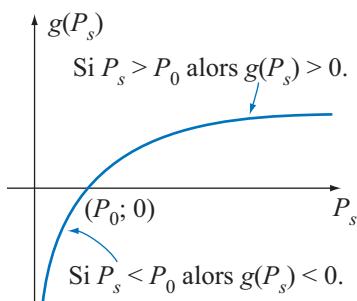
$$\text{et } P(5) = 17\,500 e^{0,023\,7 \times 5} \approx 19\,703.$$

Décibel

On a réalisé de nombreuses recherches pour tenter de déterminer les effets de la variation et de l'intensité d'un stimulus sonore sur les sens. On a constaté que si l'on double l'intensité d'un son, par exemple, le son perçu ne double pas, c'est-à-dire que la réponse n'est pas proportionnelle au stimulus. On s'est en fait rendu compte que la sensation acoustique est approximativement proportionnelle au logarithme de l'intensité du son. Il a donc fallu déterminer une unité de mesure de l'intensité des sons basée sur le logarithme. On a d'abord choisi le « bel », ainsi nommé en l'honneur de Graham Bell, mais cette unité est trop petite et, dans la majorité des cas, le nombre de bels est un nombre fractionnaire. C'est pourquoi on utilise plutôt le « décibel ».

Le décibel sert également à mesurer le rapport entre la puissance à l'entrée et la puissance à la sortie d'une composante électronique. Ce rapport, appelé **gain** est défini par

$$g(P_s) = 10 \log (P_s/P_0) \text{ décibels,}$$



où P_s est la puissance à la sortie, P_0 la puissance à l'entrée ou puissance initiale (c'est la puissance servant de référence) et \log le logarithme de base 10.

La représentation graphique de la fonction g permet de voir certaines caractéristiques du gain. Si la puissance à la sortie est plus grande que la puissance à l'entrée, le gain est positif; dans le cas contraire le gain est négatif. Le graphique d'un gain en décibels est généralement tracé dans un repère dont l'un des axes est gradué à l'aide d'une échelle logarithmique.

REMARQUE

Il est important de préciser que le décibel n'est pas une quantité absolue. Il représente essentiellement une variation de la puissance relativement à une puissance de référence. Si on modifie la puissance de référence, le nombre de décibels change aussi. Donner la puissance à la sortie en nombre de décibels n'a aucun sens si on ne précise pas la puissance à l'entrée. Il y a des puissances de référence standard dans l'industrie. La puissance de référence pour l'oreille humaine est 10^{-16} W.

EXEMPLE 5.3.10

Une puissance de 5 mW est nécessaire pour alimenter un amplificateur dont la puissance à la sortie est de 40 mW.

- Quel est le gain exprimé en décibels ?
- Quel serait le gain si la puissance à la sortie était de 20 mW ?

Solution

- La puissance à l'entrée est $P_0 = 5$ mW et la puissance à la sortie est $P_s = 40$ mW. Par conséquent, la fonction est :

$$g(P_s) = 10 \log(P_s/5).$$

Donc

$$g(40) = 10 \log (40/5) = 10 \log 8 = 10 \times 0,903 = 9,03 \text{ dB.}$$

- $g(20) = 10 \log (20/5) = 10 \log 4 = 10 \times 0,602 = 6,02 \text{ dB.}$

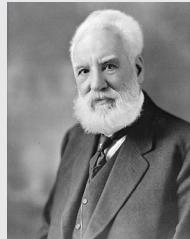
Un peu d'histoire

ALEXANDER GRAHAM BELL

1847-1922

Alexander Graham Bell naquit à Édimbourg, en Ecosse, et étudia aux universités d'Édimbourg et de Londres. Il était le fils d'un éducateur écossais, Alexander Melville Bell qui créa un langage pour les sourds-muets, appelé « parole visible », dans lequel on utilise les lèvres, la langue et la gorge pour l'articulation du son. D'abord attiré par la musique, Bell s'en détourna, probablement touché par les problèmes de surdité dont souffrait sa mère, pour s'initier à la phonétique, suivant ainsi les traces de son père. Après ses études à Londres, il s'établit au Canada en 1870, puis aux États-Unis d'Amérique un an plus tard, où il fonda en 1872 une école pour malentendants, qui fut par la suite rattachée à l'université de Boston. Il y enseigna avec succès la méthode élaborée par son père.

