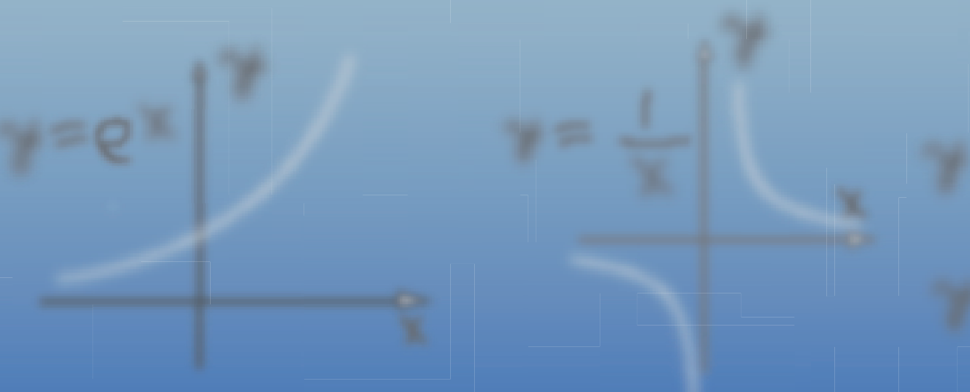


FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

CHAPITRE 7

Utiliser les notions et modèles trigonométriques pour résoudre des problèmes comportant des angles, des longueurs et des vitesses angulaires.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- la résolution de problèmes portant sur des angles, des longueurs d'arc et des vitesses angulaires;
- l'application des règles de conversion des unités de mesure d'angles;
- l'utilisation appropriée des rapports trigonométriques dans la résolution de problèmes;

OBJECTIFS

7.1 Résoudre des problèmes nécessitant la conversion de mesures d'angles.

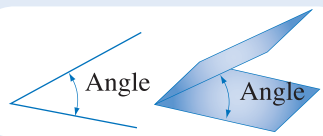
7.2 Résoudre des problèmes où interviennent des mesures d'angles, des longueurs d'arcs et des vitesses angulaires.

7.3 Utiliser les fonctions trigonométriques pour résoudre des problèmes divers.

7.4 Résoudre des équations trigonométriques à l'aide des identités trigonométriques.

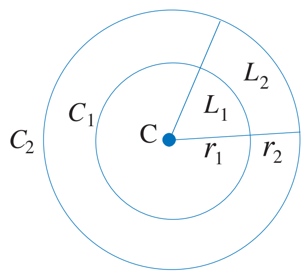
7.1 ANGLES ET ARCS

La présente section constitue un rappel sur les mesures d'angles, les longueurs d'arcs et les vitesses angulaires.



Angle

Un **angle** est une figure géométrique formée de deux demi-droites ou de deux demi-plans qui se coupent.



Angle au centre

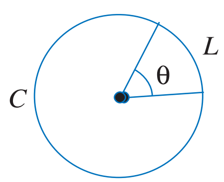
La figure présentée ci-contre, illustre le fait qu'un angle au centre d'un cercle intercepte un arc dont la longueur dépend du rayon du cercle. Pour définir la mesure de tel angle, on se sert du rapport de deux longueurs relatives au cercle. La similitude des figures permet d'écrire les proportions

$$\frac{L_1}{C_1}=\frac{L_2}{C_2} \text{ et } \frac{L_1}{r_1}=\frac{L_2}{r_2}.$$

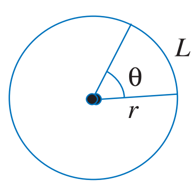
Pour un angle donné, le rapport de la longueur de l'arc intercepté sur la circonférence est constant. Le rapport de la longueur de l'arc intercepté sur le rayon est également constant. Chacun de ces rapports permet de définir une unité de mesure des angles.

DéfinTrigo01

Mesure d'un angle



Mesure d'un angle en degrés



Mesure d'un angle en radians

Degré

La **mesure en degrés** d'un angle est le rapport de la longueur L de l'arc intercepté sur la longueur C de la circonférence du cercle multiplié par 360, soit :

$$\theta=\frac{L}{C}\times 360 \text{ degrés.}$$

Un **angle au centre de 1 degré** est un angle au centre qui intercepte sur la circonférence un arc de 1 degré, soit 1/360 de la longueur de la circonférence. Le symbole du degré est °.

Minute et seconde

Un angle de 1° est subdivisé en 60 min et un angle de 1 min est subdivisé en 60 s. Le symbole de la minute est ', et celui de la seconde est ".

Radian

La **mesure en radians** d'un angle est le rapport de la longueur L de l'arc qu'il intercepte sur la longueur r du rayon du cercle

$$\theta=\frac{L}{r} \text{ radians.}$$

Un **angle au centre de 1 radian** est un angle au centre qui intercepte sur la circonférence un arc de 1 radian, soit un arc dont la longueur est égale au rayon. Le symbole du radian est rad.

REMARQUE

La constante 360 qui intervient dans la définition de la mesure d'un angle en degrés vient des Babyloniens, qui utilisaient un système de numération de base 60, soit le système sexagésimal.

Pour un rayon unitaire, la mesure de l'angle est égale à la mesure de l'arc. Le radian est un rapport de longueurs.

La mesure d'un angle A se note $m\angle A$, surtout lorsque A représente un sommet d'un polygone et que l'on veut désigner la mesure de l'angle formé par les droites se rencontrant en ce sommet. Cependant, pour alléger l'écriture, on représente souvent un angle et sa mesure par une lettre grecque α (alpha), β (bêta), γ (gamma), δ (delta) ou θ (thêta).

EXEMPLE 7.1.1

Calculer la mesure en radians, en degrés décimaux, et en degrés, minutes et secondes d'un angle au centre d'un cercle dont le rayon mesure 11 cm, qui intercepte un arc de 22 cm.

Solution

La mesure d'un angle en radians est le rapport de la longueur de l'arc qu'il intercepte sur le rayon du cercle $\theta = \frac{L}{r} = \frac{22 \text{ cm}}{11 \text{ cm}} = 2$ rad.

La mesure d'un angle en degrés est le rapport de la longueur de l'arc qu'il intercepte sur la circonférence du cercle multipliée par 360. Il faut donc calculer d'abord la longueur de la circonférence :

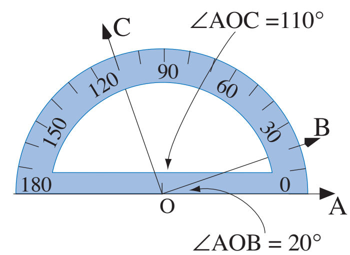
$$C = 2\pi r = 22\pi \text{ cm}.$$

La mesure de l'angle en degrés décimaux est

$$\theta = \frac{L}{C} \times 360 = \frac{22 \text{ cm}}{22\pi \text{ cm}} \times 360 = \frac{360}{\pi} = 114{,}591\,5...^\circ.$$

Pour exprimer la partie décimale en minutes, il faut la multiplier par 60, ce qui donne 0,591 5... × 60 = 35,493 5...'. Pour exprimer la nouvelle partie décimale, on la multiplie par 60, ce qui donne 0,493 5... × 60 = 29,612...". La mesure de l'angle est donc environ de 114°35'30".

