RÉPONSES

Exercices 1.2

Expressions algébriques

1. a) 10
   b) -6
   c) $-2y$
   d) $2x$
   e) $x + 2y$
   f) $4xy - 7$
   g) $-11a + 3b + 4c$
   h) $9a - 2b - 8c$
   i) $2xy + 4x - 2y + 1$
   j) $-8x^3y^2 - 4x^4y^2 + 2x^3y - 4x^2y$
2. a) $(7 - 6a^2)x^3 + (1 - 2a)ax^2 + (3b + 5)x$
   b) $(6a - 2)x^3 + (6b - a^2)x^2 + (7b - 2a)x$
3. a) $a/(9b)$
   b) $4a^2b^3/3$
   c) $4/(3a^3b^2)$
   d) $9ac^3/(4b^2)$
4. a) 29/72
   b) 13/3
   c) 1 427/120
   d) $(3bc - 2ac + ab)/abc$
   e) $(bc^2 - 2a^3 + ab^3)/(a^2b^2c)$
   f) $-5x/42$
   g) $(x^2 - 9)/(3x)$
   h) $(2x^2 - 3x + 4)/x^3$
   i) $(-2x^2 - 5x + 3)/x^2$
   j) $(16 - x^2y^2)/(2x^2y^2)$

Exposants et radicaux

5. a) 9
   b) 2
   c) 1
   d) xy
   e) 20
   f) 9/2
   g) 729
   h) $1/x^3$
   i) 64/81
   j) a^5/b
   k) $y/(x^3 + xy)$
   l) $9x^4/(64y)$
   m) $x/2y$
   n) $1/(9x^2y^2)$
   o) $1/a^2b^4$
   p) x^{2n-2}/a^{n+4}
6. a) 2
   b) 9/10
   c) 729/8
   d) 1/25
7. a) 2
   b) pas défini
   c) 3
   d) -4
   e) 2
   f) -9
   g) a/b^2
   h) $5/a$
   i) a/b^2
   j) a^2
8. a) $\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$
   b) 1/2
   c) 1/9
   d) 3/2
   e) 25/9
   f) 4/9
   g) $x/27$
   h) $8/(27x\sqrt{x})$
   i) $y^4/(9x^2)$
   j) $b^2/(5a)$
   k) $a/(6b^2)$
   l) $2\sqrt{3}a/(5\sqrt{b})$
9. a) $6\sqrt{2}$
   b) $7\sqrt{2}$
   c) 14
   d) $10\sqrt{5}$
   e) $3a\sqrt[3]{3}$
   f) $3\sqrt[3]{a^2b}$
   g) $-2a\sqrt[3]{4a}$
   h) $3\sqrt[3]{2a^2/b}$
10. a) $3\sqrt{3}$
    b) $-\sqrt{5}$
    c) $12\sqrt{10}$
    d) $6x\sqrt{6}$
    e) $x^3\sqrt{10}$
    f) $6\sqrt{10} - 8\sqrt{15}$
    g) $\sqrt[6]{200a^2b^3}$
    h) $a^2\sqrt[6]{108}$
    i) $5a\sqrt{6}/6$
    j) $(x\sqrt{15} + \sqrt{10})/5$

Polynômes

11. a) $8x^2y - 2xz + 5y^3 - 4$
    b) $3x^2 + 4xz - 2y^3 - 2$
    c) $7x^2y - 3xy - 3y^2$
    d) $2x^2y + xy + 10y^2$
12. $p(x) + q(x) = 7x^3 - 3x^2 - x + 13$
13. $p(x) - q(x) = 4x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 4$
14. a) $x^2 - 2x - 24$
    b) $2x^2 + 9x - 35$
    c) $3x^2 + 16x - 12$
    d) $6x^2 - 11x + 4$
    e) $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6$
    f) $12x^4 + 56x^3 - 37x^2 - 91x - 30$
    g) $9x^4 - 4y^2$
    h) $4x^4 + 12x^2y + 9y^2$
    i) $4x^2y^2 - 12x^2y + 9x^2 - 25y^2$
15. $6x^4 + 4x^3 - 34x^2 - 16x + 40$.
16. a) $p(-1) = -6$, $p(2) = 9$
    b) $p(-1) = -3$, $p(1) = -3$, $p(2) = 3$
    c) $p(0) = 1$, $p(1) = -4$, $p(4) = -43$
17. a) $p(2) = 0$, $p(-5/2) = 0$ et $p(-3) = 0$
    b) $p(-1) = 0$, $p(1) = 0$ et $p(5/2) = 0$

Factorisation

18. $x^2 - b^2 = (x - b)(x + b)$
19. $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$
20 a) $24x(1 - 2xy)$
   b) $a(a - b)(a + b)$
   c) $a(2a - 1)(2a + 1)$
   d) $x^2(x - 5y)$
   e) $12(1 - 2xy)(1 + 2xy)$
   f) $4x(x^2 - 2xy + 4y)$
   j) $(4a - b)(4a^2b^2 + 3)$
   k) $(2y - 5x)(3 - 2x)$
   l) $2(3 + b)(3a^2 - 5b)$
   m) $(x - 1)^2(x + 1)$
   n) $2(x - 2)(x^2 + 2)$
   o) $(x + 4)(3x^2 - 5)$

g) $5x^2y(5x - y + 2x^2y^2)$
h) $4ab^2(4a^2 - ab + 3b)$
i) $y(x - 1)(x^2 + 4)$
p) $(5y^2 - 3x^2)(2x + y)$
q) $(5x + 8)(2ax + 3)$
r) $(x^2 + 4)(2y^3 - 5)$

21. a) $(x + 8)(x - 7)$
b) $(x - 6)(x - 7)$
c) $(x - 12)(x + 8)$
d) $(x - 4)^2$
e) $(x - 7)(x + 4)$
f) $(x - 11)(x + 7)$
g) $(x + 5)(x + 6)$
h) $(x - 7)(x + 5)$
i) $(x + 6)(x + 15)$
j) $(x + 7)^2$
k) $(x - 6)(x - 8)$
l) $(x + 12)(x - 6)$

22. a) $(x + 7)(2x - 5)$
b) $(3x - 4)(x + 9)$
c) $(3x - 11)(2x + 7)$
d) $(5x - 3)(x + 8)$
e) $(6x - 5)(x + 4)$
f) $2(2x + 3)(3x + 2)$
g) $(2x - 7)(x + 3)$
h) $(2x - 7)(2x - 5)$
i) $(x - 7)(6x + 11)$
j) $2(x + 6)(5x - 7)$
k) $3(x + 2)(2x - 9)$
l) $(3x + 8)(2x + 7)$

23. $x^3 - b^3 = (x - b)(x^2 + bx + b^2)$
24. $x^3 + b^3 = (x + b)(x^2 - bx + b^2)$
25. $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
26. $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
27. a) $(x + 4)(x - 4)$
b) $(2x + 7)(2x - 7)$
c) $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
d) $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$
e) $(a - 8)(a + 8)$
f) $(3a - 4b)\ (3a + 4b)$
g) $8x^3y^3(y\ + 3)(y^2 - 3y + 9)$
h) $(1 - x)(1 + x + x^2)$
i) $(a^2 + b^2)(a - b)(a + b)$
j) $(4a^2 + 9y^2)(2a - 3y)(2a + 3y)$
k) Indécomposable
l) $(a^2b^2 + 1)(ab - 1)(ab + 1)$

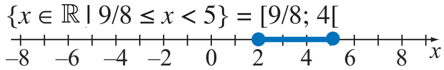
28. a) $x^2 + 5$ et un reste de -3
b) $2x^2 - 6x + 12$ et un reste de $-52x + 31$
c) $x^2 - 4x + 7$ et un reste nul, le diviseur est un facteur.
d) $x^2 + 7$ et un reste de 9
e) $x^3 + 4x^2 + 3x - 2$ et un reste nul, le diviseur est un facteur.
f) $x^2 - 3x + 4$ et un reste nul, le diviseur est un facteur.
g) $2x^2 - 5x + 4$ et un reste nul, le diviseur est un facteur.
h) $x^2 - 3x + 9$ et un reste nul, le diviseur est un facteur.

29. a) $(x + 1)(x + 2)(2x - 3)$
b) $(x - 2)(x + 3)(2x + 1)$
c) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)(3x + 1)$

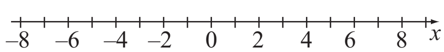
Exercices 1.4

Équations du premier degré

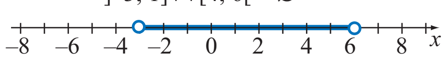
1. a) $x = 5$
b) $x = -4$
c) $x = 13$
d) $x = -25/3$
e) $x = 21/5$
f) $x = -9/26$
g) $x = 1$ (si $ab + cd \neq 0$)
h) $x = a$ si $a \neq n$, sinon x quelconque

2. 4 satisfait l'équation
3. a) $x = 7/3$
b) $x = 4$ cm
c) $x = 22$
d) $x = 5$ cm
e) $x = 8$
4. $x \approx 10{,}67$ L
5. trente minutes, 25 km
6. $l \approx 84$ m et $L \approx 252$ m
7. 2 heures et 24 minutes
8. 4 heures 48 minutes
9. $x = ab/(a + b)$
10. 4 h à 20 km/h et 2 h à 16 km/h.
11. a) 4 ne satisfait pas l'inéquation
b) 1 est une solution de l'inéquation.
c) -1 n'est pas une solution de l'inéquation.
12. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3/2\} =]3/2; \infty[$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 8/5\} =]-\infty; 8/5[$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 42/37\} =]-\infty; 42/37]$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\} =]-\infty; 2[$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 16/9\} = [16/9; \infty[$
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 247/41\} =]-\infty; 247/41[$
g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\} = [6; \infty[$
h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 31/4\} =]31/4; \infty[$
13. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\} = [-2; 5[$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 9/8 \leq x < 5\} = [9/8; 4[$
14. a)


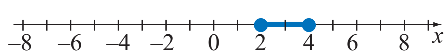
$]-3; 5] \cap [2; 6[= [2; 5]$

b)


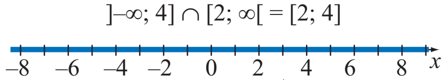
$]-3; 1] \cap [4; 6[= \varnothing$

c)


$]-3; 5] \cup [2; 6[=]-3; 6[$

d)


$]-\infty; 4] \cap [2; \infty[= [2; 4]$

e)


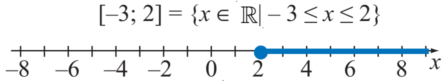
$]-\infty; 4] \cup [2; \infty[= \mathbb{R}$

f)

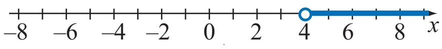

$]-\infty; 6[\cap]-2; \infty[=]-2; 6[$

15. a)

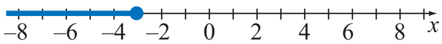

$[-3; 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$

b)


$[2; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

c) 

$]4; \infty[= \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$

d) 

$]-\infty; -3] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$

16. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 4\} = [-5; 4]$
 b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1$ ou $x \geq 3\} =]-\infty; -1[\cup [3; \infty[$
 c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} = [-1; \infty[$
 d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\} =]-\infty; 2[$
 e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 2\} = [-6; 2]$
 f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x < -3$ ou $1 \leq x < 6\} = [-6; -3[\cup [1; 6[$
 g) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 4\} =]-3; 4]$
17. a) $x + 8 > 2x + 7$, $[0; 1[$
 b) $2x - 8 > 16 - x$, $]8; \infty[$
 c) $2x + 7 > x + 12$, $[0; 6[$
 d) $2x + 7 > x + 12$, $]5; \infty[$
18. $8 - x < x - 2$, d'où $x > 5$,
 $30 - 2x > x + 3$, d'où $x < 9$.
 L'intervalle des solutions est $]5; 9[$.
19 a) $x = \pm 4$ d) $x = 0$ ou $x = -4$
 b) $x = \pm 5$ e) $x = 0$ ou $x = 19/7$
 c) pas de solution f) $x = \pm 2\sqrt{6}/3$
20. a) $x = -9, x = 5$ c) $x = 6, x = 14$
 b) $-3,\ -17$ d) $x = 6, x = -7/2$
21. a) $x = 5, x = -7$ c) $x = 7, x = -11$
 b) $x = 7, x = -15$ d) $x = 12, x = -6$
22. a) $x = -7, x = 12$ c) pas de racine réelle
 b) $x = -7, x = 3/2$ d) $x = 5/2, x = -4/3$
23. 15 cm
24. 5 cm et 9 cm
25. 16 cm par 48 cm
26. 20 m, largeur des annexes
27. a) 21 cm et 28 cm b) 30 cm et 72 cm
28. environ 4,29 cm
29. environ 7,02 cm

Inéquations quadratiques

30. a) $]-3; 5[$ c) $]-\infty; -3[\cup]2; \infty[$
 b) $[-7; -1]$ d) $]-\infty; 2] \cup [6; \infty[$

Éléments de géométrie analytique

31. Périmètre, $(2+\sqrt{2})\sqrt{34}$ unités; aire, $17\ u^2$
32. La pente est la même, $-3/2$ et distances, $\sqrt{13}$
33. a) $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$, $a = 5/4$
 b) $y = -\frac{1}{7}x + \frac{9}{7}$, $a = -1/7$
34. (6; 4) et (6; –2)
35. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$
36. a) (2; –3) c) (–2; 5)
 b) (5; –3) d) (6; 3)
37. a) (–3; –2) c) (6; –2)
 b) (5; 4) d) (7; 2)

Exercices 2.2

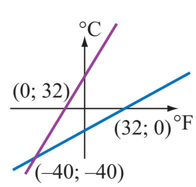
1. a) 36/5 b) 14/9
 c) 35/63 d) 15/14
2. 14,80 $ 3. 27,27%
4. 34,49 $ 5. 8
6. a) 68,6 %, 93,3 %, 78,6 %, 73,8 %
 b) Mathématiques
 c) 93,8 %, 81,4 %, 89,7 %, impossible
7. 19,20 $
8. 1 544,75 $ 9. 1,09 % ou 10,9 ‰
10. 394 000 $ (ou 393 750 selon les chiffres significatifs retenus)
11. a) 3 469 $ CA b) 2 725 $
 c) 4 002,13 $
12. a) 1 680 $ b) 31,50 $
 c) Deux heures et quart
13. a) 2 590 $ b) 38,85 $
 c) 9 $
14. a) 9,4 % b) 202,10 $
 c) 33,46 $ d) 513,80 $
 e) 234,62 $ f) 983,98 $
 g) 6,79 %
15. a) 11,34 % b) 29 505 $
 c) 27 772 $
16. a) 4 042,50 $ b) 5 775
17. 13 640 $ 18. 425,75 $
19. Le panneau signifie que la dénivellation est de 16 m pour une distance horizontale de 100 m.
20. a) 56,9 % b) 28 $ / h
21. 1 687 $ 22. 143,78 $
23. 24,04 $
24. a) 74,24 $ b) 61,32 $
25. a) 47,60 $ b) 40,46 $
 c) 46,54 $
26. 4,72 $ ou 5 $ pour arrondir
27. a) La base de comparaison peut être le prix du 100 g, ce qui donne:
 0,9573 $/100 g, 1,0725 $/100 g, 0,9454 $/100 g.
 b) La troisième marque est la plus économique.
 c) La deuxième marque est la plus chère.

28. Une heure après avoir continué l'excursion.
29. Il faut se méfier des réflexes conditionnés. Il ne suffit pas toujours de brasser les chiffres pour arriver à la réponse d'un problème. Dans ce cas, le client précédent achète des plaques pour inscrire les numéros de porte. Pour le 1 et le 4, il a besoin d'une seule plaque, le coût est de 1,25 $ chacun. Pour le numéro 15, il a besoin de deux plaques, le coût est de 2,50 $. Pour faire le numéro 218, il a besoin de trois plaques, il lui en coûtera donc 3,75 $. Le montant total de ses achats sera de 8,75 $.

Exercices 2.4

1. a) $T(x) = 0{,}14975x$.
   b) $T(50) = 7{,}50$ \$, $T(100) = 15{,}00$ \$, $T(250) = 37{,}45$ \$
   c) $M(x) = 1{,}14975x$
   d) $M(50) = 57{,}50$ \$, $M(100) = 115{,}00$ \$, $M(250) = 287{,}45$ \$
2. a) $P(t) = 3t$ où t est la durée de la location
   b) $PA(t) = 5t$ c) $PE(t) = 2{,}5t$
   d) $PA(t) + PE(t) = 5t + 2{,}5t = 7{,}5t$
3. a) $I(n) = 5\,000 \times 0{,}005\ n = 25n$
   b) $I(24) = 600$ \$
4. a) Le modèle est $f(x) = 2{,}2x$.
   c) $f(80) = 176$; $f(100) = 220$
   d) 3,6 kg
5. a) 80 km/h b) $d(t) = 80t$ km
   c) $t = 6{,}25$ h
6. a) $N(p) = 3\,000/p$ b) $p = 2{,}50$ \$
7. a) $P(c) = 1{,}35c$ où c est le coût de production.
   b) $P(25) = 33{,}75$ c) 60,75 \$
   d) $T(c) = 1{,}5521\,625c$
8. a) $D(c) = 10{,}91c$ où D est la distance parcourue en kilomètres et c, la consommation en litres.
   b) $D(160) = 1\,746$ km c) $c(D) = 0{,}0917D$
   d) $c(2\,500) = 229$ L e) 310 \$
9. a) $C(p) = 0{,}7p$ où C est le coût de production et p, le prix indiqué.
   c) $C_1(p) = 1{,}05p$
   d) $C_2(p) = p + 0{,}05p + 0{,}099\,75p = 1{,}149\,75p$
   e) $C_3(p) = 1{,}299\,75p$
10. a) 940,8 g. b) 864 g.
11. 720 ml de crème.