À la même époque, il entreprit des travaux qui devaient le mener à l'invention du téléphone. Dès 1874, il avait acquis



la conviction qu'il est possible de transformer les ondes sonores en impulsions électriques. Avec l'aide de son assistant, Thomas Watson, il y parvint en 1876. Lors des tests effectués en laboratoire, la première phrase, en anglais, transmise par téléphone fut « Watson, venez ici, j'ai besoin de vous ! », À croire qu'il s'agissait de Sherlock Holmes !

L'invention connut rapidement un succès retentissant qui aboutit, en 1877, à la création de la compagnie de téléphone Bell.

La fortune aidant, Bell se tourna alors vers d'autres champs d'expérimentation, jetant les bases du gramophone et s'intéressant à l'aviation et aux transports nautiques. Il participa, avec son beau-père à la création de la « National Geographic Society », dont il fut le président de 1897 à 1903.

5.4 Exercices

1. Résoudre les équations suivantes en appliquant les règles d'utilisation des exposants :

a) $10^{-2x} \times 100^2 = 10$ d) $\frac{9^{x+1}}{3^{2-x}} = 27^2$

b) $\frac{8^{3x}}{4^{2x-1}} = \frac{1}{16^2}$ e) $\frac{25^x \times 5}{125^3} = \frac{25}{5^{x-3}}$

c) $49^{1-2x} = \frac{1}{343^2}$ f) $\frac{2^{x^2}}{4^x} = 16^2$

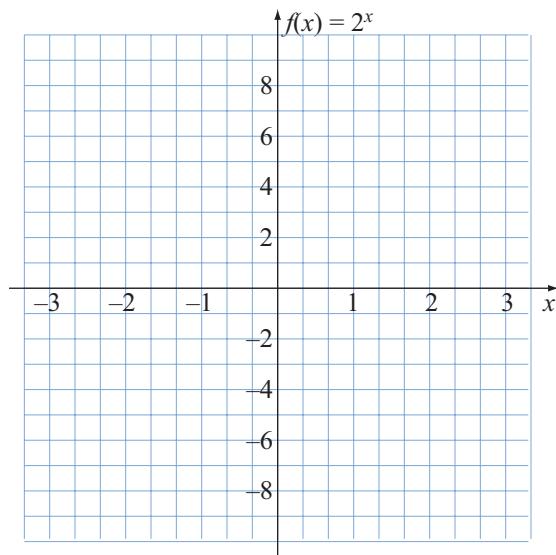
2. Soit la fonction définie par la règle de correspondance

$$f(x) = 2^x.$$

- a) Donner le domaine et le codomaine de cette fonction.
b) Calculer les correspondances requises pour compléter le tableau suivant.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x							

- c) Représenter graphiquement la fonction en utilisant les valeurs calculées en b).



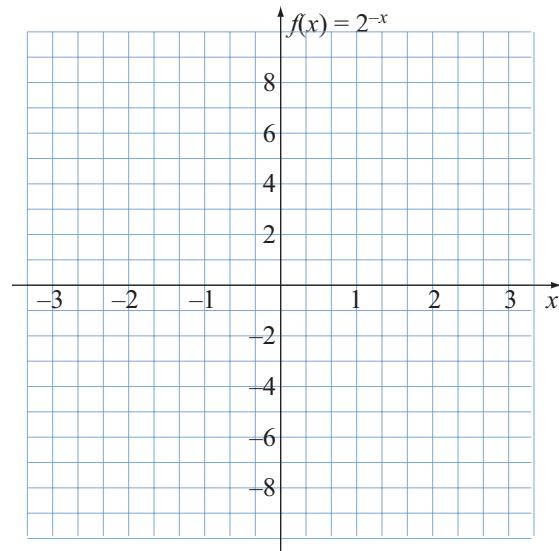
3. Soit la fonction définie par la règle de correspondance

$$f(x) = 2^{-x}.$$

- a) Donner le domaine et le codomaine de cette fonction.
b) Calculer les correspondances requises pour compléter le tableau suivant.