REMARQUE
Quand on utilise un rapporteur, on mesure un angle en faisant coïncider son sommet avec le centre d'un cercle et la graduation du rapporteur est basée sur la longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre.



EXEMPLE 7.1.2

Calculer la mesure en degrés et en radians d'un angle au centre qui intercepte la moitié de la circonférence.

Solution

Si un angle intercepte la moitié de la circonférence, la longueur de l'arc intercepté est $C/2$ et, par définition de la mesure d'un angle en degrés, on a

$$\theta = \frac{L}{C} \times 360 = \frac{C/2}{C} \times 360 = \frac{1}{2} \times 360 = 180^\circ.$$

Par ailleurs, puisque la longueur de la circonférence est $C = 2\pi r$, la moitié de la circonférence est πr et, par définition de la mesure d'un angle en radians, on a

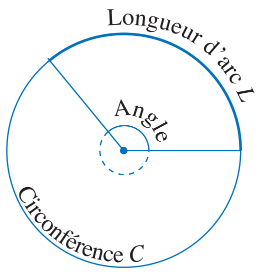
$$\theta = \frac{\pi r}{r} = \pi \text{ rad}.$$

Relation entre les unités de mesure

DéfinTrigo02

Si on veut calculer la mesure en radians d'un angle dont on connaît la mesure en degrés, ou inversement, il suffit de se rappeler que les unités de mesure d'angles sont définies à l'aide du rapport de l'arc intercepté L à la circonférence C du cercle. Par conséquent, le rapport de l'angle au centre qui intercepte l'arc L à l'angle au centre qui intercepte la circonférence C est le même quelles que soient les unités de mesure

$$\frac{L}{C} = \frac{\theta \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{\alpha°}{360°}.$$

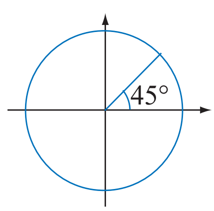


$$\frac{L}{C} = \frac{\theta \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{\alpha°}{360°}$$

Pour utiliser cette relation, on substitue au symbole de l'angle la mesure connue, en degrés ou en radians, puis on calcule le terme inconnu de la proportion :

$$\frac{\theta \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{\alpha°}{360°}.$$

EXEMPLE 7.1.3



Calculer la mesure en radians d'un angle de 45° et trouver l'équivalent en décimales.

Solution

En substituant 45° à $\alpha°$ dans $\frac{\theta \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{\alpha°}{360°}$, on obtient

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{45°}{360°}; \text{ donc } \theta = \frac{45°}{360°} \times 2\pi = \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}.$$

Pour exprimer cette mesure en décimales, il suffit de remplacer π par sa valeur numérique et d'effectuer la division

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 0{,}785\,3\ldots \text{ rad}.$$

REMARQUE

En pratique, pour passer d'une unité de mesure à l'autre, on multiplie par $180°/\pi$ rad ou par π rad/180° selon le cas. En effet, la relation entre ces unités de mesure est une variation directement proportionnelle.

EXEMPLE 7.1.4

Trouver l'équivalent en degrés d'un angle de 1 rad. Spécifier le nombre de minutes et de secondes de la mesure. (Un degré vaut 60 minutes d'arc et une minute d'arc vaut 60 secondes d'arc.)

Solution

En substituant 1 à θ dans $\frac{\theta \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{\alpha°}{360°}$, on obtient

$$\frac{1 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{\alpha°}{360°}, \text{ d'où } \alpha° = \frac{1}{2\pi} \times 360° = 57{,}29577\ldots°.$$

Pour exprimer cette mesure en degrés, minutes et secondes, il faut écrire la partie décimale en base 60, en la multipliant par 60

$$0{,}295\,77 \times 60 = 17{,}746\,77\ldots\ '.$$

On doit à nouveau exprimer la partie décimale en base 60,

$$0{,}746\,77 \times 60 = 44{,}806\ldots\ ''.$$

La mesure de l'angle est donc d'environ 57°17' 45".

REMARQUE

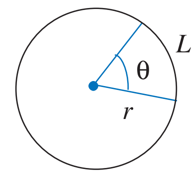
Dans les calculs sur des mesures d'angles, il faut tenir compte du nombre de décimales et du nombre de chiffres significatifs des mesures quand on écrit le résultat des opérations.

0,79 rad par exemple, signifie que la longueur de l'arc intercepté est égale à 79% de la longueur du rayon du cercle.

Longueur et vitesse

DéfinTrigo03

La mesure en radians d'un angle est particulièrement intéressante, car elle établit une relation simple entre la longueur de l'arc intercepté, le rayon du cercle et la mesure de l'angle. Si on connaît la mesure de l'angle et le rayon, on peut calculer directement la longueur de l'arc. En effet, puisque

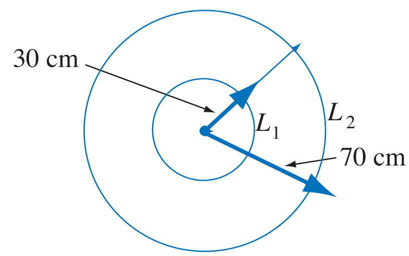


$$\theta = \frac{L}{r} \text{ rad, alors } L = r\,\theta$$

où θ est la mesure de l'angle en radians, r le rayon du cercle et L la longueur de l'arc intercepté.

EXEMPLE 7.1.5

Calculer les longueurs respectives L_1 et L_2 des arcs de la figure présentée ci-contre, sachant que l'angle au centre est de 1,2 rad.



Solution

$$L = r\,\theta$$
$$L_1 = 30 \text{ cm} \times 1{,}2 = 36 \text{ cm}$$
$$L_2 = 70 \text{ cm} \times 1{,}2 = 84 \text{ cm}$$

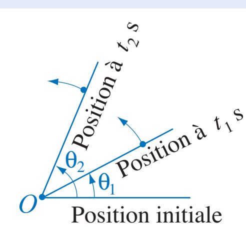
Vitesse angulaire

La vitesse angulaire d'un corps est la vitesse de rotation du corps autour d'un axe. On la représente par la lettre grecque ω (oméga) et on la définit comme la mesure de l'angle parcouru par unité de temps. Elle s'exprime en radians par seconde (rad/s), en tours par seconde (r/s), en tours par minute (r/min) ou en hertz (Hz).