Exercices 3.2

1. a) $y = \frac{-x}{10} + \frac{17}{10}$ b) $y = \frac{-8x}{7} + \frac{27}{7}$
   c) $y = \frac{-10x}{7} - \frac{9}{7}$
2. a) $y = \frac{-x}{5} + \frac{18}{5}$ b) $y = \frac{3x}{4} + \frac{17}{4}$
   c) $y = 4x - 13$
3. a) Relation c) Relation
   b) Relation d) Fonction
4. a) Fonction c) Relation
   b) Fonction d) Fonction
5. a) $\text{dom}_f = [-3; 3]$, $\text{codom}_f = [0; 2]$
   b) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$, $\text{codom}_f = \mathbb{R}$
   c) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$, $\text{codom}_f = [0; 4[$
   d) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$, $\text{codom}_f = [-3; 3]$
6. a) (2/5; 0) et (0; –2) e) (±4; 0) et (0; 4)
   b) (–3/2; 0) et (0; 3) f) pas de zéro et (0; 1/3)
   c) (–3; 0), (2; 0), (0; –6/5) g) (9; 0) et (0; 3)
   d) (–5; 0) et $(0; \sqrt{5})$ h) pas de zéro et (0; –5/2)
7. a) $x = -4$ et $x = 3$ b) $x = 3$
8. a) –13/2
   b) pas de préimage
   c) 4 fait partie du codomaine, mais pas 2.
   d) $x = (1 + 3y)/(2 - y)$
   e) $\text{codom}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$
9. a) $\text{dom}_f = [2; \infty[$ et $\text{codom}_f = [0; \infty[$
   b) $\text{dom}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ et $\text{codom}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$
10. a) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$ et $\text{codom}_f = \mathbb{R}$
    b) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$ et $\text{codom}_f = [0; \infty[$
    c) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$ et $\text{codom}_f =]0; \infty[$
    d) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$ et $\text{codom}_f = \mathbb{R}$
    e) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$ et $\text{codom}_f = [-9/4; \infty[$
    f) $\text{dom}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ et $\text{codom}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
    g) $\text{dom}_f = [-4; 4]$ et $\text{codom}_f = [0; 4]$
    h) $\text{dom}_f =]-\infty; 14/3]$ et $\text{codom}_f = [0; \infty[$
    i) $\text{dom}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\text{codom}_f =]0; \infty[$
    j) $\text{dom}_f = \mathbb{R}\backslash\{5/2\}$ et $\text{codom}_f = \mathbb{R}\backslash\{3/2\}$
11. a) La variable indépendante est le nombre de demi-heures t et la variable dépendante est le coût pour la main-d'œuvre. Les frais fixes sont de 20 \$ et les frais variables, de 30 \$. Le modèle est
    $$c(t) = 30t + 20.$$
    b) $c(1) = 30 \times 1 + 20 = 50$ \$
12. a) $C = \frac{5}{9}(F - 32)$
    b)


    c) –3,9° ; 37,8° ; 82,2°

d) $F = \frac{9}{5}C + 32$, permet de transformer les degrés Celsius en degrés Fahrenheit.

e) –40°C = –40°F

13. a) La variable indépendante est la longueur de la haie x et la variable dépendante est le coût C. Le coût comporte des frais fixes de 50 \$ et des frais variables de 36 \$ le mètre.

b) Représentons par x la longueur de la haie et par C le coût, on a alors

$$C(x) = 36x + 50.$$

c) $C(32) = 1\,202$ \$; $C(64) = 2\,354$ \$; $C(20) = 770$ \$; $C(84) = 3\,074$ \$

d) $a = 28{,}50$ \$/m

14. a) Soit x la superficie à couvrir, C_1 le coût chargé par le premier entrepreneur et C_2 le coût chargé par le deuxième entrepreneur.

$$C_1(x) = 7{,}50x + 200$$
$$C_2(x) = 7{,}80x + 80.$$

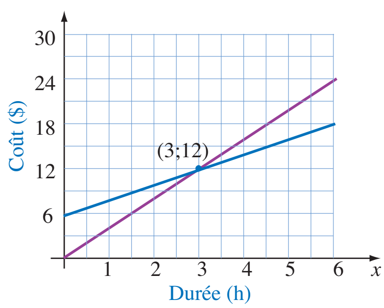
b) $C_1(300) = 2\,450$, $C_1(600) = 4\,700$
$C_2(300) = 2\,420$, $C_2(600) = 4\,760$

c) $x = 400$
Il est plus avantageux de choisir le premier entrepreneur lorsque la superficie est supérieure à 400 m^2.

15. a) $C_1(x) = 4x$ et $C_2(x) = 2x + 6$

b) $C_1(2) = 8$ \$ et $C_2(2) = 10$ \$,
$C_1(4) = 16$ \$ et $C_2(4) = 14$ \$

c) 3 h



16. a) $C_1(x) = 10x$ et $C_2(x) = 6x + 180$

b) $C_1(30) = 300$ \$ et $C_2(30) = 360$ \$, $C_1(90) = 900$ \$ et $C_2(90) = 720$ \$

c) 45 jours. Choisir le fournisseur 1 si la durée prévue est inférieure à 45 jours.

17. a) $C(x) = 0{,}5x + 60$

b) $C(200) = 160$ \$, $C(250) = 185$ \$

c) 230 m^2 d) 280 m^2

18. b) $C = 0{,}52x + 200$ c) $C(700) = 564$ \$

d) Représentons par C_p le coût pour l'utilisation de l'automobile personnelle. On a alors

$$C_p = 0{,}74x.$$

$C_p = C$ lorsque $0{,}74x = 0{,}52x + 200$,
d'où $x = 909$ km.

19. a) $d_1(t) = 50t$

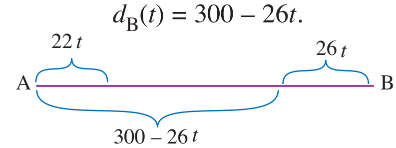
b) $d_2(t) = 30t + 52{,}5$

d) L'abscisse représente le temps écoulé entre le moment où la camionnette prend le départ et le moment où elle rattrape les cyclistes. L'ordonnée de ce point est la distance parcourue par la camionnette et les cyclistes au moment où la camionnettte rejoint le groupe.

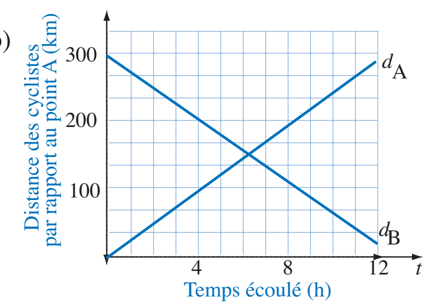
e) $t = 2{,}625$, soit 2 heures 37 minutes et 30 secondes.
$d_1(2{,}625) = 131{,}25$ km

20. a) Représentons par t le temps en heures écoulé depuis le moment du départ, par d_A la distance d'André par rapport au point A et par d_B la distance de Bertrand par rapport au point A. On a alors

$$d_A(t) = 22t$$
$$d_B(t) = 300 - 26t.$$



b)



c) L'abscisse du point de rencontre des droites représente le temps écoulé entre le départ des cyclistes et leur rencontre. L'ordonnée du point de rencontre des droites indique à quelle distance du point A les cyclistes vont se rencontrer.

d) $t = 6{,}25$. Le temps écoulé est donc de 6 heures 15 minutes.

e) $d_A(6{,}25) = 137{,}50$ km et $d_A(6{,}25) = 162{,}50$ km.

21. a) La variable indépendante est le nombre de pages x et la variable dépendante est le coût C.

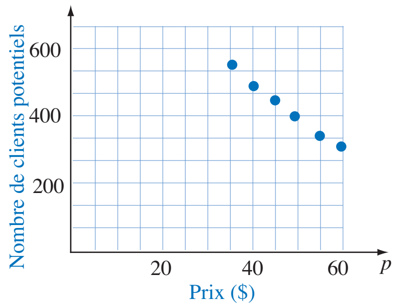
b) $C(x) = 0{,}07x + 1{,}25$

d) 18,05 \$

e) $x = 186$. Le document comporte donc 186 pages.

Exercices 3.4

1. a) La variable indépendante est le prix de l'article (p) et la variable dépendante est le nombre de clients potentiels.



b) $V(p) = -\ 10p + 896$

c)

Prix de l'article	Clients potentiels	Prévisions du modèle
35	540	546
40	492	496
45	458	446
50	406	396
55	336	346
60	294	296

d) La somme des carrés des résidus est alors 400 et le coefficient de corrélation est – 0,995. Ces deux résultats indiquent que le modèle affine est pertinent et présente peu de distorsion par rapport à la situation. On peut accorder une bonne fiabilité aux prévisions du modèle.

2. b) $Q(T) = -\ 1{,}609T + 30{,}10$
Conserver trois chiffres significatifs comme dans les données dans le résultat du calcul de l'image.
c) $Q(9) = 15{,}6$ L
d) $Q(-\ 12) = 49{,}4$; la consommation mensuelle sera $49{,}4 \times 31 = 1\ 530$ L, en arrondissant.
e) $Q(-\ 20) = 62{,}3$ L

3. b) La variable indépendante est le prix du billet et la variable dépendante est le nombre de spectateurs.
c) $N(\mathrm{p}) = -200p + 2\ 104$
d) 6,52 \$ ou 6,50 \$ si on a arrondi le modèle.
e) [6,52; 10,52]

4. b) $N(s) = 3{,}9s + 55$
c) Environ 270 h
d) Le coefficient de corrélation est de 0,82.

5. b) $V(x) = 0{,}029x + 1{,}92$ milliers de litres
c) Environ 280 véhicules
d) Le coefficient de corrélation est de 0,74.

6. b) $V(p) = -\ 2{,}85p + 140$ milliers de paires.
c) Le coefficient de corrélation est de –0,9995.

7. b) $V(p) = -16{,}42\ p + 60{,}08$ milliers d'étuis.
c) Environ 2,45 \$
d) Le coefficient de corrélation est de –0,994.

8. b) $V(p) = -\ 9{,}94p + 736$
c) Environ 34 \$
d) Le coefficient de corrélation est de – 0,9989: il indique que la corrélation est négative et très bonne. La corrélation étant négative, cela signifie que, lorsque le prix augmente, les ventes diminuent. Le modèle donne un ordre de grandeur du temps nécessaire, pas une estimation juste.

9. b) $N(T) = -0{,}495T + 15{,}5$.
c) Le coefficient de corrélation est de – 0,675: il indique que la corrélation est négative et très faible. Cela signifie que le modèle affine est peu représentatif du phénomène. Il y a certainement d'autres facteurs qui interviennent dans le nombre de mises en chantier.

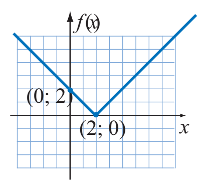
10. b) $N(a) = \ 0{,}12a + 4{,}16$. Le coefficient de corrélation est de 0,361: il indique que la corrélation est très faible et que le modèle affine est très peu représentatif du phénomène.

11. a) $C(D) = 0{,}1794D + 3{,}049$
b) Résidus, 0,002 711, corrélation est 0,999
c) ≈11 100 \$

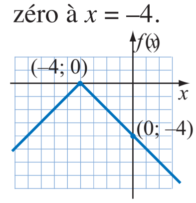
12. a) $V(p) = -10p + 896$
b) Résidus 400, corrélation –0,995

13. a) $V(p) = -2{,}11p + 1\ 710$
b) Résidus 1 504, corrélation –0,996 157

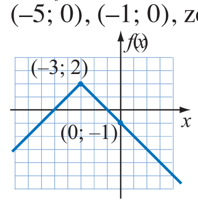
14. a) $\mathrm{dom}_f = \mathbb{R}$, $\mathrm{codom}_f = [0; \infty[$, (2; 0) (0; 2), zéro à $x = 2$.



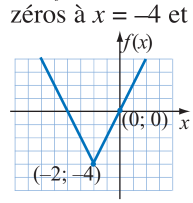
b) $\mathrm{dom}_f = \mathbb{R}$, $\mathrm{codom}_f =]-\infty; 0]$, (–4; 0), (0; –4), zéro à $x = -4$.



c) $\mathrm{dom}_f = \mathbb{R}$, $\mathrm{codom}_f =]-\infty; 2]$, (–3; 2), (0; –1), (–5; 0), (–1; 0), zéros à $x = -5$ et $x = -1$.

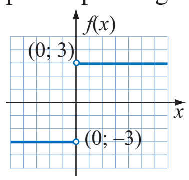


d) $\mathrm{dom}_f = \mathbb{R}$, $\mathrm{codom}_f = [-4; \infty[$, (–2; –4), (0; 0), (–4; 0), zéros à $x = -4$ et $x = 0$.



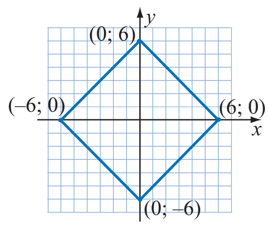
15. a) (–1; 3), (5; 3) b) pas de préimage
c) pas de préimage d) (–11/2; 3), (3/2; 3)

16. a)



b) $\text{dom}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\text{codom}_f = \{-3; 3\}$
c) fonction

17. a)



b) $\text{dom}_f = [-6; 6]$, $\text{codom}_f = [-6; 6]$
c) Ce n'est pas une fonction car certains éléments du domaine ont deux images.

18. a) $f(x) = |x+2| - 2$

b) $f(x) = 2|x-3| - 1$

c) $f(x) = -2|x-2| + 5$

d) $f(x) = \begin{cases} 2|x+1| - 1 & \text{si } x \in]-\infty; 2[\\ |x-5| + 2 & \text{si } x \in [2; \infty[\end{cases}$

19. b) $V(t) = \begin{cases} 50|t-12| + 50 & \text{si } t \in [0; 24] \\ 650 & \text{si } t > 24 \end{cases}$

c) Le modèle est valide pour $t \geq 0$.
d) 7 min et 17 min

20. a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -3 \\ \dfrac{2}{3}x + 2 & \text{si } -3 < x \leq 3 \\ 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -1 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{-5x+14}{4} & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{2x+1}{3} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

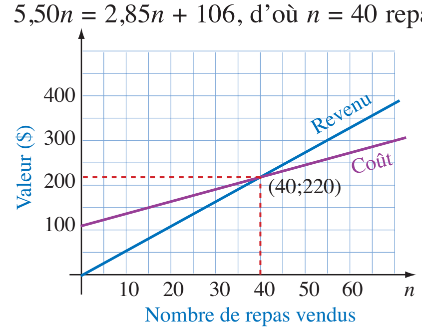
d) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x + 4 & \text{si } -2 < x < 0 \\ x^2/4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

21. a) Le coût dépend du nombre de jours et de la consommation moyenne en kW·h par jour.
b) 126,33 $ c) 216,46 $.

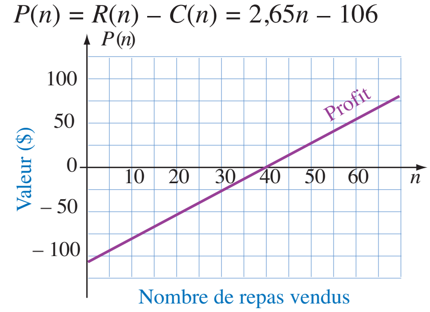
Exercices 4.2

1. a) Soit n le nombre de repas vendus, R le revenu et C le coût de production. Le revenu est $R(n) = 5{,}50n$ le coût est $C(n) = 2{,}85n + 106$. Le seuil de rentabilité est atteint lorsque $R(n) = C(n)$, ce qui donne $5{,}50n = 2{,}85n + 106$, d'où $n = 40$ repas.

b)



c) $P(n) = R(n) - C(n) = 2{,}65n - 106$



d) $P(20) = -53$ $, c'est une perte.
e) $P(65) = 66{,}25$ $

2. a) Le nombre de cornets vendus n est la variable indépendante et le coût de production C est la variable dépendante.
b) Le coût est $C(n) = 0{,}30n + 60$.
c) Le revenu est alors $R(n) = 0{,}60n$.
d) $n = 200$ cornets
e) $P(n) = 0{,}30n - 60$
Dans l'intervalle [0; 200[, le commerce opère à perte. En vendant 200 cornets, le seuil de rentabilité est atteint et en vendant plus de 200 cornets, le commerce fait des profits.
f) 210 cornets g) 285 cornets
h) Oui, car le niveau de vente moyen est plus élevé que le niveau d'indifférence. Le commerce va donc réaliser un meilleur profit en changeant de procédé.

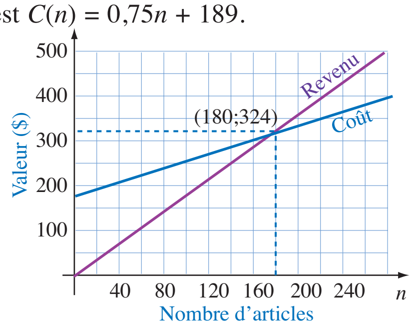
3. a) $A(n) = 0{,}27n + 139{,}95$ et $B(n) = 0{,}25n + 169{,}95$
b) $A(520) = 280{,}35$ $, $B(520) = 299{,}95$ $
Interprétation: pour un déplacement de moins de 1 500 km, il est préférable de choisir la compagnie A, 1 500 km

4. a) $A(n) = 5n + 200$ et $B(n) = 6n + 120$
b) $A(20) = 300$ $ et $B(20) = 240$ $
c) $A(80) = 600$ $ et $B(80) = 600$ $
e) Le niveau d'indifférence est atteint pour une superficie de 80 m^2. Pour une superficie plus grande, il est préférable de choisir la compagnie A.

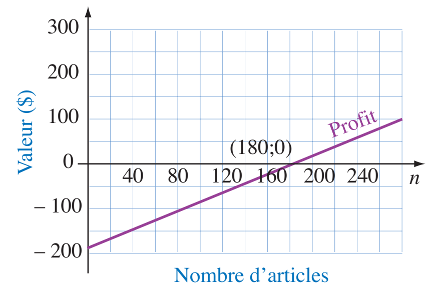
5. a) La variable indépendante est le nombre de bagels vendus n et la variable dépendante est le coût de production C.
   b) $C(n) = 1{,}75n + 160$ c) $R(n) = 2{,}60n$
   d) 189 bagels e) $P(n) = 0{,}85n - 160$
   En vendant moins de 189 bagels par jour, le commerce subit une perte. En vendant 189 bagels et plus, le commerce réalise un profit.
   f) $C_2(n) = 1{,}50n + 195$, le seuil est atteint à 178 bagels.
   g) Le niveau d'indifférence est de 140 bagels.
   h) Oui, puisque le nombre moyen de bagels vendus est supérieur au niveau d'indifférence.
6. a) $A(n) = 0{,}20n + 539{,}95$ et $B(n) = 0{,}35n + 349{,}95$
   b) $A(400) = 619{,}95$ \$, $B(400) = 489{,}95$ \$
   d) 1 267 km
   Pour une distance inférieure à 1 267 km, il est préférable de choisir l'entreprise B.
   e) Il est préférable de choisir l'entreprise B.
   f) Il est préférable de choisir l'entreprise B car
   $C_A(n) = 0{,}20 \times 1\,200 + 2 \times 539{,}95 = 1\,319{,}90$ \$
   $C_B(n) = 0{,}35 \times 1\,200 + 2 \times 349{,}95 = 1\,119{,}90$ \$
7. a) $A(n) = 40n + 460$ et $B(n) = 60n + 100$
   b) $A(20) = 1\,260$ \$, $B(20) = 1\,300$ \$
   d) 18 m^2. Pour une superficie supérieure à 18 m^2, il est préférable de choisir l'entreprise A.
8. a) $P(n) = R(n) - C(n) = 45n - 15\,750$
   b) L'abscisse à l'origine de la fonction est le seuil de rentabilité de la production.
   c) $P(n) = 50n - 25\,500$
   d) 1 950 unités.
   Pour une production supérieure à 1 950 unités, l'implantation du nouveau procédé est rentable et souhaitable.
   e) Changer le processus si les ventes mensuelles sont supérieures à 1 950 unités, sinon ne rien changer.