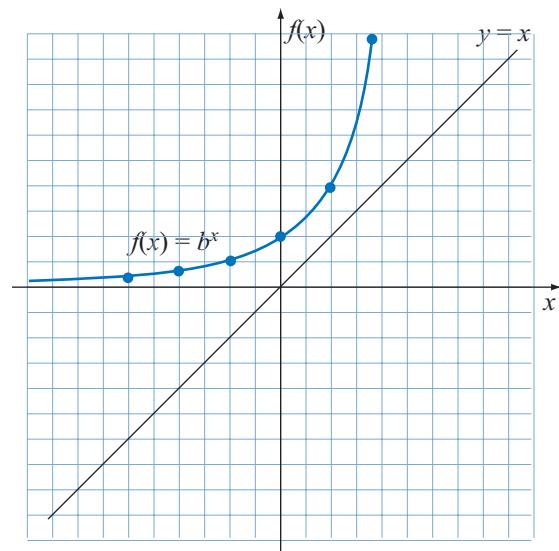
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^{-x}							

- c) Représenter graphiquement la fonction en utilisant les valeurs calculées en b).

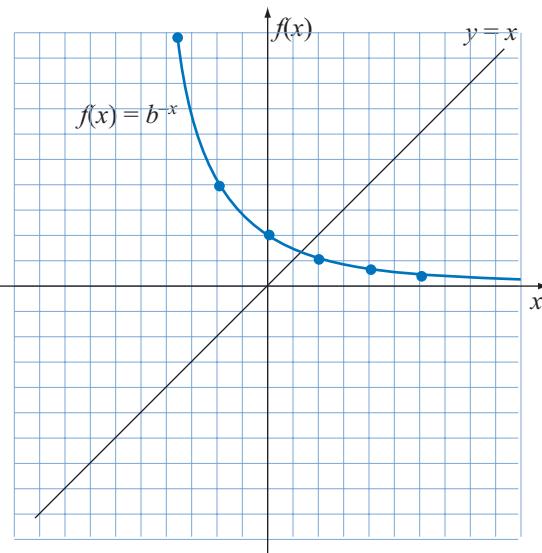


4. Représenter graphiquement les réciproques des couples donnés dans les graphiques suivants et utiliser les points obtenus pour esquisser le graphique de la relation réciproque. Indiquer le domaine et le codomaine de cette relation, dire si c'est une fonction, si oui, en donner la règle de correspondance.

a) $f(x) = b^x$



b) $f(x) = b^{-x}$



5. Déterminer le domaine des fonctions logarithmiques suivantes.

a) $f(x) = \log_2(3x - 8)$ c) $f(x) = \log_3(2x + 7)$
 b) $f(x) = 3\log_5(5 - 2x)$ d) $f(x) = 4 - \log_2(5x - 4)$

6. Trouver les logarithmes suivants.

a) Logarithme de base 2 de 64
 b) Logarithme de base 0,5 de 0,125
 c) Logarithme de base 3 de 1/243
 d) Logarithme de base 1/3 de 81
 e) $\log_b x$ dans le cas où $\log_b(1/x) = 1/4$

7. Écrire l'équation $\log_b(a - x) = c$ sous forme exponentielle et isoler x .