Vitesse angulaire moyenne

La demi-droite représentée ci-contre en rotation autour d'un point O. Soit θ_1 rad, la mesure de l'angle entre la position initiale et la position au temps t_1 s, et θ_2 rad, la mesure de l'angle entre la position initiale, et sa position au temps t_2 s. La vitesse angulaire moyenne de la demi-droite durant l'intervalle de temps $[t_1;\, t_2]$ est

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$



$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Lorsque le rapport $\Delta\theta/\Delta t$ est constant quel que soit l'intervalle de temps, la vitesse angulaire ω est constante. Il existe alors une relation de proportionnalité directe entre l'angle parcouru et le temps t, soit :

$$\theta = \omega t \text{ ou encore } \omega = \frac{\theta}{t} \text{ rad/s.}$$

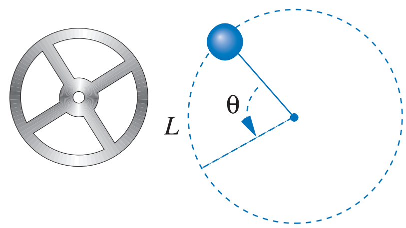
Dans le présent ouvrage, nous ne considérons que des situations où la vitesse angulaire est constante.

REMARQUE

Lorsque l'angle initial est non nul, on a une relation affine

$$\theta = \omega\, t + \phi$$

où θ est l'angle parcouru, ω est la vitesse angulaire, t est le temps et ϕ est l'angle initial.



Si un corps décrit une trajectoire circulaire à vitesse constante, on peut également définir sa vitesse linéaire, c'est-à-dire la distance qu'il parcourt (longueur de l'arc) par unité de temps :

$$L = vt, \text{ donc } v = \frac{L}{t} \text{ m/s}.$$

Et, puisque $L = r\theta$, la relation entre les deux vitesses est $v = r\,\omega$. En effet ,

$$v = \frac{L}{t} = \frac{r\theta}{t} = r\frac{\theta}{t} = r\omega.$$

REMARQUE

La relation $v = r\omega$ décrit également la correspondance entre la vitesse d'un point sur la circonférence d'une roue et la vitesse angulaire de la roue, ou encore la vitesse d'une courroie entraînant une poulie et la vitesse angulaire de la poulie.

THÉORÈME

Relation entre la vitesse angulaire et la vitesse linéaire d'un corps

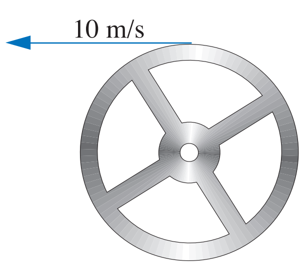
Soit P, un point qui décrit une trajectoire circulaire à une vitesse angulaire constante ω. La vitesse linéaire de P est

$$v = r\omega$$

où v est la vitesse linéaire (m/s) de P, r est le rayon (m) de la trajectoire circulaire et ω est la vitesse angulaire (rad/s) de P.

EXEMPLE 7.1.6

Une poulie de 0,5 m de rayon est entraînée par une courroie qui se déplace à une vitesse de 10 m/s. Calculer la vitesse angulaire de la poulie.



Solution

La relation entre les vitesses est

$$v = r\omega$$

Puisqu'on cherche la vitesse angulaire, on isole ω et on substitue les données aux variables

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{10 \text{ m/s}}{0{,}5 \text{ m}} = 20 \text{ rad/s}.$$

EXEMPLE 7.1.7

Une roue de voiturette de 0,4 m de diamètre a une fréquence de rotation de 300 r/min. Déterminer la vitesse linéaire de la roue en kilomètre par heure.

Solution

La vitesse angulaire de la roue est de 300 r/min ou 5 r/s. La mesure en radians d'un tour est de 2π rad. La vitesse angulaire est donc $\omega = 10\pi$ rad/s.

La relation entre la vitesse linéaire et la vitesse angulaire d'une roue est

$$v = r\omega.$$

Ainsi, $v = (0{,}2 \text{ m}) \times (10\pi \text{ rad/s}) = 6{,}283\,1... \text{ m/s}$

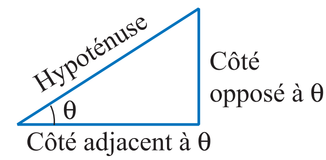
La distance parcourue en 3 600 s est donc : $d = 22\,619{,}46...$ m, et la vitesse linéaire de la roue est d'environ 22,6 km/h.

Rapports trigonométriques

DéfinTrigo04

Rapports trigonométriques

On appelle **rapport trigonométrique** le rapport de deux côtés d'un triangle rectangle. Les six rapports trigonométriques sont



Côtés d'un triangle rectangle

le sinus d'un ngle θ : $\sin\theta = \dfrac{\text{côté opposé à } \theta}{\text{hypoténuse}}$;

le cosinus d'un angle θ : $\cos\theta = \dfrac{\text{côté adjacent à } \theta}{\text{hypoténuse}}$;

la tangente d'un angle θ : $\tan\theta = \dfrac{\text{côté opposé à } \theta}{\text{côté adjacent à } \theta}$;

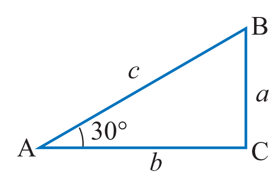
la cotangente d'un angle θ : $\cot\theta = \dfrac{\text{côté adjacent à } \theta}{\text{côté opposé à } \theta}$;

la sécante d'un angle θ : $\sec\theta = \dfrac{\text{hypoténuse}}{\text{côté adjacent à } \theta}$;

la cosécante d'un angle θ : $\csc\theta = \dfrac{\text{hypoténuse}}{\text{côté opposé à } \theta}$.

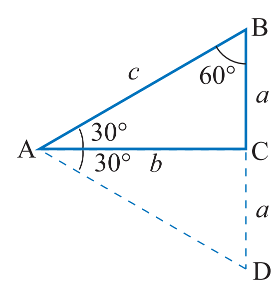
EXEMPLE 7.1.8

Soit le triangle rectangle représenté ci-contre, où un angle mesure 30°, et où le côté opposé à l'angle de 30° est désigné par a, le côté adjacent à cet angle par b et l'hypoténuse par c. Déterminer les six rapports trigonométriques de l'angle de 30°.