Exercices 4.4

1. a) Soit n le nombre d'articles, R le revenu et C le coût de production. Le revenu est $R(n) = 1{,}80n$ et le coût est $C(n) = 0{,}75n + 189$.

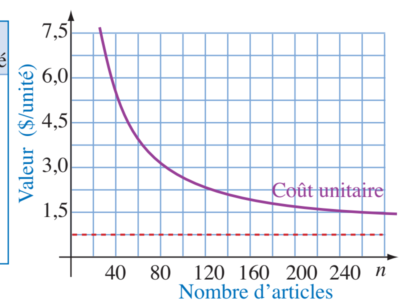


   b) $P(n) = 1{,}05n - 189$



   Interprétation: l'entreprise fonctionne à perte lorsqu'il y a moins de 180 articles vendus.
   c) Le seuil de rentabilité est atteint lorsque $R(n) = C(n)$, ce qui donne: $1{,}80\ n = 0{,}75n + 189$, d'où $n = 180$. C'est l'abscisse du point de rencontre de la fonction revenu et de la fonction coût.
   On peut également le trouver en calculant l'abscisse à l'origine de la fonction profit, ce qui donne: $P(n) = 1{,}05n - 189 = 0$ d'où $n = 180$.
   d) $C_u(n) = 0{,}75 + \dfrac{189}{n}$

n	$C_u(n)$ \$/unité
40	5,48
80	3,11
120	2,33
160	1,93
200	1,70
240	1,54

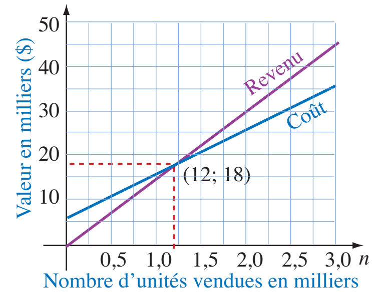


   e) 1,80 \$

2. a) Soit n le nombre d'articles et C le coût de production. Le coût est $C(n) = 2{,}30n + 540$.
   b) $C_u(n) = 2{,}30 + \dfrac{540}{n}$
   c) Le seuil de rentabilité sera de 200 articles si le prix de vente est de 5 \$.
3. a) Soit n le nombre d'articles, R le revenu et C le coût de production. Le revenu est $R(n) = 24{,}80n$ et le coût est $C(n) = 3{,}55n + 850$.
   b) $P(n) = 21{,}25n - 850$
   c) Le seuil de rentabilité est 40, c'est l'abscisse du point de rencontre des fonctions revenu et coût. C'est également l'abscisse à l'origine de la fonction profit.
   d) $C_u(n) = 3{,}55 + \dfrac{850}{n}$
   e) 24,80 \$ f) 21,25 \$/unité
4. a) $C(n) = 25n + 3\,600$ b) 73 \$
   c) $P(n) = 48n - 3\,600$ et $P(200) = 6\,000$ \$
5. $C(n) = 400n + 12\,000$, $R(n) = 600n$,
   $P(n) = 200n - 12\,000$.

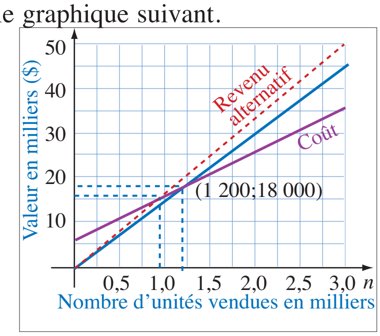
Le seuil de rentabilité est de 60 unités. Puisque le seuil est plus bas que le volume de ventes potentiel, on peut recommander de produire cet article. Le profit escompté est alors de 8 000 $.

6. a) Soit n le nombre d'articles, R le revenu et C le coût de production. Le revenu est $R(n) = 19{,}50n$ et le coût est $C(n) = 12{,}50n + 2\,400$.
   b) $P(n) = 7n - 2\,400$
   Si la compagnie ne réussit pas à vendre au moins 343 chaises par mois, la production sera déficitaire. Cependant, ce nombre peut représenter une moyenne annuelle de 4 116, dans le cas des chaises de parterre par exemple.
   c) Les calculs pour trouver le seuil de rentabilité donnent 342,86 mais comme il est difficile de vendre une fraction de chaise, on acceptera 343 chaises comme seuil. C'est l'abscisse du point de rencontre des fonctions revenu et coût. C'est également l'abscisse à l'origine de la fonction profit.
   d) $C_u(n) = 12{,}50 + \dfrac{2\,400}{n}$
   e) Environ 19,50 $
7. a) Soit n le nombre de repas, R le revenu et C le coût de production. Le revenu est $R(n) = 5{,}50n$ et le coût est $C(n) = 3{,}25n + 106$.
   b) $P(n) = 2{,}25n - 106$
   c) Le modèle donne 47,11 repas, le seuil de rentabilité est donc de 48 repas. C'est l'abscisse du point de rencontre des fonctions revenu et coût. C'est également l'abscisse à l'origine de la fonction profit.
   d) $C_u(n) = 3{,}25 + \dfrac{106}{n}$
   e) 5,46 $ f) 2,25 $/unité
   g) 479 $
8. a) Soit n le nombre de cornets, R le revenu et C le coût de production. Le revenu est $R(n) = 0{,}90n$ et le coût est $C(n) = 0{,}30n + 95$.
   b) $P(n) = 0{,}60n - 95$
   c) Le modèle donne 158,33, le seuil de rentabilité est donc de 159 cornets. C'est l'abscisse du point de rencontre des fonctions revenu et coût. C'est également l'abscisse à l'origine de la fonction profit.
   d) $C_u(n) = 0{,}30 + \dfrac{95}{n}$ e) Environ 0,90 $
   f) 0,60 $/unité g) 116,20 $
9. Soit n le nombre d'unités, R le revenu et C le coût de fabrication. Le revenu est $R(n) = 15n$ et le coût de fabrication est $C(n) = 10n + 6\,000$. Le seuil de rentabilité est 1 200 unités et le revenu au seuil de rentabilité est 18 000 $ (profit nul).



PREMIÈRE OPTION: augmenter le prix de vente.

Si le prix de vente est porté à 16,50 $, on aura un seuil de rentabilité de 924 unités pour un revenu de 15 246 $. L'alternative est représentée en pointillés dans le graphique suivant.



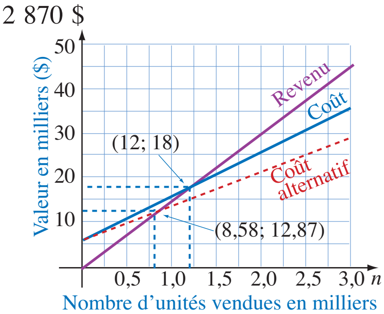
Taux de réduction de 23 % du seuil de rentabilité. Cependant, cette option peut faire perdre des clients.

En supposant qu'il n'y ait pas de perte de clients, le revenu annuel serait porté à 49 500 $ au lieu de 45 000 $. Soit un accroissement du revenu de 4 500 $. Soit un taux d'accroissement du revenu de 10 %.

Le coût de fabrication des 3 000 unités serait toujours de 36 000 $. Le profit est actuellement de 9 000 $ et il serait porté à 13 500 $ pour un accroissement de 4 500 $ qui, exprimé en taux, donne un accroissement de 50 % du profit.

DEUXIÈME OPTION: utiliser des matériaux de moindre qualité.

$C(n) = 8n + 6\,000$, seuil de 858 unités, revenu au seuil de 12 870 $

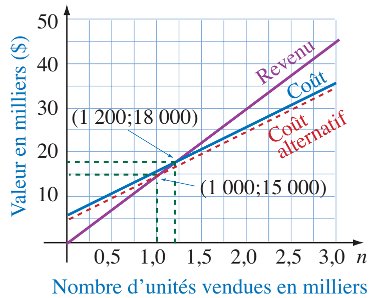


Réduction de 28,5 % du seuil de rentabilité. Cependant, cette option peut faire perdre des clients insatisfaits de la qualité et peut entraîner des coûts de garantie supplémentaires.

En supposant qu'il n'y ait pas de perte de clients ni de coûts d'entretien supplémentaires, on aurait une réduction du coût de 16,7 % et une augmentation du profit de 66,7 %.

TROISIÈME OPTION: réduction des frais fixes

$C(n) = 10n + 5\,000$, seuil de rentabilité à 1 000 unités et le revenu au seuil de rentabilité de 15 000 $



Si le seuil de rentabilité passait de 1 200 unités à 1 000 unités, on aurait une réduction de 16,7 % du seuil de rentabilité. Cependant, une nouvelle machine peut signifier un recyclage ou une réduction de la main-d'œuvre, le syndicat doit être consulté.

Une réduction du coût de 2,8 % et une augmentation du profit de 11,1 %.

10. a) Les frais fixes sont de 3 120 $ et les frais variables sont de 36 $.
    b) 130 articles

11. Soit n le nombre d'unités, R le revenu et C le coût de fabrication. Le revenu est $R(n) = 19n$ et le coût de fabrication est $C(n) = 11n + 8\,000$. Le seuil de rentabilité est de 1 000 unités. Le revenu au seuil est de 19 000 $.

PREMIÈRE OPTION: augmenter le prix de vente.

Il faudrait augmenter le prix de vente à 22,43 $ pour que le seuil de rentabilité diminue de 30 %. Cela représente une augmentation de 18,1 % du prix de vente. Il y a risque de perdre des clients.

DEUXIÈME OPTION: diminuer la qualité des matériaux de base (frais variables).

Il faudrait réussir à diminuer les frais variables à 7,57 $ pour que le seuil de rentabilité diminue de 30 %. Cela représente une diminution de 31,2 % des frais variables, il y a un risque de diminuer la qualité du produit fini et de perdre des clients. Il est possible que les frais de garantie (service après vente) soient augmentés ce qui va diminuer l'effet de la réduction du seuil de rentabilité.

TROISIÈME OPTION: diminuer les frais fixes (coûts d'opération).

Il faudrait réussir à diminuer les frais fixes à 5 600 $ pour que le seuil de rentabilité diminue de 30 %. Les frais fixes sont difficilement compressibles, à moins d'implanter un nouveau procédé plus automatisé, ce qui implique des investissements.

Si le prix de vente est augmenté de 1 $, le revenu est $R(n) = 20n$ et le coût de fabrication est $C(n) = 11n + 8\,000$.

Le seuil de rentabilité est de 889 unités et le revenu au seuil est de 17 780 $. On peut envisager de réduire les frais variables ou les frais fixes. On a donc deux autres options.

QUATRIÈME OPTION: augmenter le prix de vente de 1 $ et diminuer les frais variables.

En fixant le prix de vente à 20 $, il faudrait réussir à diminuer les frais variables à 8,57$ pour que le seuil de rentabilité diminue de 30 %. Cela représente une diminution de 22,1% des frais variables, ce qui amoindrirait l'impact sur la qualité du produit fini.

CINQUIÈME OPTION: augmenter le prix de vente de 1 $ et diminuer les frais fixes.

Il faudrait réussir à diminuer les frais fixes à 6 300 $ pour que le seuil de rentabilité diminue de 30 %. Cela représente une diminution de 21,25 %.

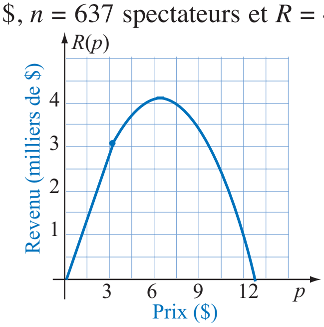
Exercices 5.2

1. Soit p le prix du billet, n le nombre de spectateurs et $R(p)$ le revenu en fonction du prix du billet. On a alors

$$n = \begin{cases} 900 & \text{si } 0 \le p \le 3{,}75 \\ 1\,275 - 100p & \text{si } 3{,}75 < p < 12{,}75 \end{cases}$$

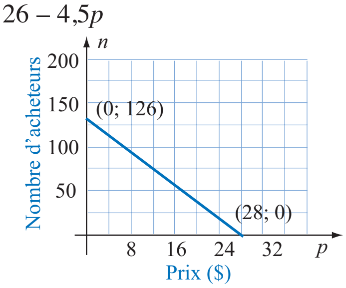
$$R(p) = \begin{cases} 900\,p & \text{si } 0 \le p \le 3{,}75 \\ 1\,275\text{p} - 100p^2 & \text{si } 3{,}75 < p < 12{,}75 \end{cases}$$

$p = 6{,}38$ $, $n = 637$ spectateurs et $R = 4\,064{,}06$ $



2. a) $p = 12$ et $p = 50$, prix minimal 12 $ l'unité.
   b) Le prix maximal que l'on peut fixer pour que la production soit rentable est de 50 $.
   c) Le profit est maximal lorsque $p = 31$ $. Le profit est alors $P(31) = 2\,166$ $.

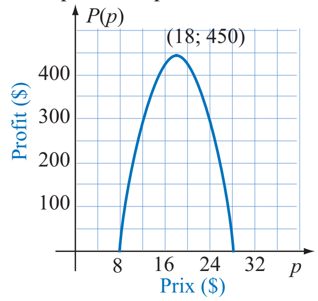
3. a) $n = 126 - 4{,}5p$



$R(p) = 126p - 4{,}5p^2$, $C(n) = 8n$

$C(p) = 1\,008 - 36p$

$P(p) = -4{,}5p^2 + 162p - 1\,008$



b) Les seuils de rentabilité sont 8 $ et 28 $.

d) $p = -b/2a = 18$ \$, $P(18) = 450$ \$

4. a) $n = -1{,}5p + 56$, $R(p) = -1{,}5p^2 + 56p$

$C(n) = 8n + 256$, $P(p) = -1{,}5p^2 + 68p - 704$

Prix aux seuils : $p = 16$ \$ et $p = 29{,}33$ \$. Le profit sera maximal si le prix est de 22,67 $; ce profit est alors de 66,67 $.

Étant donné qu'il est possible de réaliser un profit, on pourrait décider de produire l'article et le vendre 22,67 $.

b) Si les coûts fixes étaient de 356 $, la fonction profit serait $P(p) = -1{,}5p^2 + 68p - 804$. Dans cette éventualité, on aurait

$$b^2 - 4ac = 4\,624 - 4\,824 < 0.$$

La fonction profit n'ayant pas de zéro et étant concave vers le bas, la production ne serait jamais rentable, peu importe le prix fixé. On déciderait donc de ne pas produire l'article.

5. a) $n = -1\,600p + 7\,000$

b) $C(n) = 0{,}9n + 2\,800$

$C(p) = -1\,440p + 9\,100$

c) $R(p) = -1\,600p^2 + 7\,000p$

$p = -b/2a = 2{,}19$ \$, 3 496 unités et

$R(3\,496) = 7\,656{,}24$ \$

d) 1,51 $ et 3,76 $ pour 4 584 et 984 effigies

e) $P(p) = -1\,600p^2 + 8\,440p - 9\,100$

f) Le profit sera maximal si le prix est de 2,64 $. Ce profit est alors de 2 030,24 $.

6. a) $n = 1\,250 - 25p$

$R(p) = -25p^2 + 1\,250p$

$p = -b/2a = 25$ \$, 625 unités et $R(25) = 15\,625$ \$

$C(n) = 8n + 2\,155$

$C(p) = -200p + 12\,155$

b) $P(p) = -25p^2 + 1\,450p - 12\,155$

Le profit sera maximal si le prix est de 29 $; ce profit est alors de 8 870 $ et le volume des ventes est de 525 unités.

Les prix aux seuils de rentabilité sont 10,16 $ et 47,84 $.

7. a) L'équation de la droite passant par les points (1,50;26 000) et (2,50; 14 000) est

$n = -12\,000p + 44\,000$

b) $C(n) = 0{,}60n + 4\,000$

$C(p) = -7\,200p + 30\,400$

c) $R(p) = -12\,000p^2 + 44\,000p$

$p = -b/2a = 1{,}83$ \$, 22 040 unités et

$R(1{,}83) = 40\,333{,}20$ \$

d) Les prix aux seuils sont 0,71 $ et 3,55 $, les volumes des ventes respectifs sont 35 480 unités et 1 400 unités.

e) $P(p) = -12\,000p^2 + 51\,200p - 30\,400$

f) $p = 2{,}13$ \$ et profit de 24 213,20 $

8. a) Dans cette situation, la relation entre le prix et la demande doit être déterminée à partir d'un tableau de valeurs. On cherche donc une droite de régression, ce qui donne

$n = -244p + 2\,436$, $R(p) = -244p^2 + 2\,436p$

$p = -b/2a = 4{,}99$\$, 1 218 spectateurs (si la salle est assez grande) et $R(4{,}99) = 6\,080{,}02$ \$

b) $C(n) = 0{,}50n + 50$

$C(p) = -122p + 1\,268$

$P(p) = -244p^2 + 2\,558p - 1\,268$

Le profit sera maximal si le prix est de 5,24 $, ce profit est alors de 5 436,27 $.

9. $q = -10p + 737$.

a) $R(p) = -10p^2 + 737p$.

b) $p = -b/2a = 36{,}85$ \$, 369 unité, $R = 13\,579{,}23$ \$.

c) $C(q) = 8q + 2\,550$,

$C(p) = -80p + 8\,446$.

$P(p) = -10p^2 + 817p - 8\,446$.

d) Maximal à 40,85 $; profit d'environ 8 200 $.

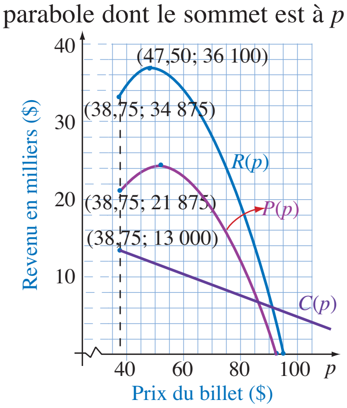
e) Seuils de rentabilité : 12,14 $ et 69,56 $.

10. a) $C(q) = 10q + 4\,000$.

$C(p) = 10(-16p + 1\,520) + 4\,000$

$= -160p + 19\,200$ \$

Le graphique du profit en fonction du prix du billet est une parabole dont le sommet est à $p = 52{,}50$ \$



Le propriétaire fait un profit dans l'intervalle de 38,75 $ à 91,95 $.

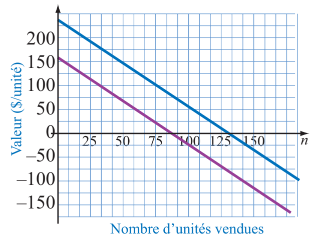
Le profit atteint sa valeur maximale à $p = -b/2a$, soit 52,50 \$. À ce prix, il y a 680 spectateurs, pour un revenu de 35 700 \$, un coût de production de 10 800 \$ et un profit de 24 900 \$.