8. Déterminer la valeur de N dans chacune des expressions suivantes.

a) $\log_2 N = 3$ c) $2 \log_5 N = -4$
 b) $\log_3 N = -1$

9. Trouver les logarithmes suivants.

a) $\log_b \sqrt{b}$ b) $\log_{10} 0,1$

10. Déterminer la valeur de N dans chacune des expressions suivantes :

a) $\log_6 N = 0$ c) $\log_8 N = -1/3$
 b) $\log_4 N = 1,5$

11. Déterminer la valeur de b dans chacune des expressions suivantes.

a) $\log_b 8 = 3/4$ c) $\log_b 81 = 4$
 b) $\log_b \sqrt{3} = 1/4$ d) $\log_b 0,125 = -3$

12. Déterminer la valeur de N dans chacune des expressions suivantes.

a) $\log_3(1/\log_3 N) = 1$ b) $\log_2(\log_2 N) = 0$

13. Trouver les logarithmes demandés.

a) $\log_2 32$ b) $\log_3(1/243)$

14. Exprimer les nombres suivants sous la forme d'une puissance de 10.

a) 54,5 b) 1,2

15. Trouver un nombre réel x tel que :

a) $10^{2x} = 0,7$ c) $10^{-x} (10^{-x} - 8) = 0$
 b) $2 \log x - 5 = 0$ d) $10^{3x} = 25$

16. Exprimer les nombres suivants en base e .

a) 27,23 b) 0,78

17. Déterminer x avec cinq chiffres significatifs.

a) $e^x = 0,65$ c) $2 \ln x - 3 = 0$
 b) $\ln x = -0,27$ d) $e^{-x} (e^{-x} - 2) = 0$

18. Résoudre et conserver cinq chiffres significatifs.

a) $4^x = 22$ c) $2^x = 100$
 b) $5^x = 34$ d) $1,5^x = 42$

19. Résoudre et conserver cinq chiffres significatifs.

a) $6^{2-3x} = 4^{2x+1}$ b) $8^{3-x} = 5^{2x+3}$

20. Déterminer le logarithme demandé.

a) Sachant que $\log_b x = 6$, calculer $\log_b x^2$.
 b) Sachant que $\log_b bx = 7$, calculer $\log_b x$.
 c) Sachant que $\log_b bx = 5$, calculer $\log_b x^2$.

21. Résoudre les équations logarithmiques suivantes.

a) $\log_2(x - 5) = 3$ c) $\log_{1/2}(3x - 1) = -3$
 b) $\log_5(2x + 1) = 2$ d) $\log_3\left(\frac{x^2 + 2}{x + 4}\right) = 1$

22. Exprimer les logarithmes suivants en fonction de logarithmes des composantes.

a) $\log_b(\alpha' \sqrt{T})$ c) $\ln \sqrt{\frac{Vn^3}{T^{1/3}}}$
 b) $\log\left(\frac{[\alpha]}{RT}\right)$

23. Reformuler les définitions des fonctions suivantes à l'aide du logarithme de base 10.

a) $y = 5 \ln x + 2$ c) $T = 2,5 \log \beta + 1,34$
 b) $N = 3 \log_2 t + 4,8$

24. Déterminer la valeur de x pour laquelle $y = 500$ dans la relation $y = 10(1/3)^x$.

25. Un sel radioactif se désintègre de telle sorte que la quantité présente après t années est décrite par le modèle

$$Q(t) = Q_0(0,98)^t$$

- a) Combien de temps met la quantité initiale à diminuer du quart? des trois quarts ?
 b) Déterminer la demi-vie du sel radioactif.
26. Le radium A se désintègre à une vitesse telle qu'à la fin de chaque minute il ne reste que les 8/10 de la quantité initiale. Déterminer la demi-vie du radium A sachant que la demi-vie d'un élément radioactif est le temps nécessaire pour que la moitié de la quantité initiale se désintègre.