■ *Solution*

Si on reproduit le triangle ABC par symétrie au côté AC, on obtient le triangle équilatéral ABC et les côtés AB et BD sont de même longueur. On a donc $2a = c$ et $a = c/2$. On peut déterminer la longueur du troisième côté en appliquant le théorème de Pythagore.



$$a^2 + b^2 = c^2, \text{ donc } \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = c^2.$$

En isolant b, on obtient

$$b^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{4c^2 - c^2}{4} = \frac{3c^2}{4} \text{ et } b = \frac{\pm c\sqrt{3}}{2}.$$

La valeur négative étant à rejeter, on détermine les rapports trigonométriques de l'angle de 30°, ou $\pi/6$ rad, en prenant la valeur positive

$$\sin 30° = \frac{c/2}{c} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{c\sqrt{3}/2}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{c/2}{c\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30° = \frac{c\sqrt{3}/2}{c/2} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30° = \frac{c}{c\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc 30° = \frac{c}{c/2} = 2$$

REMARQUE

L'angle de 30° est un **angle remarquable**, tout comme les angles de 45° et de 60°. On peut facilement déterminer les rapports trigonométriques de ces angles à l'aide du théorème de Pythagore et d'autres théorèmes de la géométrie euclidienne.

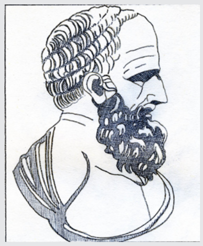
L'exemple 6.1.8 illustre comment on détermine géométriquement la valeur des fonctions trigonométriques pour des angles remarquables.

Un peu *d'histoire*

HIPPARQUE ET EUCLIDE

vers le III^{e} siècle avant notre ère

L'astronome et mathématicien grec Hipparque conçut un procédé trigonométrique basé sur le calcul des cordes pour décrire mathématiquement des observations astronomiques. Il introduisit en Grèce la division du cercle en 360 degrés, du degré en 60 minutes et de la minute en 60 secondes. En divisant le diamètre en 120 parties, il calcula la valeur des cordes qui sous-tendent les arcs de cercle par rapport au diamètre (NH Hipparque01-02, Hipparque)..



Hipparque

En géographie, il introduisit les parallèles et méridiens qui servent à décrire la position dans un repère de coordonnées et sont à l'origine du système de latitude et de longitude. La sphère étant quadrillée par des cercles correspondant à des angles au centre de 15°, on mesure la latitude à partir de l'équateur et la longitude à partir de l'observatoire de Greenwich, en Angleterre.

Longitudes et latitudes

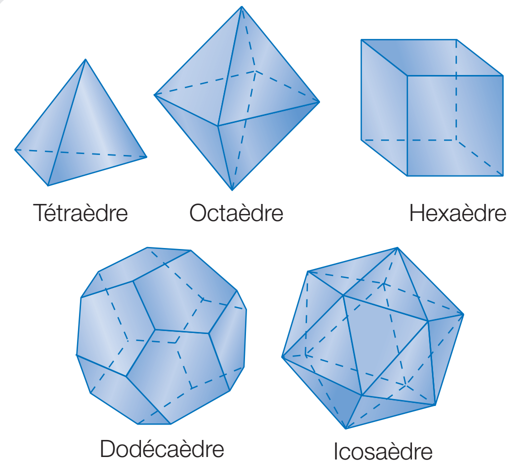
Euclide est un mathématicien grec connu surtout par ses ouvrages, car on sait peu de choses de sa vie. L'influence de Platon (~427 à~347) qui semble se manifester dans l'œuvre d'Euclide, laisse supposer que ce dernier vécut après le philosophe ou à la même époque. On sait également qu'Euclide s'installa à Alexandrie où il fonda l'école de mathématiques de l'université d'Alexandrie. On l'a longtemps confondu avec le philosophe Euclide de Mégare dont il est question dans le *Théétète* de Platon NH Euclide01).

Euclide

Euclide rédigea une dizaine d'ouvrages. Le plus connu, ***Les Éléments***, est divisé en treize livres, dont les six premiers portent sur la géométrie plane (points, droites, cercles, parallélogrammes, etc.). Les livres 7 à 9 traitent d'arithmétique et de théorie des nombres; le dixième aborde les nombres irrationnels et les trois derniers, la géométrie des solides ainsi que les cinq corps réguliers platoniciens (tétraèdre, hexaèdre, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre).

L'axiome qui caractérise la géométrie euclidienne est le suivant (dans une écriture moderne équivalente) :

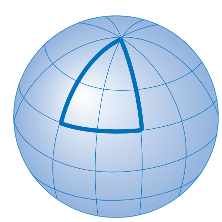
> « D'un point hors d'une droite, on peut tracer, dans le même plan, une droite et une seule qui ne coupe pas la première. »



Corps réguliers de Platon

L'existence de droites parallèles dans un plan est l'une des conséquences importantes de cet axiome qui caractérise ce que l'on appelle un **espace euclidien** dont la structure interne est régie par l'existence de parallèles. D'autres géométries basées sur des axiomes différents, qui impliquent l'existence de plusieurs parallèles ou l'absence de toute parallèle, furent élaborées au XIX^{e} siècle par Nikolaï Lobatchevski, Janos Bolyai et Bernhard Riemann. Les théorèmes de ces géométries sont différents de ceux de la géométrie euclidienne et la structure spatiale est différente. Par exemple, dans la géométrie sphérique de Riemann. Dans cette géométrie, les **grands cercles** d'une sphère, soit les cercles ayant même rayon que la sphère, jouent le rôle des droites de la géométrie d'Euclide. Ainsi, deux droites quelconques se rencontrent toujours en deux points, de sorte qu'il n'existe pas de parallèles. De plus, la somme des angles d'un triangle sphérique est toujours plus grande que 180°, comme l'illustre la figure suivante.

Il existe une devinette basée sur cette caractéristique. Un chasseur quitte son camp, marche 1 km vers le sud, puis 1 km vers l'est et tue un ours. Il marche ensuite 1 km vers le nord et parvient à son camp. Quelle est la couleur de l'ours?



Trajet du chasseur

L'ours est blanc. En effet, pour qu'un tel parcours permette au chasseur de revenir à son point de départ, il doit nécessairement partir du pôle Nord.

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

Un peu d'histoire

LE NOMBRE π

Le rapport de la circonférence d'un cercle sur son diamètre a intéressé plusieurs mathématiciens au cours de l'histoire. Euler fut le premier à désigner ce nombre par la lettre π. Un archéologue français a exhumé à Suze une tablette sur laquelle la valeur utilisée pour π est de 3 1/8. Archimède (~287 à ~212), en utilisant des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle parvint à montrer que 223/71 < π <220/70. Un mathématicien chinois du Moyen Âge donna le nombre rationnel 355/113 comme valeur approximative de π. Cette fraction est plus précise que 220/70 (ou 22/7) qui est égal à 3,142 8... alors que 355/113 = 3,141 592 9...

Claude Ptolémée d'Alexandrie (vers 90 à 168), auteur de l'Almageste, donna l'approximation

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3{,}14166...$$

Vers 628, le mathématicien indien Brahmagupta proposa $\sqrt{10}$ comme approximation de π, soit 3,162 27...