Exercices 5.4

1. $S(x) = 12x - 2x^2$, maximale à $x = 3$ m.
   On a alors $y = 6$ m et $S(3) = 18$ m^2.
2. a) $4x + 2y = 2\,400$, d'où $y = 1\,200 - 2x$
   b) $A(x) = xy = 1\,200x - 2x^2$
   c) $x = -b/2a = 1\,200/4 = 300$ m et $y = 600$ m
   Les enclos mesurent 300 m sur 200 m.
3. a) L'aire de la section est fonction de la largeur x. Cette fonction est
   $C(x) = x\,(27 - 2x) = 27x - 2x^2$
   b) En prenant $x = -b/2a$, on trouve $x = 6{,}75$ cm.
4. a) L'aire du parc est 38 400 m^2. L'aire des bandes de terrain est donnée par
   $$x^2 + 240x + 160x = x^2 + 400x.$$
   L'aire du terrain après l'agrandissement sera
   $$A(x) = x^2 + 400x + 38\,400.$$
   b) Si les bandes ajoutées sont de 20 m, l'aire sera
   $$A(20) = 46\,800 \text{ m}^2.$$
   c) Pour doubler la superficie, il faut que
   $$A(x) = x^2 + 400x + 38\,400 = 76\,800,$$
   d'où $x^2 + 400x - 38\,400 = 0$.
   Les racines sont $x = 80$ et $x = -480$; la racine négative est à rejeter et les bandes de terrain doivent avoir 80 m de largeur.
5. a) L'aire actuelle est de 480 m^2. L'aire des nouvelles parties est donnée par
   $$2x^2 + 60x + 16x = 2x^2 + 76x.$$
   Après l'agrandissement, l'aire sera de
   $$A(x) = 2x^2 + 76x + 480.$$
   b) $A(5) = 910$ m^2, $A(8) = 1\,216$ m^2
   c) Pour tripler la superficie, on doit avoir
   $A(x) = 2x^2 + 76x + 480 = 1\,440$.
   Les racines sont $x = 10$ et $x = -48$; la racine négative est à rejeter et les nouvelles parties doivent avoir 10 m de largeur pour l'agrandissement en arrière et 20 m pour le côté.
6. b) À $t = 3{,}57$s, $h\,(3{,}57) = 62{,}5$ m
7. 5 m

Exercices récapitulatifs

1. a) $P(n) = R(n) - C(n) = 45n - 15\,750$
   b) L'abscisse à l'origine de la fonction est le seuil de rentabilité de la production.
   c) $P(n) = 50n - 25\,500$
   d) 1 950 unités
   e) Changer le processus si les ventes mensuelles sont supérieures à 1 950 unités, sinon ne rien changer.
2. a) $R(n) = 24{,}80n$ et le coût est $C(n) = 3{,}55n + 850$.
   b) $P(n) = 21{,}25n - 850$
   c) Le seuil de rentabilité est 40.
   d) $C_u(n) = 3{,}55 + 850/n$ e) 24,80 \$
3 a) $R(p) = -520p^2 + 53\,600p$.
   b) $p = -b/2a = 51{,}54$ \$, 26 799 unités, revenu 1 381 230 \$.
   c) $C(q) = 32q + 42\,000$
   $C(p) = -16\,640p + 1\,757\,200$
   $P(p) = -520p^2 + 70\,240p - 1\,757\,200$
   c) Profit maximal de 614 750 \$ au prix de 67,54 \$
   Seuils de rentabilité : 33,16 \$ et 101,92 \$
4. $R(p) = -10p^2 + 680p$.
   $p = -b/2a = 34$ \$, 340 unités et $R(34) = 11\,560$ \$.
   $P(p) = -10p^2 + 860p - 20\,240$, maximal à 43 \$; ce profit est alors de $-1\,750$ \$.
   Cette production ne peut être rentable. Il ne faut pas fabriquer ce produit.
5. a) La quantité à l'équilibre est de 16 000 unités.
   Le prix à l'équilibre est de 10,24\$.
   b) Pour écouler les 6 000 unités en trois mois, il doit fixer son prix de façon à en écouler 2 000 de plus par mois. Il doit donc en vendre 18 000 unités par mois. Le prix à fixer est $p = D^{-1}(18) = 9{,}16$ \$.
6. $q = -16\,400p + 60\,000$.
   a) Le revenu est donné par :
   $R(p) = -16\,400p^2 + 60\,000p$.
   b) Le revenu maximum est obtenu lorsque :
   $p = -b/2a = 1{,}83$ \$, le volume des ventes est alors de 29 988 unités. On arrondit à 30 000 unités, c'est une prévision.
   $R(1{,}83) = 54\,878{,}04$ \$, soit environ 55 000 \$. Encore ici, ce que l'on obtient c'est l'ordre de grandeur.
   c) Le coût de production est :
   $C(q) = 0{,}64q + 5\,000$,
   $C(p) = -10\,496p + 43\,400$.
   Le profit est :
   $P(p) = -16\,400p^2 + 70\,496p - 43\,400$.
   d) Le profit sera maximum si le prix est de 2,15 \$; ce profit est alors de 32 357 \$ que l'on arrondit à 32 000 \$ Le volume des ventes est alors de 24 740 unités par le modèle, on acceptera 25 000 comme prévision.
   e) Les seuils de rentabilité sont 0,74 \$ et 3,55 \$.
7. Le revenu marginal de ces articles est
   $R_{mA}(n) = 161 - 2n$ et $R_{mB}(n) = 241 - 2n$. Graphiquement, on a:



Le revenu atteint sa valeur maximale lorsque le revenu marginal s'annule. Soit à 81 unités pour le produit A et 121 unités pour le produit B. Le revenu est représenté par l'aire sous la courbe du revenu marginal. Il s'agit de l'aire d'un triangle.

Pour le produit A, la hauteur du triangle est $R_{mA}(0)$ = 161 \$/unité et la base est la longueur de l'intervalle de l'origine au zéro de la fonction, soit 81 unités. L'estimation du revenu est donc

$$R=\frac{161\times 81}{2}=6\ 520,50\ \$.$$

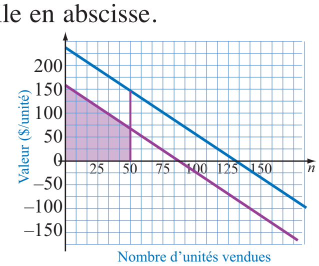
Pour le produit B, la hauteur du triangle est 241 \$/unité et la base est 121 unités. L'estimation du revenu est donc

$$R=\frac{241\times 121}{2}=14\ 580,50\ \$.$$

Le revenu réalisé par la vente de 50 unités est donné par l'aire sous la courbe dans l'intervalle [0;50]. Il s'agit de l'aire d'un trapèze qui est donnée par

$$R=\frac{h_1+h_2}{2}\times b.$$

où h_1 et h_2 sont les hauteurs à la frontière gauche et à la frontière droite de l'intervalle [0;50] et b est la longueur de l'intervalle en abscisse.

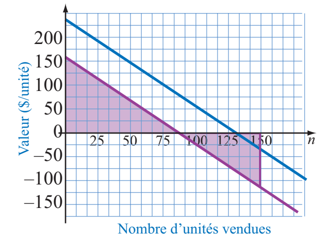


Pour le produit A, on a $h_1 = R_{mA}(0)$ = 161 \$/unité et $h_2 = R_{mA}(50)$ = 61 \$/unité et la base est 50 unités. L'estimation du revenu est donc:

$$R=\frac{161+61}{2}\times 50=5\ 500\ \$.$$

Pour le produit B, $R=\dfrac{241+141}{2}\times 50=9\ 550\ \$.$

Lorsque l'abscisse du revenu maximal est dépassée, le revenu marginal est négatif. Le revenu total diminue pour chaque unité supplémentaire. Pour estimer le revenu réalisé par la vente de 150 unités, il faut faire la différence des aires des triangles à gauche et à droite du zéro de la fonction revenu marginal.



Pour le produit A, l'aire à gauche du zéro est 6 520,50 \$. L'aire à droite est celle d'un triangle de base b = 150 – 81 = 69 unités et la hauteur est $R_{mA}(150)$ = – 139 \$/unité. On a donc

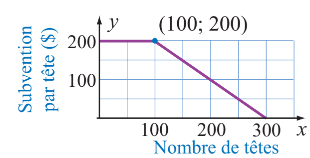
$$R=\frac{-139\times 69}{2}=-4\ 795,50\ \$.$$

Le revenu est alors 6 520,50 \$ – 4 795,50 = 1 725 \$.

Pour le produit B, on trouve 13 725 \$.

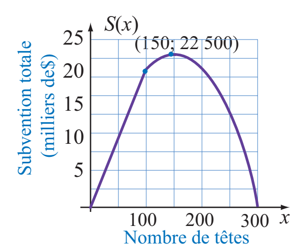
8. Soit x le nombre de bovins, y le montant par tête de bétail et S la subvention totale.

$$y=\begin{cases}200 & \text{si } 0\le x\le 100\\ 300-x & \text{si } 100<x\le 300\\ 0 & \text{si } x>300\end{cases}$$



$$S(x)=\begin{cases}200x & \text{si } 0\le x\le 100\\ 300x-x^2 & \text{si } 100<x\le 300\\ 0 & \text{si } x>300\end{cases}$$

$x = -\,b/2a = -\,300/-\,2 = 150$ têtes, d'où y = 150 \$ et S = 22 500 \$

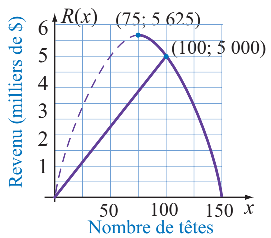


Soit $P(x)$, le profit, on a $P(x) = S(x) - C(x)$

$$R(x)=\begin{cases}50x & \text{si } 0\le x\le 100\\ 150x-x^2 & \text{si } 100<x\le 300\\ -150x & \text{si } x>300\end{cases}$$

$x = -\,b/2a = -\,150/-\,2 = 75$ têtes,

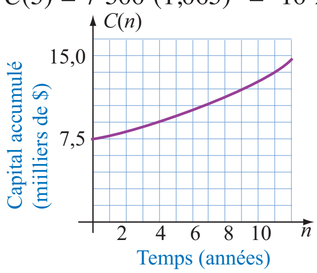
Le domaine de validité du modèle quadratique est l'intervalle]100;150], par conséquent ce résultat n'est pas valide. C'est donc le modèle linéaire qui s'applique et le profit est maximum lorsque le troupeau comprend 100 têtes, le revenu est alors de 5 000 \$ et la subvention est de 20 000 \$.



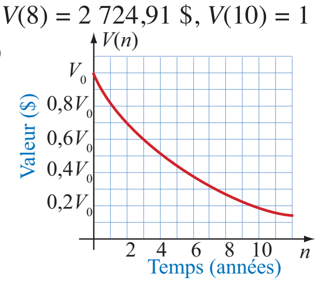
Exercices 6.2

1. a) Après 1 an, on a $C(1) = 7\ 500\ (1{,}065)^1$
   Après 2 ans, on a $C(2) = 7\ 500\ (1{,}065)^2$
   ....
   Après n années, on a $C(n) = 7\ 500\ (1{,}065)^n$
   Le capital après 5 ans est
   $C(5) = 7\ 500\ (1{,}065)^5 = 10\ 275{,}65$ \$

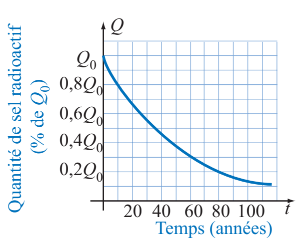
   b)



2. a) Après 1 an, on a $V(1) = V_0\ (0{,}85)^1$
   Après 2 ans, on a $V(2) = V_0\ (0{,}85)^2$
   ....
   Après n années, on a $V(n) = V_0\ (0{,}85)^n$
   c) $V(n) = 10\ 000\ (0{,}85)^n$
   $V(8) = 2\ 724{,}91$ \$, $V(10) = 1\ 968{,}74$ \$
   b)

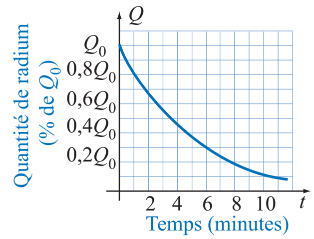


3. a) $V(n) = 300\ 000\ (0{,}983)^n$
   c) $V(24) = 300\ 000\ (0{,}983)^{24} = 198\ 795$ \$
   $V(36) = 300\ 000\ (0{,}983)^{36} = 161\ 826$ \$
   $V(60) = 107\ 234$ \$
4. a) $Q(t) = Q_0(49/50)^t$

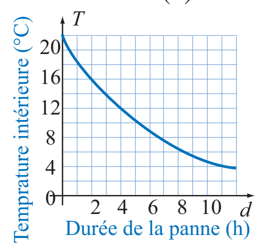


   b) 90,39 unités, 81,71 unités
5. a) $Q(t) = Q_0(0{,}8)^t$

   b)



6. a) Soit d la durée de la panne et t la température intérieure. Les rapports des valeurs consécutives de la variable dépendante sont relativement constants, on peut conclure à une situation modélisable par une exponentielle.
   La moyenne des rapports donnant 0,86, on peut donc décrire la situation par le modèle suivant:
   $$t(d) = 22 \times 0{,}86^d.$$
   b)



   c) –14%   d) 4,9 °C
7. a) $r = 10{,}17$ %
   b) $C(n) = 35\ 000\ (1{,}1017)^n$ et $C(17) = 181\ 612$ \$
8. a) $P(n) = 27 \times 1{,}09^n$ où n est le nombre de périodes de quatre années.
   b) En exprimant la population en fonction du temps t en années, on a
   $$P(t) = 27 \times 1{,}0218^t,$$
   car $\sqrt[4]{1{,}09} = 1{,}2018$.
   c) La comparaison des valeurs donne le tableau ci-dessous.

Population en milliers d'individus		
Année	Statistiques	Modèle
1992	27	27,00
1996	29	29,43
2000	32	32,08
2004	35	34,97

   d) $P(28) = 49{,}39$. La population sera donc de 49 390 habitants.

Exercices 6.4

1. $x = 6$
2. $x = 3$
3. $x = -5$
4. $x = -4$
5. $\log_b(1/x) = 1/4$ d'où $(1/x) = b^{1/4}$ et $x = b^{-1/4}$, d'où $\log_b x = -1/4$
6. $x = a - b^c$
7. $N = 2^3 = 8$
8. $N = 3^{-1} = 1/3$
9. $N = 5^{-2} = 1/25$
10. $x = 1/2$
11. $x = -1$

12. $N = 6^0 = 1$
13. $N = 8$
14. $N = 1/2$
15. $b = 2^4 = 16$
16. $b = 2^2 = 4$
17. $b = 3^2 = 9$
18. $b = 3$
19. $b = 8$
20. $b = 2$
21. $N = b$
22. $N = 2^2 = 4$
23. a) 5 b) 2 c) 5 d) –5 e) 1/3 f) 3/2 g) 4 h) 1/2
24. a) Puisque log 3 = 0,477..., on a $3 = 10^{0,477...}$
    b) $54,5 = 10^{1,736...}$
    c) $0,22 = 10^{-0,657...}$
    d) $1,2 = 10^{0,079...}$
    e) $3,7 = 10^{0,568...}$
    f) $0,37 = 10^{-0,431...}$
    g) $8,32 = 10^{0,920...}$
    h) $81,34 = 10^{1,910...}$
25. a) $10^x = 8$ d'où $x = \log 8 = 0,903...$
    b) –0,187... c) 31,62... d) 0,537... e) –0,077... f) 316,227... g) –0,903... h) 0,4659...
26. a) $3 = e^{1,0986...}$
    b) $27,23 = e^{3,3043...}$
    c) $0,78 = e^{-0,248546...}$
    d) $1,09 = e^{0,08617...}$
    e) $3,7 = e^{1,3083...}$
    f) $0,41 = e^{-0,89159...}$
    g) $8,32 = e^{2,1186...}$
    h) $0,9 = e^{-0,1053...}$
27. a) 1,94591... b) –0,43078... c) 4,481689... d) 0,763379... e) –0,178337... f) 4,481689... g) –0,6931447... h) 0,981479...
28. a) 2,2297... b) 2,191... c) 6,6438... d) 9,218... e) 3,6878... f) –1,7268...
29. a) 0,2696... b) 0,2661...
30. $\log_b x^2 = 2 \log_b x = 2 \times 6 = 12$
31. $\log_b x = 6$
32. $\log_b x^2 = 8$
33. a) $x = 13$ b) $x = 12$ c) $x = 3$ d) $x = 23$ e) $x = 5$ ou $x = -2$
34. La population aura doublé en quatorze ans.
35. La valeur sera la moitié de la valeur d'achat après trois ans. On trouve également 4,92, 6,21 et 7,21. Elle sera le tiers après cinq ans, le quart après six ans et le cinquième après sept ans.
36. a) 14 ans, 34 ans, 69 ans
    b) 34 ans
37. $n = 8,50$, le capital aura donc doublé après neuf ans puisque l'intérêt est payé annuellement.
38. 3 minutes 6 secondes
39. $x = 49/32$
40. $\log_a x^3 - \log_a x = 3 \log_a x - \log_a x = 2 \log_a x$
41. $\log_a x^3 - \log_a 2x = 2 \log_a x - \log_a 2$
42. $\log_a (x^2 - 1) - \log_a (x + 1) = \log_a (x - 1)$
43. $2 + 2,5 \log_a x$
44. a) 4 b) 5/2 c) 8 d) 2 e) 12/5 f) 2/3 g) 4
45. a) Puisque $N = e^a$ si et seulement si $\ln N = a$, en substituant l'un dans l'autre, on obtient
    $$\ln e^a = a$$
    b) Même raison qu'en 45 a)
    c) Soit $N = e^n$ d'où $\ln N = n$, et $M = e^m$ d'où $\ln M = m$, alors $MN = e^n e^m = e^{n+m}$ d'où
    $\ln MN = n + m = \ln M + \ln N$
    d) Soit $N = e^n$ d'où $\ln N = n$, et $M = e^m$ d'où $\ln M = m$, alors $M/N = e^n/e^m = e^{n-m}$ d'où
    $\ln M/N = n - m = \ln M - \ln N$
    e) Soit $M = e^m$ d'où $\ln M = m$, alors
    $M^p = (e^m)^p = e^{mp} = e^{pm}$ d'où
    $\ln M^p = pm = p \ln M$
    f) Soit $M = b^a$ d'où $\log_b M = a$, et $b = e^c$ où $\ln b = c$. De plus, $M = b^a = e^{ca}$ d'où
    $\ln M = ca = \ln b \times \log_b M$ et $\log_b M = \ln M / \ln b$.