27. Résoudre l'équation

$$\log_a x = \log_a \left(\frac{5}{8} \right) + \log_a \left(\frac{7}{10} \right) - \log_a \left(\frac{2}{7} \right)$$

28. Simplifier les expressions suivantes.

$$\begin{array}{ll} a) \log_a x^3 - \log_a x & c) \log_a (x^2 - 1) - \log_a (x + 1) \\ b) \log_a x^3 - \log_a 2x & d) \log_a (a^2 \sqrt{x}) + \log_a x^2 \end{array}$$

29. Calculer la valeur de x à l'aide des propriétés des logarithmes.

$$\begin{array}{ll} a) \log_2 x + \log_2 (x - 3) = 2 & \\ b) \log_3 (x + 2) - \log_3 (x - 2) = 2 & \\ c) 2 \log_5 x - \log_5 8x = 0 & \\ d) 2 \log_2 x - \log_2 (x - 2) = 3 & \end{array}$$

30. Dans un examen, à la question « Résoudre l'équation $2^x = 12$ », un étudiant a donné la solution suivante.

$$\begin{aligned} 2^x &= 12 \\ \log 2^x &= \log 12 \\ x \log 2 &= \log 12 \\ x &= \frac{\log 12}{\log 2} = \frac{12}{2} = 6 \end{aligned}$$

Relever l'erreur commise et corriger la solution.

31. Dans un examen, à la question « Écrire l'expression $\log x + \log 4x = 2$ sous forme exponentielle », un étudiant a répondu :

$$\begin{aligned} \log x + \log 4x &= 2 \\ \log 5x &= 2 \\ 5x &= 10^2 \\ 5x &= 100 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Relever l'erreur qu'il a commise et corriger la solution.

32. Dans un examen, à la question « Résoudre l'équation $\log x = 3 \log 2$ », un étudiant a répondu :

$$\log x = 3 \log 2$$

$$x = 6$$

Relever l'erreur qu'il a commise et corriger la solution.

33. Dans un examen, à la question « Résoudre l'équation $\log x - \log 2 = 1$ », un étudiant a répondu :

$$\log x - \log 2 = 1$$

$$\log(x - 2) = 1$$

$$x - 2 = 10^1$$

$$x = 12$$

Relever l'erreur qu'il a commise et corriger la solution.

34. L'intensité d'un faisceau de rayons X à la sortie d'une plaque de x mm d'épaisseur est donnée par la règle de correspondance $I(x) = I_0 e^{-kx}$ où I_0 est l'intensité du faisceau à l'entrée, I l'intensité à la sortie et k une constante linéaire d'absorption qui dépend du matériau constituant la plaque.

- a) Calculer la valeur de k , dans le cas où une plaque de 5 mm d'épaisseur absorbe les deux tiers du faisceau.

- b) Esquisser le graphique de la fonction.

- c) On veut utiliser les rayons X pour mesurer l'épaisseur en mm de plaques formée du même matériau. Déterminer la fonction qui permet de calculer l'épaisseur x selon l'intensité du faisceau à la sortie. Esquisser le graphique de la fonction.

- d) Sachant que l'intensité initiale est $I_0 = 10$, compléter le tableau de spécifications indiquant l'épaisseur des plaques en fonction de l'intensité du faisceau à la sortie.

I	10	8	6	4	2
$x(I)$					

35. Selon la loi de Halley, la pression atmosphérique p en pouces de mercure dépend de l'altitude mesurée à partir du niveau de la mer, et elle est décrite par

$$p(h) = 29,92 e^{-h/5} \text{ où } h \text{ est l'altitude en milles.}$$

- a) Quelle est la lecture du baromètre au niveau de la mer?

- b) La pression au niveau de la mer est de 101,32 kPa. Trouver l'équivalent en kilopascals de un pouce de mercure.