Le mathématicien hollandais Ludolph Van Ceulen (1540-1610) avec l'aide de sa femme Adriana Symonsz, calcula 35 décimales de π. Le mathématicien français François Viète (1540-1603) découvrit la première formule exacte de π qui est le premier produit infini, soit :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} ...$$

Leibniz démontra que $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$

et, puisque arctan 1 = π/4, alors

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

Deux amis, les mathématiciens lord William Brouncker (1620-1684) et John Wallis (1616-1703), donnèrent chacun une formule de π. Lord Brouncker exprima π sous forme de fraction continue :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + ...}}}$$

alors que John WALLIS proposa le produit infini

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2\times2\times4\times4\times6\times6...}{1\times3\times3\times5\times5\times7...}$$

La convergence de ces expressions n'est cependant pas très rapide et des expressions basées sur l'intégration convergent plus rapidement. De nos jours, on emploie des formules de ce genre pour calculer autant de décimales du nombre π que l'on veut. La forme décimale exacte de π est cependant inaccessible, car c'est un nombre irrationnel. Son expression exacte comporte donc une infinité de décimales sans motif périodique.

7.2 Exercices

1. Calculer la mesure en degrés d'un angle au centre d'un cercle de rayon r qui intercepte sur la circonférence un arc de longueur L.
   a) r = 5 cm et L = 12 cm
   b) r = 2 m et L = 6,5 m

2. Calculer la mesure en radians d'un angle au centre d'un cercle de rayon r qui intercepte sur la circonférence un arc de longueur L.
   a) r = 4 cm et L = 5 cm
   b) r = 3,47 m et L = 2,38 m

3. Calculer la mesure en radians d'un angle au centre d'un cercle de circonférence C qui intercepte sur la circonférence un arc de longueur L.
   a) C = 48 m et L = 12 m
   b) C = 36,28 cm et L = 15 cm

4. Exprimer les angles suivants en radians.
   a) 30° e) 72°
   b) 45° f) 120°
   c) 90° g) 315°
   d) 36° h) 240°

5. Exprimer les angles suivants en degrés.
   a) π rad e) 1 rad
   b) 2π rad f) 2,618 rad
   c) π/3 rad g) 4,189 rad
   d) 5π/4 rad h) 5,498 rad

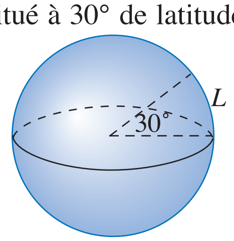
6. Calculer la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de θ rad (ou α°) dans un cercle de rayon r.
   a) θ = 2π rad et r = 5 cm
   b) α = 135° et r = 8 m

7. Calculer le rayon r et la circonférence C du cercle dont un angle au centre de θ rad (ou $\alpha°$) intercepte un arc de longueur L.
   a) $\theta = 2\pi$ rad et $L = 20$ cm
   b) $\alpha = 25°$ et $L = 12$ m

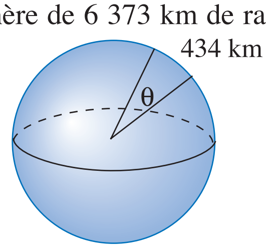
8. Une roue tourne à raison de 24 r/min. Exprimer cette fréquence de rotation en :
   a) tours par seconde; c) radians par seconde.
   b) radians par minute;

9. L'aiguille des minutes d'une horloge a une longueur de 6 cm. Quelle est la longueur de l'arc décrit par l'extrémité de l'aiguille :
   a) en 20 min ? b) en 35 min ?

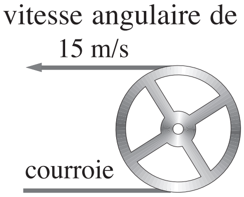
10. En supposant que la terre est une sphère de 6 373 km de rayon, calculer la distance à l'équateur d'un point situé à 30° de latitude nord.



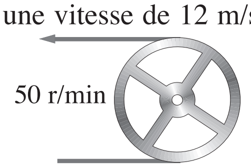
11. Deux villes sont situées à 434 km l'une de l'autre, sur un même méridien. Calculer la différence de leurs latitudes respectives en supposant que la terre est une sphère de 6 373 km de rayon.



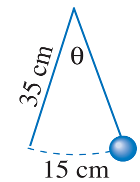
12. Une roue de 3 m de diamètre est entraînée par une courroie qui se déplace à une vitesse de 15 m/s. Calculer la vitesse angulaire de la roue.



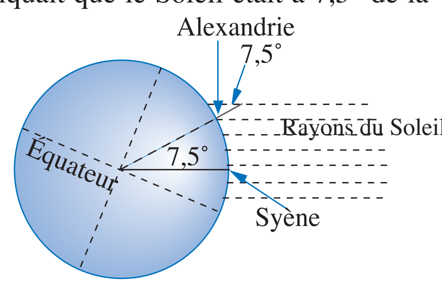
13. Calculer le diamètre d'une poulie entraînée à une vitesse angulaire de 50 r/min par une courroie se déplaçant à une vitesse de 12 m/s.



14. L'extrémité d'un pendule de 35 cm de longueur décrit un arc de cercle de 15 cm. Quel est l'angle décrit par le pendule ?



15. Ératosthène, bibliothécaire à Alexandrie, disposait de tous les renseignements sur les événements curieux observés dans l'empire d'Alexandre. Il apprit notamment qu'à un certain jour de l'année la lumière du Soleil se réfléchissait à midi dans l'eau d'un puits profond de Syène (aujourd'hui Assouan), non loin de la première cataracte du Nil. À ce moment, le Soleil était donc à la verticale du puits. Le même jour à midi, dans la ville d'Alexandrie, située à 800 km au nord, l'ombre d'un pilier indiquait que le Soleil était à 7,5° de la verticale.



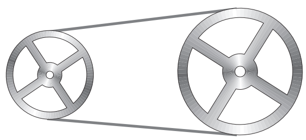
En supposant que les rayons du Soleil sont parallèles, les rayons de la sphère terrestre aboutissant à Syène et à Alexandrie forment un angle de 7,5° et ils interceptent un arc dont la longueur est de 800 km (unité de mesure moderne).
   a) Utiliser ces renseignements pour calculer la circonférence de la Terre comme le fit Ératosthène.
   b) Archimède, qui fut un ami d'Ératosthène détermina en calculant les périmètres de polygones inscrits et de polygones circonscrits à un cercle que la valeur de π est comprise entre les valeurs 22/7 et 223/71. À l'aide de ces deux valeurs, estimer le rayon de la Terre.

16. Une automobile se déplace à une vitesse de 75 km/h. Sachant que le diamètre des roues est de 0,68 m, calculer la vitesse angulaire des roues en tours par minute.