Exercices récapitulatifs

1. La réponse n'est pas plausible parce que $2^6 = 64$ et on cherche x tel que $2^x = 12$. Il faut effectuer le calcul
   (log 12)/ log 2, ce qui donne 3,58...
2. La réponse n'est pas plausible parce que
   $$\log 20 + \log 80 = 3,204... \neq 2.$$
   Il faut utiliser les propriétés des logarithmes pour simplifier, ce qui donne
   $$\log x + \log 4x = \log 4x^2 = 2 \text{ et } 4x^2 = 10^2,$$
   d'où $x^2 = 25$ et $x = \pm 5$. La valeur -5 est à rejeter.
3. La réponse n'est pas plausible car
   $$\log 6 = 0,778... \neq 3 \log 2 = 0,903....$$
   On ne peut pas simplifier les logarithmes. En effet, log x n'est pas le produit de « log » par « x » mais la fonction « log » de x. On a
   $$\log x = 3 \log 2$$
   $$\log x = \log 2^3 = \log 8$$
   $$x = 8.$$
4. La réponse n'est pas plausible car
   $\log 12 - \log 2 = 0,778... \neq 1.$
   Il faut regrouper en utilisant les propriétés des logarithmes, ce qui donne
   $$\log x - \log 2 = 1$$
   $$\log(x/2) = 1$$
   $$\frac{x}{2} = 10^1.$$
   $$x = 20$$

5. On utilise un modèle exponentiel pour décrire le lien entre deux variables lorsque le rapport des images consécutives, pour des valeurs à pas constant de la variable indépendante, est constant.
6. a) $f(t+1) - f(t) = 0{,}2\,f(t)$, d'où
 $f(t+1) = f(t) + 0{,}2\,f(t) = f(t)\,(1 + 0{,}2) = 1{,}2\,f(t)$.
 b) $f(0) = 5$ d'où $f(1) = 5 \times 1{,}2$,
 $f(2) = 1{,}2 \times f(1) = 5 \times 1{,}2^2$
 $f(3) = 1{,}2 \times f(2) = 5 \times 1{,}2^3$
 $f(4) = 1{,}2 \times f(3) = 5 \times 1{,}2^4$
 ....
 $f(t) = 1{,}2 \times f(t-1) = 5 \times 1{,}2^t$
7. a) $f(t+1) - f(t) = -\,0{,}2\,f(t)$, d'où
 $f(t+1) = f(t) - 0{,}2\,f(t) = f(t)\,(1 - 0{,}2) = 0{,}8\,f(t)$
 b) $f(0) = 10$ d'où $f(1) = 10 \times 0{,}8$
 $f(2) = 0{,}8 \times f(1) = 10 \times 0{,}8^2$
 $f(3) = 0{,}8 \times f(2) = 10 \times 0{,}8^3$
 $f(4) = 0{,}8 \times f(3) = 10 \times 0{,}8^4$
 ....
 $f(t) = 0{,}8 \times f(t-1) = 10 \times 0{,}8^t$
8. a) $f(t+1) - f(t) = k\,f(t)$,
 d'où $f(t+1) = f(t) + k\,f(t) = (1+k)f(t)$
 b) $f(0) = a$ d'où $f(1) = a\,(1+k)$
 $f(2) = (1+k) \times a\,(1+k) = a\,(1+k)^2$
 $f(3) = (1+k) \times a\,(1+k)^2 = a\,(1+k)^3$
 $f(4) = (1+k) \times a\,(1+k)^3 = a\,(1+k)^4$
 ....
 $f(t) = a\,(1+k)^t$
9. a) $f(t+1) - f(t) = -\,k\,f(t)$,
 d'où $f(t+1) = f(t) - k\,f(t) = (1-k)f(t)$
 b) $f(0) = a$ d'où $f(1) = a\,(1-k)$
 $f(2) = (1-k) \times a\,(1-k) = a\,(1-k)^2$
 $f(3) = (1-k) \times a\,(1-k)^2 = a\,(1-k)^3$
 ....
 $f(t) = a\,(1-k)^t$
10. a) La première personne expédie la lettre à 20 personnes et chacune de ces personnes l'achemine à 20 autres personnes. Le nombre de personnes qui ont reçu la lettre à la deuxième génération est 20^2. À la troisième génération, on en a 20^3, à la quatrième, 20^4, à la cinquième, 20^5, soit 3 200 000 personnes, ce qui représente la moitié de la population québécoise, en comptant les femmes, les hommes et les enfants peu importe leur âge. À la dixième génération, la lettre aura été reçue par:
 10 240 000 000 000 personnes.
 b) Parce qu'il n'y a pas suffisamment de personnes sur Terre et que les martiens ne sont pas intéressés par l'argent.
11. a) $V(n) = 123\,000 \times 0{,}83^n$.
 b) Environ 33 400 $.

Exercices 7.2

1. a) $C(n) = C_0(1+i)^n$ où n est le nombre d'années.
 $C(6) = 8\,000\,(1{,}09)^6 = 13\,416{,}80$ $
2. a) $C(n) = C_0(1+i)^n$ où n est le nombre de trimestres
 b) On cherche n tel que $5\,000\,(1{,}012)^n = 10\,000$ d'où $(1{,}012)^n = 2$ et $n\,\ln(1{,}012) = \ln 2$, ce qui donne $n = 58{,}1$, soit 59 trimestres, en arrondissant par excès, ou 14 ans et 3 trimestres (14 ans et 9 mois).
 c) $C(40) = 5\,000\,(1{,}012)^{40} = 8\,057{,}32$ $
3. $C(n) = 10\,000\,(1{,}12)^n$ où n est le nombre d'années.
 $C(10) = 10\,000\,(1{,}12)^{10} = 31\,058{,}48$ $
4. Le taux mensuel étant $0{,}06/12 = 0{,}005$, le modèle est donc: $C(n) = 6\,000\,(1{,}005)^n$ où n est le nombre de mois.
 $C(60) = 6\,000\,(1{,}005)^{60} = 8\,093{,}10$ $.
5. $C_0 = C\,(1+i)^{-n}$ où n est le nombre de mois.
 $C_0 = 3\,406{,}93$ $
6. a) 13 060,77 $
 b) Le remboursement serait de 14 700,52 $
 Il serait donc préférable d'emprunter la somme de 12 000 $ à 7 % et de rembourser en un seul versement dans trois ans.
 REMARQUE: il existe une autre possibilité encore plus avantageuse, qui est de rembourser par des paiements périodiques, nous l'étudierons au chapitre 8.
7. Pour l'enfant de 9 ans, 5 215,83 $
 Pour celui de 6 ans, 4 198,54 $
 Pour celui de 3 ans, 3 379,66 $
8. 8,32 %
9. 7,18 %, 10,41 %,14,87 %
10. 87 mois, soit dans 7 ans et 3 mois.
11. Le capital aura doublé dans 47 trimestres, soit dans 11 ans et 3 trimestres (11 ans et 9 mois).
 Le capital aura triplé dans 74 trimestres, soit dans 18 ans et 2 trimestres ou 18 ans et 6 mois.
12. $n = 4{,}7$ et la durée du placement doit être de cinq ans.
13. 0,153894624 = 15,4 %
14. 0,125508810 = 12,6 %
15. 0,082432160 = 8,2 %
16. 0,138643647 = 13,9 %
17. $C(60) = 5\,000(1{,}0075)^{60} = 7\,828{,}41$ $
18. 6 059,90 $

Exercices 7.4

1. Diminution de 15,14 %
2. a) $V(n) = V_0(0{,}85)^n$ b) $n = 4{,}27$ ans
 d) $V(n) = 10\,000(0{,}85)^n$; $V(8) = 2\,724{,}91$ $,
 $V(10) = 1\,968{,}74$ $
3. a) $P(5) = 25\,681$ et $P(10) = 32\,974$
 b) Environ 14 ans.
4. a) $V(t) = V_0(0{,}8)^t = 300\,000\,(0{,}8)^t$
 b) $V(2) = 192\,000$ $, $V(3) = 153\,600$ $,
 $V(5) = 98\,304$ $

c) $t(V) = 4{,}48 \ln(V_0/V) = 4{,}48 \ln(300\,000/V)$

e) $t(V_0/2) = 4{,}48 \ln(2) = 3{,}1$ ans

$t(V_0/3) = 4{,}48 \ln(3) = 4{,}9$ ans

$t(V_0/4) = 4{,}48 \ln(4) = 6{,}2$ ans

$t(V_0/5) = 4{,}48 \ln(5) = 7{,}2$ ans

5. a) $V(n) = 168\,000\,(1{,}08)^n$

b) $T(n) = 2\,100\ (1{,}08)^n$

6. a) $f(5) = 283{,}42$, estimation de 283 unités/mois.

7. a) $V(0) = 150$ unités /mois.

b) $V(1) = 278{,}36$ unités/mois ≈ 278 unités/mois

$V(2) = 381{,}38$ unités/mois ≈ 381 unités/mois

8. a) $V(0) = 200$, $V(1) = 427$ unités/mois,

$V(2) = 589$ unités/mois.

b) La valeur stable est de 1 000 unités/mois.

9. a) $V(0) = 150$ unités/mois.

b) La valeur stable est de 600 unités/mois.

c) $t = 2{,}2$, soit de deux à trois mois ou au cours du troisième mois. Le volume aura triplé au cours du cinquième mois.

10. a) $V(0) = 800$ unités/mois.

b) 691 unités/mois c) 5,5 mois

d) La valeur stable est de 200 unités/mois.

11. a) $V(0) = 800$ unités/mois

b) $V(1) = 518$ unités/mois

c) Deux mois.

d) La valeur stable est de 200 unités/mois.

Exercices récapitulatifs

1. a) $S(n) = S_0(1 + r)^n$, d'où $S(n) = 35\,500(1{,}05)^n$ où n est le nombre d'années depuis 2001.

b) $S(7) = 49\,952{,}06$ \$ et $S(12) = 69\,752{,}90$ \$.

c) En 2004, le salaire était $S(3) = 41\,095{,}69$ \$. Le nouveau modèle est

$S_2(n) = 41\,095{,}69\ (1{,}015)^n$.

En 2008, $S_2(4) = 43\,617{,}47$ \$

En 2013, $S_2(9) = 46\,988{,}40$ \$.

d) Théoriquement, pour maintenir le niveau de vie, il faut que l'augmentation soit de 3,5 % par année, ce qui donne $S_3(n) = 41\,095{,}69\ (1{,}035)^n$,

d'où $S_3(4) = 47\,158{,}25$ \$ et $S_3(9) = 56\,009{,}21$ \$.

2. $t = -\dfrac{1}{20}\ln\left(\dfrac{V}{12}\right)$ 3. $t = -\dfrac{1}{12}\ln\left(\dfrac{20-V}{20}\right)$

4. a) 10,33 %.

b) $V(t) = 345\,000(0{,}8967)^t$

c) $V(7) = 345\,000(0{,}8967)^7 = 160\,823{,}42$ \$

d) 129 313,43 \$

5. a) $n = 3{,}82$. La compagnie doit envisager de revendre après trois ans d'usage.

b) $n = 8{,}59$ ans (8 ans) c) $n = 5{,}54$ ans (5 ans)

d) 2 742,19 \$ e) 127 670,26 \$

f) 46 342,48 \$

6. 35 trimestres, soit 8 ans et 9 mois.

7. 93 mois, soit 7 ans et 9 mois.

8. 9 004,89 \$

9. Capitalisation annuelle, 14 557,73 \$

Capitalisation semestrielle, 14 660,73 \$

Capitalisation trimestrielle, 14 714,47 \$

Capitalisation mensuelle, 14 751,18 \$

Capitalisation hebdomadaire, 14 765,49 \$

C'est la capitalisation hebdomadaire qui est la plus rentable. En effet, les intérêts sont calculés sur un capital qui augmente à chaque semaine.

10. 184 mois, soit 15 ans et 4 mois.

11. a) Environ 2 970 ans b) 0,38

12. a) $t = 5\,776$ ans. On ne peut être aussi précis, disons environ 5 800 ans

b) $t(Q) = -8\,333{,}33 \ln(Q/Q_0)$

c) $t(0{,}3Q_0) - t(0{,}4Q_0) = 2\,397$ ans

Exercices 8.2

1. {8 ;4 ;2 ;1 ;1/2 ;1/4 }
2. {1 ;2 ;4 ;8 ;16 ;32 }
3. {42 ;14 ;14/3 ;14/9 ;14/27 ;14/81 }
4. 255/16
5. 63
6. 5 096/81
7. 17,88...
8.

n	VC_d	Versement (annuité)	Capital total, début de période	Intérêt pour la période	Valeur cumulée, fin de période
1	0,00	800,00	800,00	28,00	828,00
2	828,00	800,00	1 628,00	56,98	1 684,98
3	1 684,98	800,00	2 484,98	86,97	2 571,95
4	2 571,95	800,00	3 371,95	118,02	3 489,97

9.

n	Dette, début de période	Intérêt à payer	Versement (annuité)	Amortissement	Dette, fin de période
1	3 500,00	210,00	711,77	501,77	2 998,23
2	2 998,23	179,89	711,77	531,88	2 466,35
3	2 466,35	147,98	711,77	563,79	1 902,56
4	1 902,56	114,15	711,77	597,62	1 304,94
5	1 304,94	78,30	711,77	633,47	671,47
6	671,47	40,29	711,77	671,48	–0,01
	Totaux	770,61	4 270,62		

10. $VC_d = 17\,231{,}34$ \$, $VA_d = 9\,309{,}56$ \$

Le montant total placé par versements successifs est de 12 000 \$. Dans huit ans, ce placement vaudra 17 231,34 \$. La valeur actuelle est le montant qu'il faudrait placer dès maintenant à 8 % pour obtenir une valeur définitive de 17 231,34 \$ dans huit ans.

11. En deux ans, 94,15 \$, coût de 259,60 \$

En quatre ans, 52,67 \$, coût de 528,16 \$. La durée du prêt est de quatre ans, cependant, le coût en intérêt n'est pas le double à cause des versements réguliers.

12. En trois ans, versements de 188,02, paiement total de 6 768,72 $, coût de 768,72 $.
    En quatre ans, versements de 146,48 $, paiement total de 7 031,04 $, coût de 1 031,04 $.
    En cinq ans, versements de 121,66 $, paiement total de 7 299,60 $, coût de 1 299,60 $.
13. 33 318,17 $, gain de 15 318,17 $
14. 11 697,94 $, gain de 4 497,94 $
15. 3 632,72 $
16. A = 222,44 $, paiement total de 13 346,40 $, coût de 3 346,40 $.
17. A = 162,31$, total des versements de 6 492,40 $, gain de 3 507,60 $.
18. A = 124,10 $, total des versements de 4 467,60 $, gain de 532,40 $.
19. VA_f = 5 576,04 $, A = 124,04 $
20. VA_f = 1 410,15 $, A = 127,28 $
21. Il faut 271 semaines, soit 5 ans et 11 semaines.

Exercices 8.4

1. 0,005
2. 0,003675
3. 0,0004939
4. 0,02267
5. 0,002225
6. 0,02258
7. i = 0,009902, A = 198,95 $, paiement total de 7 162,20 $, coût de 1 162,20 $.
8. i = 0,007363, VC_f = 3 078,78 $, VA_f = 2 364,19 $
9. i = 0,006211, VC_d = 87 611,10 $
10. i = 0,002871, VA_f = 1 797,58 $
11. a) i = 0,01235, VA_f =2 203,21 $.
    Il reste donc 2 203,21 $ à rembourser. Le nouveau taux nominal étant de 9%, on a j/m = 0,0225, ce qui donne
    i = 0,007444 et A = 118,97 $.
    b) A = 192,61 $
12. a) i = 0,007444, A = 358,16 $
    Après un an, vous aurez versé 4 297,92 $.
    b) Dans un an, il restera 228 versements à effectuer, la valeur actuelle sera alors de 39 244,36 $.
    c) Le remboursement de capital de la première année a été de 40 000 – 39 244,36 = 755,64 $ et l'intérêt versé est de 4 297,92 – 755,64 = 3 542,28 $.
    d) Le taux par période est maintenant i = 0,01235 et les versements seron de 516,10 $.
13. i = 0,00625. Les versements sont de 32,35 $, 18,90 $ et 13,46 $.
14. i = 0,01134, VA_f = 4 413,38 $
15. i = 0,007444, VC_d =38 843,18 $, gain de 14 843,18 $.
16. i = 0,01134, A = 169,94 $, coût de 1 117,84 $.
17. i = 0,02225, A = 255,51 $
18. i = 0,02155, VA_f = 60 809,43 $
19. a) i = 0,007363, A = 444,59 $
    b) Après un an, la valeur actuelle sera 49 044,64 $. Le montant remboursé est de 955,36 $.
    c) Paiement total 5 335,08 $, remboursement de 955,36 $, coût en intérêts 4 379,72 $
    d) 106 701,60 $
    e) i = 0,01291, A = 669,09 $
    f) 48 581,98 $, remboursement de 462,66 $
    g) Paiement annuel de 8 029,08 $, coût en intérêts de 7 566, 42 $
    h) 157 887,60 $
20. i = 0,05576. Il reste 6 versements à effectuer et VA_f = 9 967,04 $
21. a) Mensualités de 590,81 $ sur quinze ans, de 540,50 $ sur vingt ans et de 515,96 $ sur ving-cinq ans.
    b) Paiement total de 106 345,80 $ sur quinze ans, de 129 720,00 $ sur vingt ans et de 154 788,00 $ sur vingt-cinq ans.
    c) Coût en intérêts sera de 56 345,80 $ sur quinze ans, de 79 720,00 $ sur 20 ans et de 104 788,00 $ sur vingt-cinq ans.
22. 1 680,97 $; coût de 1 723,88 $.
23. 5 503,19 $
24. 7 598,98 $, gain de 1 598,98 $
25. 109,62 $
26. 4 150,73 $
27. 10 579,16 $
28. 44 833,05 $
29. 1 492,58 $
30. a) 8,4 %
    b) 8,58 %
    c) 8,67 %
    d) 8,73 %
    e) 8,75 %
    f) 8,76 %
31. 861,71 $
32. 82 versements mensuels
33. 85 versements
34. 506 895,08 $
35. 16 578,88 $, gain de 4 578,88 $
36. 123,01 $, coût de 904,48 $
37. En ordonnant les nombres cachés, on a une suite finie de la forme
    {0,05; 0,10; 0,15; 0,20, ... , 3,15, 3,20}.
    Les termes étant ordonnés, chaque terme est obtenu en additionnant 0,05 au précédent. La forme générale est
    $a_n = a_{n-1} + d$, d'où $a_n = a_1 + (n-1)d$.
    La somme de deux termes également éloignés des extrémités de la suite donne 3,25 $ et il y a 32 de ces sommes. Le total est alors de 32 × 3,25 $ = 104 $.
    De façon générale, la somme de deux termes également éloignés des extrémités donne
    $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = 2a_1 + (n-1)d.$
    En écrivant la somme des termes en ordre croissant et en ordre décroissant
    $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$

$S_n = a_n + a_{n-1} + \ ... + a_2 + a_1$

En additionnant terme à terme, on a

$2S_n = n[2a_1 + (n-1)d] = n\ [a_1 + a_n]$ d'où

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n\left[2a_1 + (n-1)d\right]}{2}.$$

En utilisant ce résultat, on cherche la somme des 64 premiers termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est 0,05 et la raison est 0,05. On a donc

$$S_{64} = \frac{64\left[2a_1 + (n-1)d\right]}{2}$$
$$= \frac{64\left[2\times 0{,}05 + 63\times 0{,}05\right]}{2} = 104\ \$.$$

38. a) Le prochain versement de capital sera de 222,10 \$ et la raison est de 0,44 \$. La somme des 13 prochains versements sera donc 2 921,62 \$.
b) 25 versements c) 198,98 \$

Exercices 9.2

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}$ c) pas défini d) $\begin{pmatrix} -16 & -30 \\ -17 & 3 \\ -7 & -68 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -22 & 16 & 13 \\ 5 & -18 & 6 \end{pmatrix}$

2. a) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & \sqrt{32} & 4 \\ 4 & 0 & 4 & \sqrt{32} \\ \sqrt{32} & 4 & 0 & 4 \\ 4 & \sqrt{32} & 4 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 & 5 \\ 8 & 0 & 6 & 10 & 5 \\ 10 & 6 & 0 & 8 & 5 \\ 6 & 10 & 8 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

3. a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 2 & 0 & 6 & 8 & 10 \\ 4 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 8 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 8 & 10 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4. a) $\begin{pmatrix} 15\,500 & 16\,800 & 18\,200 & 19\,300 \\ 18\,300 & 19\,700 & 22\,600 & 24\,500 \\ 24\,000 & 26\,500 & 29\,400 & 31\,200 \\ 35\,000 & 39\,500 & 43\,200 & 46\,800 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 17\,435 & 18\,897 & 20\,472 & 21\,709 \\ 20\,585 & 22\,159 & 25\,421 & 27\,559 \\ 26\,996 & 29\,808 & 33\,070 & 35\,095 \\ 39\,369 & 44\,431 & 48\,593 & 52\,642 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 17\,650 & 18\,950 & 20\,350 & 21\,450 \\ 20\,450 & 21\,850 & 24\,750 & 26\,650 \\ 26\,150 & 28\,650 & 31\,550 & 33\,350 \\ 37\,150 & 41\,650 & 45\,350 & 48\,950 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

6. a) $\begin{pmatrix} 11 & 7 & 11 \\ 15 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Tous les articles dont les quantités sont négatives doivent être produits en priorité pour répondre à la demande.