- c) Calculer la pression en pouces de mercure et en kilopascals à une altitude de 2 640 pi. (1 mi = 5 280 pi)
- d) À quelle altitude le baromètre indiquera-t-il une pression de 22,12 po de Hg?
36. Le gain en décibel d'un systèmes de sonorisation, est donné par
- $$g(P_s) = 10 \log (P_s/P_0) \text{ décibels}$$
- où P_s est la puissance à la sortie et P_0 est la puissance à l'entrée, ou puissance initiale (c'est la puissance servant de référence).
- a) Sachant que la puissance de référence la plus utilisée dans l'industrie du téléphone est de 1 mW, trouver la fonction permettant de spécifier les qualités d'amplification des systèmes téléphoniques.
- b) Quelle est la puissance à la sortie correspondant à une amplification de 15 dB ? de 20 dB ?
- c) Quel est le gain en décibels d'un système dont la puissance à la sortie est de 20 mW ? de 40 mW ?
37. La puissance de référence de plusieurs récepteurs radios est de 0,006 W (ou 6 mW).
- a) Quelle est la fonction permettant de spécifier les qualités d'amplification de ces récepteurs radios ?
- b) Quel est le gain en décibels d'un système dont la puissance de sortie est de 4 mW? de 10 W ? de 60 W ?
- c) Quelle est la puissance de sortie correspondant à une amplification de 12 dB? de 20 dB?
38. L'oreille humaine est capable de percevoir les sons d'une puissance de 10^{-16} W ou plus.
- a) Quelle est la fonction qui décrit l'intensité d'un son en décibels ?
- b) Quelle est l'intensité d'un son dont la puissance est de 50 W ?
- c) Quelle est la puissance en watts d'un son dont l'intensité est de 350 dB ?
39. Une compagnie veut fabriquer des abats-jours dans un nouveau matériau. L'intensité de la lumière que le matériau laisse filtrer diminue lorsque celui-ci est soumis à une tension électrique contrôlée par un rhéostat. L'intensité du faisceau que



laisse filtrer un abat-jour est donnée par le modèle $I(x) = I_0 e^{-kx}$ où I_0 est l'intensité à l'entrée, I est l'intensité à la sortie et k est une constante linéaire d'absorption qui dépend du matériau. Le rhéostat est gradué de 0 V à 10 V. Lorsque la tension est nulle, le matériau est tout à fait translucide et si elle est de 2 V, le matériau absorbe 35% de la luminosité.

- a) Déterminer un modèle permettant de calculer la tension à appliquer selon la luminosité souhaitée.
- b) Utiliser le modèle pour calculer la tension à appliquer pour que l'absorption soit de 70%.
40. L'entreprise qui vous emploie achète un ordinateur dont le taux de dépréciation est de 30 % par année.
- a) Construire un modèle mathématique décrivant la valeur de l'ordinateur en fonction du temps t .
- b) Calculer la valeur de revente de l'ordinateur dans 4 ans.
- c) Calculer à quel moment la valeur de l'ordinateur aura diminué de moitié.
41. On a mis au point un nouveau matériau pour l'insonorisation des murs des édifices. Il est possible d'installer des panneaux avant la pose du placoplâtre ou de souffler des granules dans les murs d'édifices déjà existants. Selon la publicité, l'intensité sonore des bruits est réduite de 40 % pour chaque centimètre d'épaisseur dans le cas des panneaux et de 20 % par centimètre dans le cas des granules.
- a) Construire un modèle mathématique décrivant la relation entre l'intensité du bruit d'un côté et de l'autre d'un panneau insonorisant.
- b) En supposant que l'on installe des panneaux de chaque côté d'un mur, quelle épaisseur doivent-ils avoir pour que l'absorption soit supérieure à 90% ?
42. Une compagnie de construction achète une rétrocaveuse ayant deux ans d'usage au coût de 84 700 \$. La dépréciation sur une telle machinerie est de 17 % par année.
- a) Construire un modèle mathématique décrivant la valeur de l'équipement depuis l'achat par le premier propriétaire.
- b) Calculer la valeur de revente cinq ans plus tard.