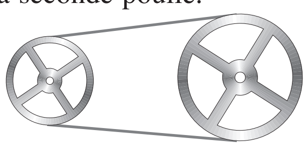
17. Représenter graphiquement la vitesse angulaire d'une roue d'automobile dont le diamètre est de 0,70 m en fonction de la vitesse de l'auto.

18. Une poulie de rayon r_1 et de vitesse angulaire ω_1 entraîne une poulie de rayon r_2. Montrer que le rapport des vitesses angulaires est égal au rapport inverse des rayons.

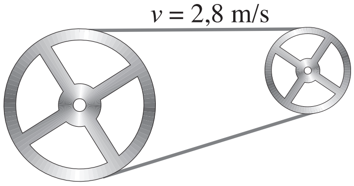
19. Une poulie de 0,30 m de diamètre entraîne une poulie de 0,48 m de diamètre. La poulie de 0,30 m a une vitesse angulaire de 50 tr/min. Calculer la vitesse angulaire de la seconde poulie.



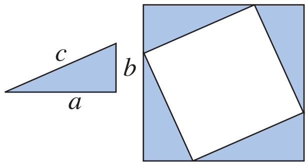
20. Une poulie de 0,52 m de diamètre entraîne une poulie de 0,28 m de diamètre. La poulie de 0,52 m a une vitesse angulaire de 68 tr/min. Calculer celle de la seconde poulie.



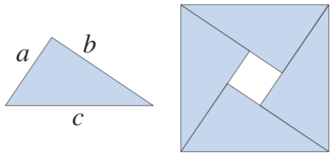
21. Une poulie de 0,52 m de diamètre entraîne une poulie de 0,24 m de diamètre. La vitesse de la courroie est de 2,8 m/s. Calculer la vitesse angulaire de chacune des deux poulies.



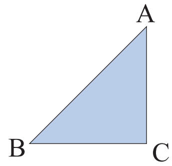
22. Soit un triangle rectangle où les mesures des côtés de l'angle droit sont a et b alors que la mesure de l'hypoténuse est c. On reproduit ce triangle de façon à former la figure suivante. Démontrer à l'aide de cette figure la relation de Pythagore : « Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit ». (Suggestion : calculer l'aire du carré de deux façons distinctes.)



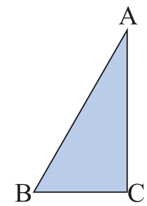
23. Soit un triangle rectangle où les mesures des côtés de l'angle droit sont a et b alors que la mesure de l'hypoténuse est c. On reproduit ce triangle de façon à former la figure suivante. Démontrer la relation de Pythagore à l'aide de cette figure. (Suggestion : calculer l'aire du carré de deux façons distinctes.)



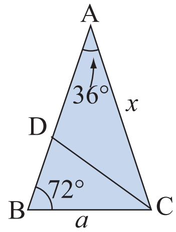
24. Le triangle rectangle suivant a un angle de 45° (ou $\pi/4$ rad). Déterminer les valeurs des six rapports trigonométriques d'un angle de 45° à l'aide de ce triangle.



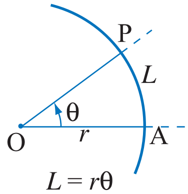
25. Le triangle rectangle suivant a un angle de 60° (ou $\pi/3$ rad). Déterminer les valeurs des six rapports trigonométriques de l'angle de 60° à l'aide de ce triangle.



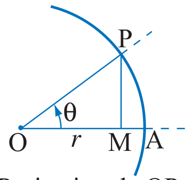
26. Le triangle isocèle suivant a un angle de 36° (ou $\pi/10$ rad) et deux angles de 72° (ou $\pi/5$ rad).



a) En utilisant le fait que la bissectrice d'un angle d'un triangle divise le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents, exprimer la longueur du côté x en fonction du côté a.
b) Utiliser le résultat obtenu en a) pour déterminer les valeurs des fonctions trigonométriques pour des angles de 18°, 36°, 54° et 72°.



$L = r\theta$



Projection de OP

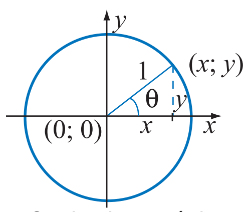
DéfinTrigo05

7.3 Fonctions trigonométriques

Soit A un point situé à une distance r de l'origine O de la demi-droite. Nous avons vu que, si la demi-droite OA subit une rotation d'un angle θ autour de l'origine O, la relation entre la longueur de l'arc décrit par A, l'angle θ et le rayon est

$$L = r\theta \text{ où } \theta \text{ est mesurée en radians, ou encore } \overset{\frown}{\mathrm{AP}} = r\theta$$

La longueur de l'arc décrit dépend de l'angle θ et du rayon r. Mais d'autres grandeurs aussi dépendent de θ et de r. Par exemple, dans la seconde figure, en abaissant du point P une perpendiculaire au segment OA, on obtient deux nouveaux segments de droite, OM la **projection horizontale** du segment OP et MP la **projection verticale** du segment OP. La longueur de chacun de ces segments dépend également de θ et de r. Dans ce contexte, en généralisant la définition des rapports trigonométriques, on obtient les **fonctions trigonométriques**.



Cercle trigonométrique

Cercle trigonométrique

On appelle **cercle trigonométrique** un cercle de rayon 1 centré à l'origine d'un système d'axes cartésien. L'équation du cercle trigonométrique est

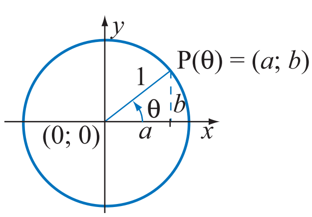
$$x^2 + y^2 = 1.$$

Dans un cercle trigonométrique, les angles se mesurent à partir de la direction positive de l'axe des x. La mesure est positive dans le sens antihoraire et négative dans le sens horaire. Tout angle au centre θ est formé par deux rayons du cercle, dont l'un est sur l'axe des x et à droite de l'origine, tandis que l'autre intercepte sur la circonférence un point de coordonnées $(a; b)$ désigné par $P(\theta)$.