7. a) $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 15 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 \\ 9 & 3 & 15 \end{pmatrix}$ d) pas défini

8. a) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ b) toujours symétrique

9. a) $\begin{pmatrix} 6 & 10 & 10 \\ 3 & 8 & 12 \\ 9 & 12 & 8 \\ 12 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ b) non c) $\begin{pmatrix} 4{,}8 & 8{,}0 & 8{,}0 \\ 2{,}4 & 6{,}4 & 9{,}6 \\ 7{,}2 & 9{,}6 & 6{,}4 \\ 9{,}6 & 1{,}6 & 8{,}0 \end{pmatrix}$

10. a) $\begin{pmatrix} 53 & 43 \\ 59 & 54 \\ 19 & 12 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 4 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

11. a) $\begin{pmatrix} 0 & 11 & 14 \\ 19 & 0 & 12 \\ 18 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 11 & 17 \\ 15 & 0 & 14 \\ 15 & 18 & 0 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 0 & 22 & 31 \\ 34 & 0 & 26 \\ 33 & 27 & 0 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 0\% & 0\% & 21{,}4\% \\ -21{,}1\% & 0\% & 16{,}7\% \\ -16{,}7\% & 100\% & 0\% \end{pmatrix}$

a_{31}, les exportations du pays P_3 vers le pays P_1 ont diminué des 16,7% au cours du second semestre.

a_{12}, les exportations du pays P_1 vers le pays P_2 sont restées stables au cours du second semestre.

a_{23}, les exportations du pays P_3 vers le pays P_2 ont connu une augmentation de 100%, elles ont donc doublé au cours du second semestre.

e) $\begin{pmatrix} 0 & 22 & 31 \\ 34 & 0 & 26 \\ 33 & 27 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 34 & 33 \\ 22 & 0 & 27 \\ 31 & 26 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -12 & -2 \\ 12 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

f) Un signe positif indique un surplus commercial et un signe négatif indique un déficit commercial.

g) $1{,}1\begin{pmatrix} 0 & 22 & 31 \\ 34 & 0 & 26 \\ 33 & 27 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 24{,}2 & 34{,}1 \\ 37{,}4 & 0 & 28{,}6 \\ 36{,}3 & 29{,}7 & 0 \end{pmatrix}$

12. a) $\begin{pmatrix} 12 & 9 & 14 \\ 8 & 14 & 12 \\ 12 & 11 & 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 & 8 & 13 \\ 11 & 12 & 14 \\ 10 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 26 & 17 & 27 \\ 19 & 26 & 26 \\ 22 & 19 & 31 \end{pmatrix}$

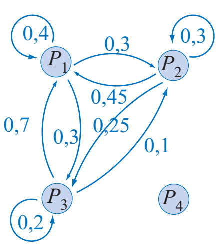
c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

13. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

14. a) $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

b)



c) $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}3 & 0{,}25 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

d) La somme deséléments de chaque ligne doit être égale à 1.

Exercices 9.4

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A \bullet B = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 17 & -3 \end{pmatrix}$ et $B \bullet A = \begin{pmatrix} -9 & -17 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$

3. a) $\begin{pmatrix} 0 & -13 & 13 \\ 7 & 29 & -22 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 19 & 20 \\ -17 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -6 & -23 & 17 \\ 11 & 27 & -16 \end{pmatrix}$ d) pas défini

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$, par exemple

5. a) $A \bullet B = \begin{pmatrix} 20 & 17 \\ 5 & 81 \end{pmatrix}$ et $B \bullet A = \begin{pmatrix} 18 & 25 & 24 \\ 16 & 41 & 17 \\ 30 & 33 & 42 \end{pmatrix}$

b) $A \bullet B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -14 & -4 \end{pmatrix}$ et $B \bullet A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A \bullet B = \begin{pmatrix} 33 & 32 & -2 \\ 26 & 35 & 2 \\ 55 & 50 & -6 \end{pmatrix}, B \bullet A = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -7 \\ -16 & 39 & 16 \\ 12 & 43 & 32 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, par exemple.

6. a) $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 37 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 17 & 81 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 5 & 12 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 33 & 26 & 55 \\ 32 & 35 & 50 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

7. a) $\left\{\begin{array}{l} \text{187 heures à l'atelier de sciage} \\ \text{114 heures à l'atelier d'assemblage} \\ \text{98 heures à l'atelier de sablage} \end{array}\right.$

b) $\begin{pmatrix} 18{,}75 & 14{,}53 & 16{,}25 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 187 \\ 114 \\ 98 \end{pmatrix} = 6\ 755{,}17\$$

c) 117,81 $ pour un bureau, 68,28 $ pour une chaise et 101,56 $ pour une table.

8. a) $\left\{\begin{array}{l} \text{1 802 unités de bois} \\ \text{273,2 unités de contreplaqué} \\ \text{184,8 unités d'aggloméré} \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} \text{182 h et 10 min à l'atelier de sciage} \\ \text{111 h et 30 min à l'atelier d'assemblage} \\ \text{153 h et 35 min à l'atelier de sablage} \end{array}\right.$

9. a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

10. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Indice 3.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3a^2 & -a^2 \\ 0 & 3a^2 & -a^2 \\ 0 & 9a^2 & -3a^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Indice 3.

11. $A \bullet A^t = \begin{pmatrix} 14 & -17 \\ -17 & 50 \end{pmatrix}$ et $A^t \bullet A = \begin{pmatrix} 17 & -17 & 10 \\ -17 & 34 & -21 \\ 10 & -21 & 13 \end{pmatrix}$

12. Le produit matriciel n'est pas commutatif,

13. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 16 \\ 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 26 & 52 \\ 0 & 27 & 38 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

et $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 80 & 160 \\ 0 & 81 & 130 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Les puissances d'une matrice triangulaire supérieure sont également des matrices triangulaires supérieures.

14. Soit A, une matrice idempotente, c'est-à-dire $A^2 = A$. On doit montrer que $(A^t)^2 = A^t$.

$(A^t)^2 = A^t \bullet A^t$, par définition du produit;
$= (A \bullet A)^t$, puisque $(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t$;
$= (A^2)^t$, par définition du produit;
$= (A)^t$, puisque $A^2 = A$.

15. Soit A, une matrice nilpotente d'indice 2, c'est-à-dire $A^2 = 0$. On doit montrer que $(A^t)^2 = 0$.

$(A^t)^2 = A^t \bullet A^t = (A \bullet A)^t$, puisque $(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t$
$= (A^2)^t = 0^t = 0$, puisque $A^2 = 0$.

16. Soit A, une matrice nilpotente d'indice 3, c'est-à-dire $A^3 = 0$. On doit montrer que $(A^t)^3 = 0$.

$(A^t)^3 = A^t \bullet A^t \bullet A^t$, par définition;
$= (A^t \bullet A^t) \bullet A^t$, par associativité;
$= (A \bullet A)^t \bullet A^t$, puisque $(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t$;
$= [A \bullet (A \bullet A)]^t$, puisque $(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t$;
$= [A \bullet A \bullet A]^t$, par associativité;
$= (A^3)^t$, par associativité;
$= 0^t = 0$, puisque $A^3 = 0$.

17. a) $B = \begin{pmatrix} 32 & 46 & 42 \\ 43 & 72 & 56 \\ 46 & 64 & 60 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 34 & 64 & 54 \\ 48 & 78 & 66 \\ 40 & 72 & 63 \end{pmatrix}$

b) $B + R = \begin{pmatrix} 66 & 110 & 96 \\ 91 & 150 & 122 \\ 86 & 136 & 123 \end{pmatrix}$

c) L'opération donne le nombre total de chaque sorte de jus de fruits vendus durant la fin de semaine, soit 243 jus d'orange, 396 jus de raisin et 341 jus de pomme.

d) L'opération donne le nombre de jus de fruits vendus pour chacune des journées de la fin de semaine, soit 272 jus le vendredi, 363 jus le samedi et 345 jus le dimanche.

e) L'opération donne le total des ventes durant la fin de semaine, soit 980 jus.

f) $P = \begin{pmatrix} 1{,}00 \\ 1{,}40 \\ 1{,}20 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0{,}40 \\ 0{,}60 \\ 0{,}50 \end{pmatrix}$.

g) $A = \begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}40 & 0{,}60 \\ 1{,}40 & 0{,}60 & 0{,}80 \\ 1{,}20 & 0{,}50 & 0{,}70 \end{pmatrix}$

h) L'opération donne les revenus, les coûts et les profits pour chacune des journées de la fin de semaine.

i) $\begin{pmatrix} 1206{,}60 & 505{,}30 & 701{,}30 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 99 & 165 & 144 \\ 137 & 225 & 183 \\ 129 & 204 & 185 \end{pmatrix}$

k) $1{,}15 \begin{pmatrix} 0{,}40 \\ 0{,}60 \\ 0{,}50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}46 \\ 0{,}69 \\ 0{,}58 \end{pmatrix}$

l) $1{,}20 \begin{pmatrix} 1{,}00 \\ 1{,}40 \\ 1{,}20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}20 \\ 1{,}68 \\ 1{,}44 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 1{,}20 & 0{,}46 & 0{,}74 \\ 1{,}68 & 0{,}69 & 0{,}99 \\ 1{,}44 & 0{,}58 & 0{,}86 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} 603{,}36 & 242{,}19 & 361{,}17 \\ 805{,}92 & 323{,}50 & 482{,}42 \\ 763{,}92 & 306{,}48 & 457{,}44 \end{pmatrix}$

o) $\begin{pmatrix} 2173{,}20 & 872{,}16 & 1301{,}04 \end{pmatrix}$

18. a) $\begin{pmatrix} 530 & 240 & 645 \\ 832 & 220 & 663 \\ 784 & 196 & 671 \\ 636 & 174 & 857 \\ 734 & 125 & 800 \\ 868 & 78 & 1106 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3\,956{,}20 \\ 4\,914{,}80 \\ 4\,858{,}45 \\ 4\,861{,}70 \\ 4\,948{,}60 \\ 6\,191{,}60 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\,257{,}55 \\ 5\,018{,}75 \\ 4\,735{,}10 \\ 4\,949{,}25 \\ 4\,817{,}25 \\ 6\,011{,}20 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4\,106{,}88 \\ 4\,966.78 \\ 4\,796{,}78 \\ 4\,905{,}48 \\ 4\,882{,}93 \\ 6\,101{,}40 \end{pmatrix}$ Meilleur revenu le samedi.

d) $\begin{pmatrix} 1\,746,80 \\ 2\,117,30 \\ 2\,134,75 \\ 2\,204,60 \\ 2\,218,30 \\ 2\,813,80 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,897,45 \\ 2\,228,15 \\ 2\,085,90 \\ 2\,230,45 \\ 2\,171,95 \\ 2\,759,60 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2\,096,80 \\ 2\,467,30 \\ 2\,484,75 \\ 2\,654,60 \\ 2\,668,30 \\ 3\,163,80 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\,247,45 \\ 2\,578,15 \\ 2\,435,90 \\ 2\,680,45 \\ 2\,621,95 \\ 3\,109,60 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2\,172,13 \\ 2\,522,73 \\ 2\,460,33 \\ 2\,667,53 \\ 2\,645,13 \\ 3\,136,70 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1\,934,75 \\ 2\,444,05 \\ 2\,336,45 \\ 2\,237,95 \\ 2\,237,80 \\ 2\,964,70 \end{pmatrix}$

19. a) $\begin{pmatrix} 245 & 262 & 268 & 262 \\ 240 & 252 & 256 & 246 \\ 220 & 239 & 244 & 230 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 43,20 & 54,00 & 54,00 & 50,40 \\ 46,80 & 50,40 & 57,60 & 64,80 \\ 54,00 & 64,80 & 68,40 & 57,60 \\ 61,20 & 57,60 & 54,00 & 50,40 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 882,00 & 943,20 & 964,80 & 943,20 \\ 864,00 & 907,20 & 921,60 & 885,60 \\ 792,00 & 860,40 & 878,40 & 828,00 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1\,037 \\ 994 \\ 933 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3\,733,20 \\ 3\,578,40 \\ 3\,358,80 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1\,096,20 \\ 1\,184,40 \\ 1\,125,80 \end{pmatrix}$

g) 10 670,40 \$ h) 3 406,40 \$

Exercices 10.2

1. a) Solution unique, graphiques 2) et 4).
   b)Aucune solution, graphique 7).
   c) Infinité de solutions, graphique 6).
   d) Aucune solution, graphique 5).
   e) Aucune solution, graphiques 1) et 3).
   f) Solution unique, graphique 8).
2. a) Aucune solution
   b) Infinité de solutions
   c) Aucune solution
   d) Aucune solution
   e) Infinité de solutions
   f) Infinité de solutions
   g) Aucune solution
   h) Solution unique
3. a) (4; –2; 5)
   b) $\{(x; y; z) \mid x = 2 + 7t, y = 1 - 3t, z = t\}$
   c) $\{(x; y; z) \mid x = 13 + 13t, y = 2 + 5t, z = t\}$
   d) (2; –3; 4; 5)
   e) (11; –10; –12)
   f) (6; –7; 12)
   g) (8; –3; 4)
   h) (2; –3; 5)
   i) $\{(x; y; z) \mid x = 43 - 8t, y = -67/2 + 11t/2, z = t\}$
   j) Aucune solution
4. $y = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} + 1$
5. a) Infinité de solutions si $a = 2$, solution unique si $a \neq 2$.
   b) Pas de solution si $a = 1$ ou $a = 7$, solution unique si $a \neq 1$ ou $a \neq 7$, ne peut avoir infinité de solutions.
   c) Pas de solution si $a = 1$ ou $a = -3$, solution unique si $a \neq 1$ ou $a \neq -3$, ne peut avoir infinité de solutions.
   d) Pas de solution si $a = 3$, solution unique si $a \neq 3$ ou $a \neq 5$, infinité de solutions si $a = 5$.
   e) Pas de solution si $a = -2$, solution unique si $a \neq -2$ ou $a \neq 4$, infinité de solutions si $a = 4$.
   f) Pas de solution si $a = 2$, solution unique si $a \neq -5$ ou $a \neq 2$, infinité de solutions si $a = -5$.
6. a) $c + 2b - 5a = 0$
   b) $c - b + 2a = 0$
   c) Admet des solutions pour toutes valeurs de a, b et c.
7. En appliquant la méthoded e Gauss-Jordann, on démontre aisément les propriétés.
8. a) $x_1 = (3t - 10u - 4)/2$, $x_2 = 3t - 3u - 1$, $x_3 = t$, $x_4 = 2 + 3u$, $x_5 = u$.
   b) Aucune solution
   c) $x_1 = (22 - t)/7$, $x_2 = (24 + 11t)/7$, $x_3 = t$, $x_4 = 1$.
   d) $x_1 = 2 - t$, $x_2 = 2 + 2t$, $x_3 = t$.
9. a) (5; –3; 4) b) (8; 2; 11)
   c) Aucun point commun aux trois plans.
   d) $\{(x; y; z) \mid x = (-20 - 10t)/7 , y = (26 - t)/7, z = t\}$. Ces points forment une droite.
10. a) $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 6 \\ -1 & -4 & 7 \end{array}\right)$
    b) $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & -8 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -4 & 6 \\ -1 & -4 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right)$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right)$

11. a) $\{(x; y; z; u) \mid x = -s + 2t,\ y = 1 + 2s - 2t,\ z = s,\ u = t\}$
   b) Aucune solution
   c) $\{(2; 1; -1)\}$
   d) $\{(0; 0; 0)\}$

Exercices 10.4

1. a) $\begin{cases} x + y = 220 \\ x - z = 80 \\ y + z = 140 \end{cases}$
   b) $\{(x; y; z) \mid x = 80 + t,\ y = 140 - t,\ z = t\}$.
2. a) $\begin{cases} 3x - y - z = 14 \\ -x + 3y - z = 10 \\ -x - y + 3z = 10 \end{cases}$
   12°C au point D, 11°C en E, 11°C en F.
   b) $\begin{cases} 3x - y - z = 50 \\ -x + 3y - z = 10 \\ -x - y + 3z = 10 \end{cases}$
   30°C au point D, 20°C en E et 20°C en F.
   c) $\begin{cases} 3x - y - z = 40 \\ -x + 3y - z = 20 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$
   25°C au point D, 20°C en E, 15°C en F.
3. a) 5 litres de T_1, 2 litres de T_2 et 3 litres de T_3.
   b) 2 litres de T_1, 8 litres de T_2 et 6 litres de T_3.
4. a) (9; 15; 13) , 9 bureaux du modèle M_1, 15 bureaux du modèle M_2 et 13 bureaux du modèle M_3.
   b) 1 300 unités de bois, 164 unités de contreplaqué et 76 unités d'aggloméré.
   c) (20; 22; 18)
5. a) (5; 2; 3) b) (2; 8; 6)
6. a)

Temps nécessaire à chacune des opérations			
Opérations	Jours		
	J_1	J_2	J_3
Mélanger	265	180	260
Chauffer	395	300	420
Centrifuger	510	400	530
Refroidir	650	500	685

   b) 1 820 min au jour 1, 1 380 min au jour 2 et 1 895 min au jour 3.
   c) Uniquement 50 L du produit P_2.
7. $d_1 = 520 + s - t$, $d_2 = -220 - s + t$, $d_3 = 400 - s$, $d_4 = s$, $d_5 = 1220 - t$, $d_6 = t$.
   La municipalité peut décider de changer une seule conduite et utiliser l'autre à sa capacité maximale actuelle. Ainsi, en posant $t = 400$ L/s, l'ensemble des solutions devient :
   $d_1 = 120 + s$, $d_2 = 180 - s$, $d_3 = 400 - s$, $d_4 = s$, $d_5 = 820$, $d_6 = 400$.
   Il faudrait, dans ces conditions, augmenter la capacité de la conduite N_3N_4 à 820 L/s.
8. a) 6 variables
   b) On peut écrire quatre équations. Il y a moins de contraintes que d'inconnues, il y a au moins deux variables libres.
   c) Ce qui entre dans un nœud doit en sortir.
   d) Au nœud A, l'équation est $x_4 + x_5 + x_6 = 800$;
   Au nœud B, l'équation est $x_2 + x_4 = 300 + x_1$;
   Au nœud C, l'équation est $x_1 + x_3 + x_6 = 500$;
   Au nœud D, l'équation est $x_5 = x_2 + x_3$.
   e) $x_1 = 500 - s - u$, $x_2 = -s + t$, $x_3 = s$, $x_4 = 800 - t - u$, $x_5 = t$, $x_6 = u$.
   f) $0 \leq s + u \leq 500$, $s \leq t$ et $0 \leq t + u \leq 800$.
9. a) (73/23; 164/23) et (8; 2).
   b) (3; –2; 4) et (–4; 2; 7).
   c) $\{(x; y; z) \mid x = 11t + 68,\ y = 5t + 34$ et $z = t\}$,
   $\{(x; y; z) \mid x = 11t - 80,\ y = 5t - 30$ et $z = t\}$.
10. a) (18; 10; 11), (15; 10; 13) et (12; 10; 15). Il est plus avantageux de choisir la solution (18; 10; 11) car le profit mensuel est alors de 1 296 $.
   b) (61; 25; 10); profit de 3 052 $
   c) (40; 25; 24); profit de 2 940 $.
11. a) 9 kg d'arachides, 9 kg de raisins et 18 kg de noix de cajou.
   b) (0,72 0,69 0,66)
   c) (0,90 0,87 0,84)
   d) (1,62 1,57 1,51)
   e) $\{(x; y; z) \mid x = t,\ y = 400 - 2t,\ z = t\}$
   f) (0,88 0,90 0,98) et (1,58 1,62 1,76)
   g) 8,5 kg d'arachides, 5 kg de raisins et 4,5 kg de noix de cajou
12. a) 648 mètres linéaires de bois, 83 m^2 de contreplaqué et 88 m^2 d'aggloméré.
   b) (143,25 189,25 161,25)
   c) (79,50 66,25 53)
   d) (222,75 255,50 214,25)
   e) (334,13 383,25 321,38)
   f) (467,78 536,55 449,93)
   g) 10 bureaux du modèle colonial, 8 du modèle espagnol et 6 du modèle canadien.

h) 12 bureaux du modèle colonial, 10 du modèle espagnol et 22 du modèle canadien.

13. a)

Premier sous-traitant				
Opération	Temps nécessaire			Temps disponible
	M_1	M_2	M_3	
Émailler	15	11	8	1 179
Assembler	12	8	10	1 022
Câbler	10	9	11	1 030

Deuxième sous-traitant				
Opération	Temps nécessaire			Temps disponible
	M_1	M_2	M_3	
Émailler	15	11	8	1 072
Assembler	12	8	10	994
Câbler	10	9	11	1 023

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 11 & 8 & 1\,179 \\ 12 & 8 & 10 & 1\,022 \\ 10 & 9 & 11 & 1\,030 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 11 & 8 & 1\,072 \\ 12 & 8 & 10 & 994 \\ 10 & 9 & 11 & 1\,023 \end{array}\right)$

c) (32; 41; 31) et (24; 32; 45)

d) (20,09 15,42 16,97)

e) 1 801,17 $

f) (20,25 15,42 16,53)

g) 1 723,29 $

14. a) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

b) Une telle matrice n'existe pas.

15. a) $\begin{pmatrix} -31 & -17 & 22 \\ 6 & 3 & -4 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -11/2 & -5/2 & 17/2 \\ 3 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16. a) $x^2 + y^2 - 3x - 9y + 20 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 16x - 7y + 40 = 0$

11.2 Exercices

1. a) Vecteur probabilité, tous les éléments sont non négatifs et leur somme est 1.
b) N'est pas un vecteur probabilité, la somme des éléments est différente de 1.
c) N'est pas un vecteur probabilité, un des éléments est négatif.
d) Vecteur probabilité, tous les éléments sont non négatifs et leur somme est 1.

2. Une matrice de transition est une matrice carrée dont les éléments sont non négatifs et telle que la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1. Les matrices de transition sont donc *a* et *d*.

3. a) 73% au centre-ville et 27 % en banlieue
b) 67,05 % au centre-ville et 32,95 % en banlieue.
c) (1/3 2/3)

4. Ce sont des matrices de transition car elles sont carrées, elles n'ont pas d'éléments négatifs et la somme des éléments de chaque ligne est 1.

5. Matrices de transition

6. a) (0,205 0,205 0,590)
b) (0,2435 0,2435 0,5130)
c) $P - I = \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}2 \end{pmatrix}$

$(P - I)^t = \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}2 \end{pmatrix}$

À long terme, chacun des trajets devrait être utilisé par le tiers des travailleurs.

d) À long terme, 20 % des travailleurs devraient emprunter le trajet AP, 20 % le trajet BP et 60 % le trajet CP.

7. a) 16% de la population dans l'arrondissement A, 16,5 % en B et 67,5% en C.
b) (0,1111 0,0855 0,8034)
c) Dans l'arrondissement C.

8. (1/3 1/3 1/3)

9. On doit montrer que la somme des éléments de chacune des lignes est 1.

10. a) Chacun occupe un tiers du marché.
b) Les parts de marché seront 1/6, 1/6 et 2/3.

11. 44,44%, 31,94% et 23,61%

12. a) $P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}0 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}0 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

b) 29,25 %, 28,57 %, 22,45 % et 19,73 %.

13. a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

b) Impossible

c) 1/8, 3/8, 1/4 et 1/4 ou 0,125, 0,375, 0,25 et 0,25

14. a) $P = \begin{pmatrix} 0{,}0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}0 \end{pmatrix}$

b) 3/8, 1/4, 3/8 ou 0,375 0,25 et 0,375

c) 1/3, 1/3, 1/3

15. a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$

16. a) $P = \begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0{,}50 & 0 & 0 & 0{,}50 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}00 & 0{,}25 \\ 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}00 \end{array}\right) \end{array}$

b) $Q = \begin{pmatrix} 0{,}0 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}25 & 0{,}0 & 0{,}25 \\ 0{,}0 & 0{,}5 & 0{,}0 \end{pmatrix}$

c) $Q^2 = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0 & 0{,}125 \\ 0{,}0 & 0{,}25 & 0{,}0 \\ 0{,}125 & 0{,}0 & 0{,}125 \end{pmatrix}$

d) $Q^3 = \begin{pmatrix} 0{,}0 & 0{,}125 & 0{,}0 \\ 0{,}0625 & 0{,}0 & 0{,}0625 \\ 0{,}0 & 0{,}125 & 0{,}0 \end{pmatrix}$

e) La probabilité que la souris ne soit pas prisonnière diminue à chaque transition.

f) La probabilité que le système soit dans un état absorbant (que la souris soit prisonnière) après trois changements d'état est de 87,5% quel que soit l'état initial (la cellule dans laquelle la souris a été placée au départ).

17. a) $P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0.0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0.0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

b) $P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}39 & 0{,}45 \\ 0{,}00 & 0{,}45 & 0{,}55 \\ 0{,}00 & 0{,}44 & 0{,}56 \end{pmatrix}$

$P^3 = \begin{pmatrix} 0{,}064 & 0{,}423 & 0{,}513 \\ 0{,}000 & 0{,}445 & 0{,}555 \\ 0{,}000 & 0{,}444 & 0{,}556 \end{pmatrix}$

c) La part de marché du produit A est initialement 0,4. Après une transition, elle est de $0{,}4^2$. C'est la probabilité qu'un consommateur après 1 transition choisisse le produit A. Après deux transitions, elle est de $0{,}4^3$.

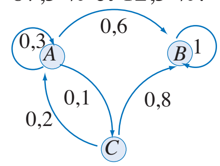
d) La part de marché du produit A dans la matrice Q^n est $0{,}4^n$. C'est la probabilité qu'un consommateur après n transitions choisisse le produit A. Or, la limite lorsque n tend vers l'infini de $0{,}4^n$ est 0. Par conséquent, ce produit sera éventuellement boudé par les consommateurs.

e) B aura 44,44 % du marché et le produit C 55,56 %

18. a) La probabilité de passer à l'état absorbant est de 75 % et celle de demeurer dans l'état non absorbant est de 25 %.

b) 87,5 % et 12,5 %.

19. a)

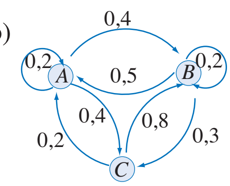


Associée à une chaîne absorbante.

$Q = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}0 \end{pmatrix}$, $Q^2 = \begin{pmatrix} 0{,}11 & 0{,}03 \\ 0{,}06 & 0{,}02 \end{pmatrix}$,

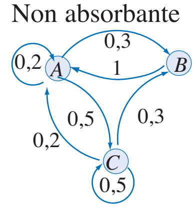
$Q^3 = \begin{pmatrix} 0{,}039 & 0{,}011 \\ 0{,}022 & 0{,}006 \end{pmatrix}$, $Q^4 = \begin{pmatrix} 0{,}0139 & 0{,}0039 \\ 0{,}0078 & 0{,}0022 \end{pmatrix}$

b)



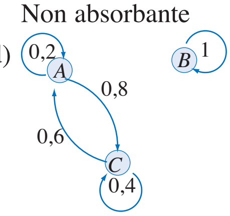
Non absorbante

c)



Non absorbante

d)



Non absorbante

20. a) (0,525; 0,475; 0) b) (1; 0; 0)

c) Si les croisements se font toujours avec un porc ayant le génotype hybride, à long terme le troupeau sera constitué à 25 % du génotype dominant, 50 % du génotype hybride et à 25 % de récessif.

11.4 Exercices

1. a) $Q = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 150 \\ 170 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 425 \end{pmatrix}$

2. a) $P = \begin{pmatrix} 350 \\ 280 \\ 360 \end{pmatrix}$ b) $P = \begin{pmatrix} 450 \\ 300 \\ 320 \end{pmatrix}$

3. a) 400 M\$ de produits de U_1, 400 M\$ de produits de U_2 et 400 M\$ de produits de U_3.
   b) 40 M\$ de produits de U_1, de 40 M\$ de produits de U_2 et de 640 M\$ de produits de U_3.
   c) La demande externe est plus faible en b), mais l'usine U_3 a consommé une plus grande partie de la production totale des usines U_1 et U_2, ce qui explique le fait que la production soit restée la même en a) et en b).

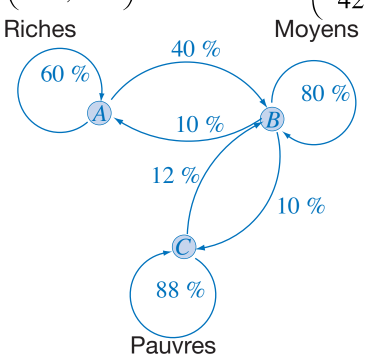
4. a) $P = \begin{pmatrix} 320 \\ 310 \\ 230 \end{pmatrix}$ b) $D = \begin{pmatrix} 70 \\ 250 \\ 150 \end{pmatrix}$

5. a) $\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}125 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}25 & 0{,}125 \\ 0{,}08 & 0{,}05 & 0{,}1 \end{pmatrix} \end{array}$

   b) $D = \begin{pmatrix} 34 \\ 10{,}5 \\ 30{,}8 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 6{,}25 \\ 2{,}75 \\ 7{,}9 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} 18{,}38\% \\ 26{,}19\% \\ 25{,}65\% \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 35{,}7 \\ 11{,}025 \\ 32{,}34 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 52{,}5 \\ 25{,}2 \\ 42{,}0 \end{pmatrix}$

6. a) 

   b) $P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}0 & 0{,}12 & 0{,}88 \end{pmatrix}$

   c) 12% de la population dans la classe des riches, 48 % auront un revenu moyen et 40 % aura un revenu sous le seuil de pauvreté.

7. b) $P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}0 & 0{,}75 \end{pmatrix}$

   c) 37,5 % des personnes heureuses en ménage, 12,5 % difficultés conjugales et 50 % divorcées.
   d) À long terme, une personne de cet échantillon a plus de chances d'être divorcée.

8. a) 1 mois, (7 500 6 700 2 800)
   2 mois, (7 700 7 440 2 460)
   b) (3/7 3/7 1/7)

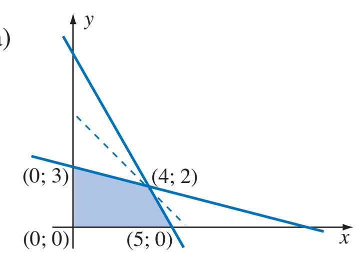
9. a) (292 756 726 226)
   b) (14,98 % 36,98 % 35,71 % 12,34 %)

10. a) $P = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{array}\right)$

   b) (11/36 11/36 29/54 29/54)
   c) 11 chances sur 36 si la souris a été placée dans le compartiment 1, la probabilité est la même si elle a été placée dans le compartiment 2. Si elle a été placée dans le compartiment 3 ou le compartiment 4, la probabilité qu'elle soit absorbée est de 29/54.

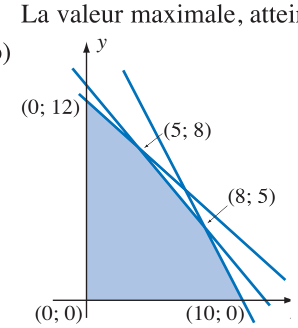
11. a) $D = \begin{pmatrix} 270 \\ 110 \\ 240 \end{pmatrix}$ b) $P = \begin{pmatrix} 100 \\ 140 \\ 30 \end{pmatrix}$

Exercices 12.2

1. a) 

$(x; y)$	(0; 0)	(0; 3)	(5; 0)	(4; 2)
z	0	9	15	18

La valeur maximale, atteinte à (4; 2), est 18.

   b) 

$(x; y)$	(0; 0)	(0; 12)	(5; 8)	(8; 5)	(10; 0)
z	0	96	89	80	50

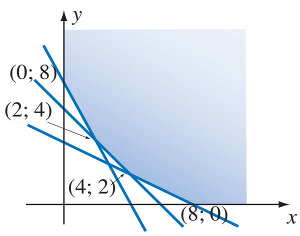
La valeur maximale, atteinte à (0; 12), est 96.

   c)

$(x; y)$	(0; 0)	(0; 12)	(5; 8)	(8; 5)	(10; 0)
z	0	48	52	52	40

La valeur maximale, atteinte à (5; 8) est 52, mais cette solution n'est pas unique. La même valeur est obtenue en (8; 5) et pour tous les points du segment de droite joignant les points (5; 8) et (8; 5). Il y a d'autres solutions entières en (6; 7) et (7; 6) pour lesquelles la fonction économique prend la même valeur. La droite représentant la fonction économique est donc parallèle à la droite frontière passant par ces deux points.

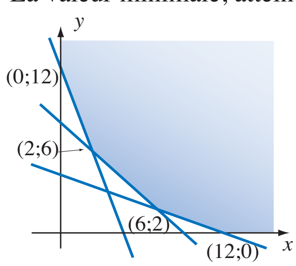
d)



$(x; y)$	(0; 8)	(2; 4)	(4; 2)	(8; 0)
w	56	38	34	40

La valeur minimale, atteinte à (4; 2), est 34.

e)



$(x; y)$	(0; 12)	(2; 6)	(6; 2)	(12; 0)
w	108	66	54	72

La valeur minimale, atteinte à (6; 2), est 54.

2. Si x est le nombre d'exemplaires du modèle 1 produits et y le nombre d'exemplaires du modèle 2 produits, maximiser $z = 60x + 60y$ soumise aux contraintes :
   $x + 3y \leq 105$
   $2x + 3y \leq 120$
   $4x + 3y \leq 180$
   $x \geq 0$ et $y \geq 0$
   On trouve $z = 3\ 000$ \$ à (30; 20).
3. Si x est le nombre d'armoires Antique produites et y le nombre d'armoires Traditionnel produites, maximiser $z = 225x + 200y$ soumise aux contraintes :
   $2x + 3y \leq 60$
   $x + y \leq 25$
   $3x + 2y \leq 60$
   $x \geq 0$ et $y \geq 0$
   On trouve $z = 5\ 100$ \$ à (12; 12).
4. a) Si x est le nombre d'exemplaires du modèle 1 produits et y le nombre d'exemplaires du modèle 2 produits, maximiser $z = 80x + 60y$ soumise aux contraintes :
   $2x + 3y \leq 240$
   $3x + 2y \leq 210$
   $3x + y \leq 180$
   $x \geq 0$ et $y \geq 0$
   On trouve $z = 6\ 000$ \$ à (30; 60).
   b) Maximiser $z = 90x + 60y$ soumise aux contraintes :
   $2x + 3y \leq 240$
   $3x + 2y \leq 210$
   $3x + y \leq 180$
   $x \geq 0$ et $y \geq 0$
   On trouve $z = 6\ 300$ \$ à (50; 30) ou à (30; 60) et en tout point du segment de droite joignant ces deux points. Il existe neuf autres solutions entières.
5. a) Si x est le nombre d'exemplaires du modèle 1 produits et y le nombre d'exemplaires du modèle 2 produits, maximiser $z = 40x + 50y$ soumise aux contraintes :
   $3x + 5y \leq 250$
   $2x + y \leq 100$
   $x + y \leq 60$
   $x \geq 0$ et $y \geq 0$
   On trouve $z = 2\ 750$ \$ à (25; 35).
   b) En effectuant le produit de la matrice des contraintes par la matrice de la solution optimale, on a :
   $$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 25 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 85 \\ 60 \end{pmatrix}$$
   Avant de décider de fabriquer ces étagères, la matrice des surplus était $\begin{pmatrix} 250 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}$. La matrice des matériaux que le plan de production permet d'utiliser est $\begin{pmatrix} 250 \\ 85 \\ 60 \end{pmatrix}$
   Les matériaux en surplus seront alors :
   $$\begin{pmatrix} 250 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 250 \\ 85 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Il restera donc 15 feuilles de contreplaqué en surplus.
6. a) Si x est le nombre de sachets de mélange Corsé produits et y le nombre de sachets de mélange Velouté produits, minimiser $w = 3x + 4y$ soumise aux contraintes
   $100x + 100y \geq 6\ 000$
   $300x + 100y \geq 10\ 000$
   $100x + 300y \geq 10\ 000$
   $x \geq 0$ et $y \geq 0$
   On trouve $w = 200$ \$ à (40; 20).
   b) Il doit commander 6 kg de brésilien, 14 kg de colombien et 10 kg d'africain.
7. a) Si x est le nombre d'unités de P_1 produites et y le nombre d'unités de P_2 produites,
   minimiser $w = 5x + 5y$ soumise aux contraintes
   $4x + 5y \geq 380$
   $3x + y \geq 120$

$x + 4y \geq 150$

$x \geq 10$ et $y \geq 10$

On trouve $w = 400$ \$ à (20; 60).

b) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 120 \\ 260 \end{pmatrix}$

Donc, la machine M_1 aura un temps d'utilisation de 380 minutes, la machine M_2, 120 minutes et la machine M_3, 260 minutes.