Fonctions trigonométriques

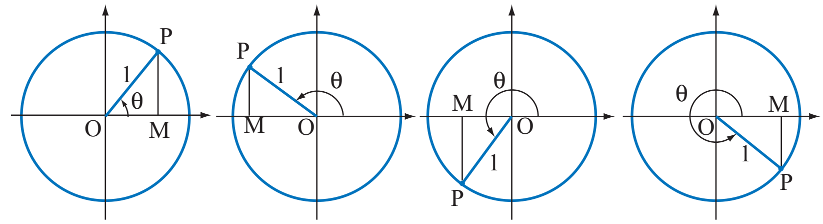
Soit un cercle trigonométrique et un angle θ, tel que P(θ) = $(a; b)$. Les **fonctions trigonométriques** sont définies comme suit :

le sinus de l'angle θ :	$\sin\theta = b;$
le cosinus de l'angle θ :	$\cos\theta = a;$
la tangente de l'angle θ :	$\tan\theta = \dfrac{b}{a};$
la cotangente de l'angle θ :	$\cot\theta = \dfrac{a}{b};$
la sécante de l'angle θ :	$\sec\theta = \dfrac{1}{a};$
la cosécante de l'angle θ :	$\csc\theta = \dfrac{1}{b}.$

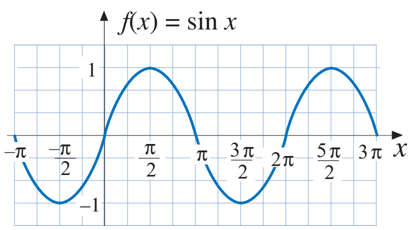


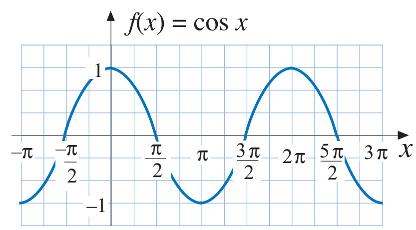
Le point $P(\theta)$ associé à θ

Les projections verticale et horizontale de OP sont définies quelle que soit la valeur de l'angle θ. La mesure de ces projections est positive ou négative selon la valeur de θ comme l'illustrent les figures suivantes.



En représentant les mesures d'angles sur un axe horizontal et les longueurs des projections sur l'axe vertical, on peut tracer le graphique des fonctions sinus et cosinus.

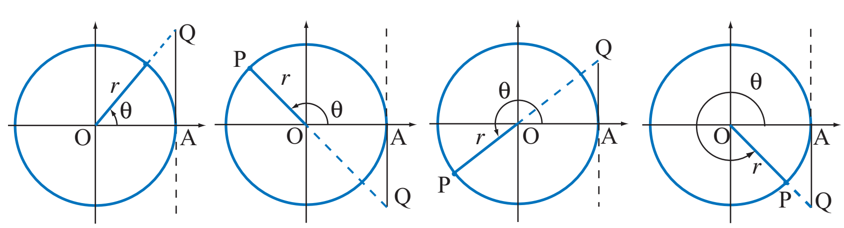




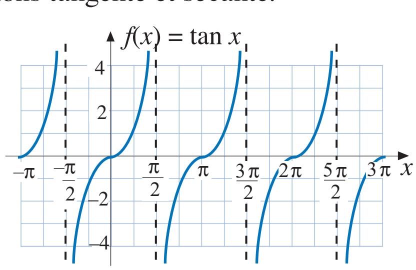
En examinant l'illustration présentée ci-contre, on constate que les triangles OPM et OQA sont semblables. De plus, dans le triangle OQA, le côté adjacent à l'angle θ est égal à 1. On a donc :

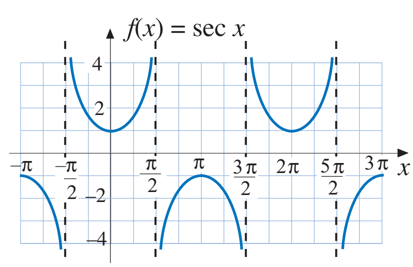
$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AQ}}{1} \text{ et } \sec\theta = \frac{1}{a} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OQ}}{1}.$$

Par conséquent, la tangente de l'angle θ est égale à la longueur du segment AQ et la sécante de l'angle θ est égale à la longueur du segment OQ. Lorsque l'angle θ varie, le segment AQ peut être au-dessus ou au-dessous de l'axe horizontal.



En représentant les mesures d'angles sur un axe horizontal et les longueurs des segments AQ et OQ en ordonnée, on peut tracer le graphique des fonctions tangente et sécante.



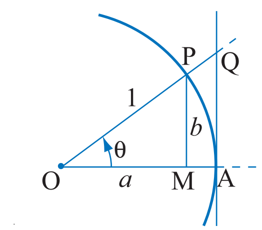


DéfinTrigo06

REMARQUE

Lorsque l'on traite des fonctions trigonométriques, il est d'usage d'utiliser la lettre x plutôt que θ pour désigner la variable indépendante. De plus, par convention, une mesure d'angle effectuée dans le sens antihoraire est positive et une mesure effectuée dans le sens horaire est négative. L'unité de mesure la plus courante est le radian.

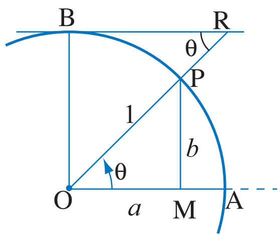
Dans les graphiques, on remarque les valeurs particulières que sont les angles de 0, π/2, π, 3π/2 rad et leurs multiples.



$\tan\theta = \overline{AQ}$ et $\sec\theta = \overline{OQ}$

REMARQUE

Par cohérence algébrique, la longueur $\overline{OQ}$ est négative lorsque cos θ est négatif, c'est-à-dire si $\overline{OM}$ (figure ci-dessus) est dans le sens inverse de celui de l'axe horizontal.

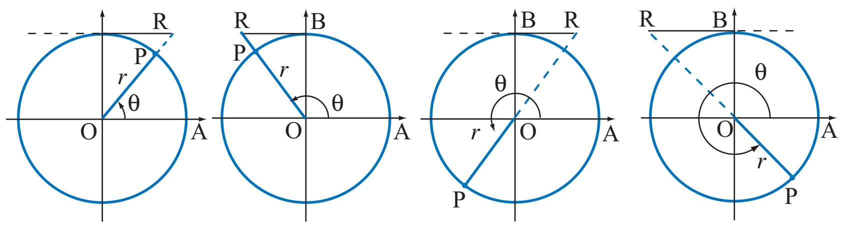


$\cot\,\theta = \overline{\text{BR}}$ et $\csc\,\theta = \overline{\text{OR}}$

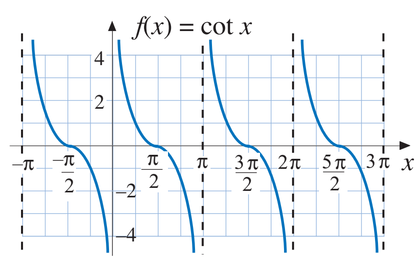
En examinant la figure présentée ci-contre, on constate que les triangles OPM et OBR sont semblables. De plus, dans le triangle OBR, le côté opposé à l'angle θ est égal à 1,

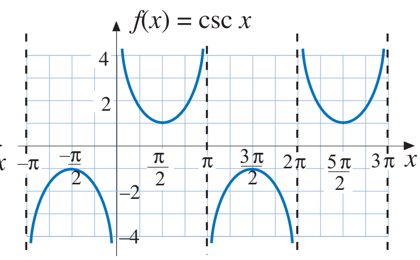
$$\cot\theta = \frac{a}{b} = \frac{\overline{\text{BR}}}{\overline{\text{OB}}} = \overline{\text{BR}} \text{ et } \csc\theta = \frac{1}{b} = \frac{\overline{\text{OR}}}{\overline{\text{OB}}} = \overline{\text{OR}}.$$

Par conséquent, la cotangente de l'angle θ est égale à la longueur du segment BR et la sécante de l'angle θ est égale à la longueur du segment OR. Lorsque l'angle θ varie, le segment BR peut être au-dessus ou au-dessous de l'axe horizontal.