8. a) Si x est le nombre de kilogrammes de SuperA produits et y le nombre de kilogrammes d'ExtraC produits, maximiser $z = 3x + 2y$ soumise aux contraintes :

$0{,}4x + 0{,}2y \leq 38$

$0{,}3x + 0{,}3y \leq 30$

$0{,}3x + 0{,}5y \leq 45$

$x \geq 0$ et $y \geq 0$

On trouve $z = 290$ \$ à (90; 10).

b) Il faut commander 38 kg de vitamine A, 30 kg de vitamine B et 32 kg de vitamine C.

9. a) Si x est le nombre de tables produites et y le nombre de maisons de poupée produites, maximiser $z = 50x + 60y$ soumise aux contraintes :

$6x + 4y \leq 72$

$8x + 12y \leq 144$

$8x + 8y \leq 112$

$x \geq 0$ et $y \geq 0$

On trouve $z = 780$ \$ à (6; 8).

b) 4 minutes à l'atelier de sciage seulement.

10. a) Le coût de main-d'œuvre pour produire la chaise Grand-mère est de 26,80 \$ et il en coûte 23,30 \$ pour produire la chaise Grand-père.

b) Si x est le nombre de chaises Grand-mère produites et y le nombre de chaises Grand-père produites, minimiser $w = 26{,}8x + 23{,}3y$ soumise aux contraintes

$20x + 40y \geq 240$

$60x + 30y \geq 360$

$24x + 24y \geq 240$

$x \geq 1$ et $y \geq 1$

On trouve $w = 240$ \$ à (2; 8).

c) $\begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 60 & 30 \\ 24 & 24 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 360 \\ 240 \end{pmatrix}$

donc 6 heures à l'atelier de sciage, 6 heures pour le tournage et 4 heures pour l'assemblage.

11. a) Si x est le nombre de litres du mélange Brillenet produits et y le nombre de litres du mélange Clairnet produits, maximiser $z = 1{,}50x + 1{,}20y$ soumise aux contraintes

$0{,}4x + 0{,}5y \leq 94$

$0{,}3x + 0{,}2y \leq 51$

$0{,}3x + 0{,}3y \leq 60$

$x \geq 0$ et $y \geq 0$

On trouve $z = 273$ \$ à (110; 90).

b) Il faut commander 89 L du premier ingrédient, 51 L du deuxième et 60 L du troisième.

c) En ajoutant la contrainte $x \leq 70$, le plan de production est (70; 130) et $z = 261$ \$.

d) Il faut modifier le plan d'acquisition et commander hebdomadairement 93 L du premier ingrédient, 47 L du deuxième et 60 L du troisième.

12. $z = 5\,100$ \$ à (12; 12)

13. a) $z = 950$ \$ à (20; 10)

b) 10 minutes à l'atelier de moulage.

14. $z = 3\,200$ \$ à (160; 80; 80), ou (160; 160; 0) ou (160, 96, 64)

15.

Jus	Mélange			Quantités disponibles
	M_1	M_2	M_3	
Orange	40 %	60 %	40 %	120 L
Pamplemousse	40 %	40 %	20 %	100 L
Pêche	20 %	0 %	40 %	160 L
Profit	1,20 \$/L	1,40 \$/L	1,50 \$/L	

b) Soit x_1 le nombre d'unités de P_1, x_2 le nombre d'unités de P_2 et x_3 le nombre d'unités de P_3. On doit maximiser la fonction

$z = 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 1{,}5x_3$

sujette aux contraintes

$0{,}4x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 \leq 120$

$0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}2x_3 \leq 100$

$0{,}2x_1 + 0{,}0x_2 + 0{,}4x_3 \leq 160$

où $x_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

(50; 50; 175) pour un profit de 392,50 \$.

16. $w = 600$ \$ à (0; 0; 120)

17. a) 29,00 \$ et 26,50 \$

b) $w = 270$ \$ à (2; 8)

c) 6 heures à l'atelier de sciage, 6 heures pour le tournage et 4 heures pour l'assemblage.

10. a)

Atelier	Produit			Temps disponibles
	P_1	P_2	P_3	
A_1	3 h	2 h	4 h	80 h
A_2	3 h	2 h	2 h	60 h
A_3	2 h	1 h	3 h	80 h
Profit	25 \$/u	30 \$/u	35 \$/u	

b) Maximiser $z = 25x_1 + 30x_2 + 35x_3$

sujette aux contraintes

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 80$

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 60$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 80$

où $x_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

(0; 20; 10)pour un profit de 950 \$.

c) Il reste 30 h de libre à l'atelier A_3.

11. a)

	Saveurs			Quantités disponibles
	Vanille	Fruits	Caramel	
Lait	600 mL	400 mL	500 mL	1 000 L
Sucre	50 g	50 g	40 g	100 kg
Crème	200 mL	150 mL	200 mL	380 L
Profit	1,50 \$/L	1,35 \$/L	1,35 \$/L	

b) Maximiser la fonction $z = 1{,}50x_1 + 1{,}35x_2 + 1{,}35x_3$ sujette aux contraintes

$0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}5x_3 \leq 1\,000$

$0{,}05x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}04x_3 \leq 100$

$0{,}2x_1 + 0{,}15\,x_2 + 0{,}2x_3 \leq 380$

où $x_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

(0; 1 200; 1 000) pour un profit hebdomadaire de 2 970 \$.

Exercices 12.4

1. a) $\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 570 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 780 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 850 \end{cases}$

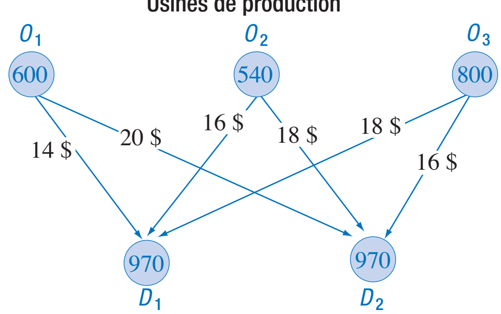
où $x_{ij} \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

b) Pour que la demande soit égale à l'offre, on ajoute une contrainte supplémentaire.

$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 270 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 420 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 240 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 440 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 310 \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} = 520 \end{cases}$

où $x_{ij} \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

2. a) Usines de production



Usines d'assemblage

b)

Origine	D_1	D_2	Disponibilités
O_1	x_{11} 14	x_{12} 20	600
O_2	x_{21} 16	x_{21} 18	540
O_3	x_{31} 18	x_{31} 16	800
Demande	970	970	

c) Le problème consiste à minimiser la fonction $w = 14x_{11} + 20x_{12} + 16x_{21} + 18x_{22} + + 18x_{31} + 16x_{32}$.

d) Les contraintes de l'offre sont

$x_{11} + x_{12} = 600$

$x_{21} + x_{22} = 540$

$x_{31} + x_{32} = 800$

e) Les contraintes de la demande sont

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 970$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 970$

f)

Origine	D_1	D_2	Disponibilités
O_1	x_{11} 14	$600 - x_{11}$ 20	600
O_2	x_{21} 16	$540 - x_{21}$ 18	540
O_3	$970 - x_{11} - x_{21}$ 18	$800 - x_{31}$ $= x_{11} + x_{21} - 170$ 16	800
Demande	970	970	

g) Les contraintes de non négativité des variables impliquent que :

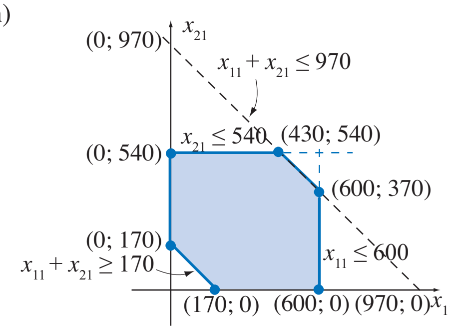
$x_{12} = 600 - x_{11} \geq 0$, d'où $x_{11} \leq 600$

$x_{22} = 540 - x_{21} \geq 0$, d'où $x_{21} \leq 540$

$x_{31} = 970 - x_{11} - x_{21} \geq 0$, d'où $x_{11} + x_{21} \leq 970$

$x_{32} = x_{11} + x_{21} - 170 \geq 0$, d'où $x_{11} + x_{21} \geq 170$

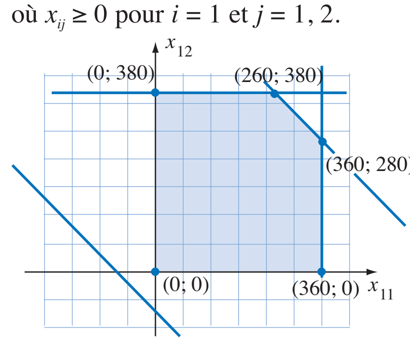
h)



3. b) $\begin{cases} x_{11} + x_{12} \leq 640 \\ x_{11} \leq 360 \\ x_{12} \leq 380 \\ x_{11} + x_{12} \geq -80 \end{cases}$ et $w = 23\,760 - 4x_{11} + 12\,x_{12}$

où $x_{ij} \geq 0$ pour $i = 1$ et $j = 1, 2$.

c)



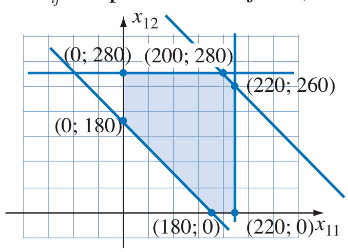
d)

$(x_{11}; x_{12})$	(0; 0)	(0; 380)	(260; 380)	(360; 280)	(360; 0)
w	23 760	28 320	27 280	25 680	22 320

4. b) $\begin{cases} x_{11} + x_{12} \leq 480 \\ x_{11} \leq 220 \\ x_{12} \leq 280 \\ x_{11} + x_{12} \geq 180 \end{cases}$ et $w = 13\ 160 - 3x_{11} - 5x_{12}$

où $x_{ij} \geq 0$ pour $i = 1$ et $j = 1, 2$.

c)



d) La solution optimale est $w = 11\ 160$ \$ à $x_{11} = 200$ et $x_{12} = 280$.

5. La fonction coût est $w = 23\ 830 - 2x_{11} + 5x_{12} - 3x_{13}$. Cela donne $x_{11} = 230$, $x_{12} = 0$ et $x_{13} = 410$.
6. La fonction coût est :
   $w = 45\ 210 - 9x_{11} - 6x_{12} - 3x_{21} - 10x_{22}$
   On trouve $x_{11} = 790$, $x_{12} = 30$, $x_{21} = 0$ et $x_{22} = 740$.
7. La demande est supérieure à l'offre. La production est de 600 unités et la demande de 800 unités. L'entreprise peut donc satisfaire 75 % de la demande et acheminer 180 unités au premier centre de distribution, 195 au second et 225 au troisième.
   La fonction coût est $w = 8\ 155 - 3x_{11} - 8x_{12}$.
   La solution est $x_{11} = 55$, $x_{12} = 195$. En complétant la solution, on a :

	D_1	D_2	D_3	Production
O_1	55 (12)	195 (11)	0 (14)	250
O_2	125 (11)	0 (15)	225 (10)	350
Demandes	180	195	225	600

8. Puisque l'offre est supérieure à la demande, il faut ajouter un centre de distribution virtuel dont la demande est la différence entre l'offre totale et la demande réelle, soit 400 unités. Il faut de plus considérer que le transport des marchandises vers ce centre de distribution virtuel se fait à un coût nul. La fonction coût est :
   $w = 13\ 880 - 2x_{11} - 4x_{12} - 3x_{13}$
   Cela donne $x_{11} = 0$, $x_{12} = 280$ et $x_{13} = 300$.
   Les quantités acheminées vers la destination 4 sont les surplus de production. On constate qu'il faudrait diminuer la production à la seconde usine.
9. a) Le problème comporte 12 variables qui sont les quantités de wagons déplacés de chacun des trois centres de déchargement à chacun des quatre centres de chargement.
   b) Il y a trois contraintes portant sur l'offre et quatre contraintes portant sur la demande.
   c) $\begin{pmatrix} 38 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 47 \end{pmatrix}$ dont le coût est $C = 7\ 930$ \$.
   d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 4 & 52 & 0 \\ 38 & 22 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ dont le coût est $C = 6\ 950$ \$.
   e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 42 \\ 4 & 0 & 52 & 0 \\ 34 & 26 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ dont le coût est $C = 7\ 110$ \$.
   f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 4 & 52 & 0 \\ 38 & 22 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ dont le coût est $C = 6\ 950$ \$.
10. a) Le problème comporte 15 variables qui sont les quantités de paniers de fruits déplacés de chacun des trois centres de collecte à chacun des cinq centres de détention.
    b) Il y a trois contraintes portant sur l'offre et cinq contraintes portant sur la demande.
    c) $\begin{pmatrix} 13 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$ dont le coût est $C = 249$ \$.
    d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ 13 & 12 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dont le coût est $C = 109$ \$.
    Cette solution n'est pas unique.
    e) Les coûts de tous les transferts de la solution obtenue par la méthode du coût minimal sont positifs ou nuls; la solution optimale est donc atteinte.
11. a) Le problème comporte 12 variables qui sont les quantités de paniers de fruits déplacés de chacun des trois centres de collecte à chacun des quatre centres de détention.
    b) Il y a trois contraintes portant sur l'offre et quatre contraintes portant sur la demande.
    c) $\begin{pmatrix} 13 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}$ dont le coût est $C = 243$ \$.
    d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 15 & 2 \\ 13 & 12 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ dont le coût est $C = 121$ \$.
    e) Les coûts de tous les transferts de la solution obtenue par la méthode du coût minimal sont positifs ou nuls; la solution optimale est donc atteinte.
12. a) Le problème comporte 15 variables qui sont les quantités de chaises déplacées de chacun des trois centres

de production à chacun des cinq centres hospitaliers. Cependant, l'offre excède la demande. En effet, l'offre est de 220 unités et la demande de 168 unités. Il faut donc ajouter une contrainte supplémentaire sur la demande à laquelle on associera des coûts nuls, ce qui portera le nombre de variables à 18.

b) Il y a trois contraintes portant sur l'offre et six contraintes portant sur la demande.

c) $\begin{pmatrix} 27 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 24 & 42 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 31 & 52 \end{pmatrix}$

dont le coût est $C = 7\,280$ \$.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 52 \\ 0 & 39 & 0 & 39 & 0 & 0 \\ 27 & 3 & 24 & 0 & 31 & 0 \end{pmatrix}$

dont le coût est $C = 7\,740$ \$. D'autres réponses sont possibles.

13. a) Le problème comporte 16 variables qui sont les quantités de machines gérées par l'entreprise pour chacun des quatre modèles de machines dans chacun des quatre emplacements.

b) Il y a quatre contraintes portant sur l'offre et quatre contraintes portant sur la demande.

c) $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$ dont le coût est $C = 296$ \$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 12 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ dont le coût est $C = 225$ \$.

e) En appliquant l'algorithme, on trouve :

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 12 \\ 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 11 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ dont le coût est $C = 217$ \$.

14. a) Le problème comporte 15 variables qui sont les quantités déplacées de chacune des trois usines à chacun des cinq centres de distribution.

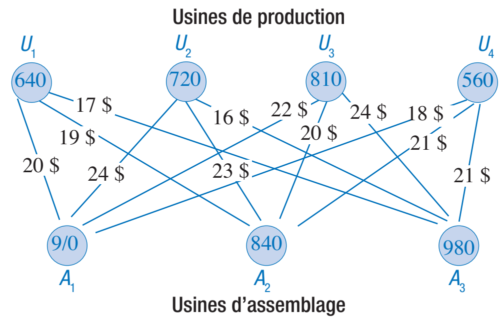
b) Il y a trois contraintes portant sur l'offre et cinq contraintes portant sur la demande.

c) $\begin{pmatrix} 80 & 75 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 60 \end{pmatrix}$, $C = 113\,000$ \$.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 75 & 0 & 65 & 20 \\ 0 & 0 & 125 & 75 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$, $C = 99\,500$ \$.

e) $\begin{pmatrix} 0 & 75 & 65 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 60 & 140 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$, $C = 93\,000$ \$.

15. a)



b)

	A_1	A_2	A_3	
U_1	$\boxed{20}$	$\boxed{19}$	$\boxed{17}$	640
U_2	$\boxed{24}$	$\boxed{23}$	$\boxed{16}$	720
U_3	$\boxed{22}$	$\boxed{20}$	$\boxed{24}$	810
U_4	$\boxed{18}$	$\boxed{21}$	$\boxed{21}$	560
	910	840	980	

c)

	A_1	A_2	A_3	
U_1	640 $\boxed{20}$	$\boxed{19}$	$\boxed{17}$	640
U_2	270 $\boxed{24}$	450 $\boxed{23}$	$\boxed{16}$	720
U_3	$\boxed{22}$	390 $\boxed{20}$	420 $\boxed{24}$	810
U_4	$\boxed{18}$	$\boxed{21}$	560 $\boxed{21}$	560
	910	840	980	

Dont le coût est 59 270 \$.

d)

	A_1	A_2	A_3	
U_1	$\boxed{20}$	380 $\boxed{19}$	260 $\boxed{17}$	640
U_2	$\boxed{24}$	$\boxed{23}$	720 $\boxed{16}$	720
U_3	350 $\boxed{22}$	460 $\boxed{20}$	$\boxed{24}$	810
U_4	560 $\boxed{18}$	$\boxed{21}$	$\boxed{21}$	560
	910	840	980	

Dont le coût est 50 140 \$.

e)

	A_1	A_2	A_3	
U_1	350 $\boxed{20}$	30 $\boxed{19}$	260 $\boxed{17}$	640
U_2	$\boxed{24}$	$\boxed{23}$	720 $\boxed{16}$	720
U_3	$\boxed{22}$	810 $\boxed{20}$	$\boxed{24}$	810
U_4	560 $\boxed{18}$	$\boxed{21}$	$\boxed{21}$	560
	910	840	980	

Le coût minimal est de 49 790 \$.