En représentant les mesures d'angles sur un axe horizontal et les longueurs des segments BR et OR sur l'axe vertical, on peut tracer le graphique des fonctions cotangente et cosécante.





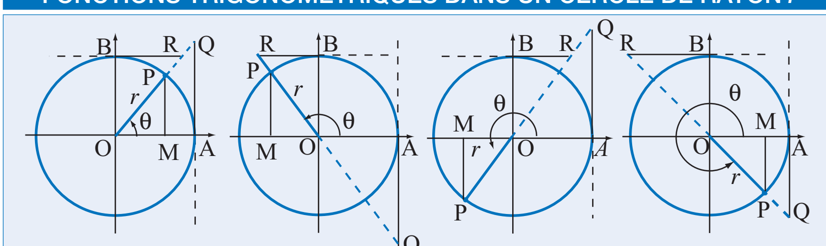
REMARQUE

La calculatrice donne directement seulement la valeur des fonctions sinus, cosinus et tangente. Pour calculer les valeurs des fonctions cotangente, cosécante et sécante, on a recours aux identités suivantes, qui découlent directement de la définition des fonctions trigonométriques.

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\text{et } \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Le tableau suivant est un résumé ce qui précède.

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS UN CERCLE DE RAYON *r*



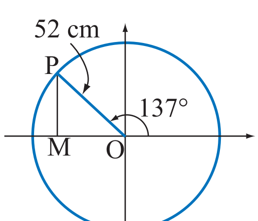
$\overline{\text{OA}} = \overline{\text{OB}} = \overline{\text{OP}} = r$

$r \sin\theta = \overline{\text{MP}}$
$r \cos\theta = \overline{\text{OM}}$

$r \tan\theta = \overline{\text{AQ}}$
$r \cot\theta = \overline{\text{BR}}$

$r \sec\theta = \overline{\text{OQ}}$
$r \csc\theta = \overline{\text{OR}}$

EXEMPLE 7.3.1



Calculer la longueur orientée de la projection verticale et de la projection horizontale du rayon de 52 cm faisant un angle de 137° avec l'horizontale.

■ *Solution*

La longueur orientée de la projection verticale est

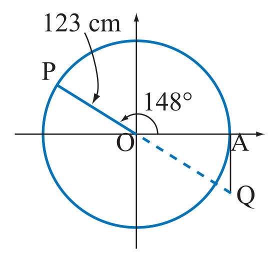
$$\overline{MP} = r\sin\theta = 52\sin 137° = 35,463... \approx 35,46 \text{ cm.}$$

La longueur orientée de la projection horizontale est :

$$\overline{OM} = r\cos\theta = 52\cos 137° = -38,030... \approx -38,03 \text{ cm.}$$

EXEMPLE 7.3.2

Calculer la longueur des segments $\overline{AQ}$ et $\overline{OQ}$ de la figure présentée ci-contre.



■ *Solution*

Selon la définition de la tangente,

$$\overline{AQ} = r\tan\theta = 123\tan 148° = -76,858... \approx -76,86 \text{ cm.}$$

Selon la définition de la sécante,

$$\overline{OQ} = r\sec\theta = 123\sec 148° = \frac{123}{\cos 148°} = -145,038... \approx -145,04 \text{ cm.}$$

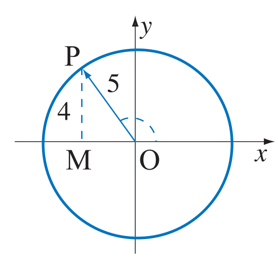
Équations trigonométriques

Une équation trigonométrique est une équation dont l'inconnue est soumise à une règle de correspondance trigonométrique. La recherche de solutions d'une équation trigonométrique mène tout naturellement à la définition de fonctions inverses des fonctions trigonométriques.

EXEMPLE 7.3.3

Calculer en radians et en degrés, la mesure de l'angle déterminé par le rayon et la direction positive de l'axe des x dans la figure présentée ci-contre.

DéfinTrigo07

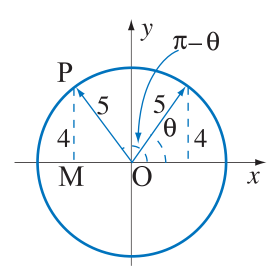


■ *Solution*

Selon la définition du sinus, $\sin\theta = \dfrac{\overline{MP}}{\overline{OP}} = \dfrac{4}{5}$.

Pour calculer la préimage avec une calculatrice, on utilise les touches inv sin ou 2nd sin, selon le type de calculatrice et la séquence des touches peut varier. On obtient dans tous les cas

$$\arcsin\frac{4}{5} = 0,9273 \text{ rad.}$$



Cette valeur de θ n'est manifestement pas la valeur recherchée, car la mesure de l'angle droit est de 1,57 rad. Cependant, on peut « corriger » le résultat en soustrayant de π rad et on obtient :

$$\pi - 0,9273 = 3,1416 - 0,9273 = 2,2143 \text{ rad.}$$

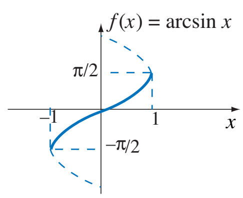
Si la calculatrice est en mode degrés, elle donne arcsin(4/5) = 55,13°. La mesure de l'angle est 180° – 53,13° = 126,87°.

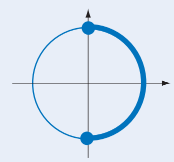
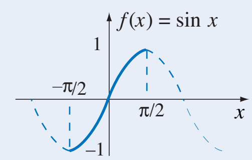
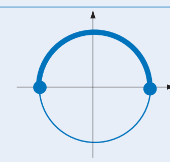
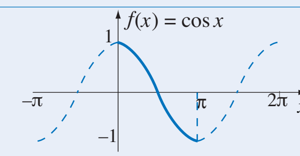
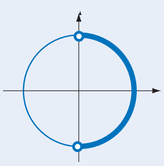
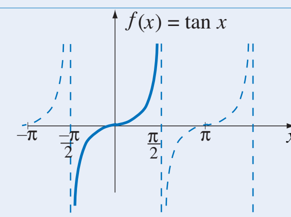
REMARQUE
Il faut se méfier du résultat affiché par une calculatrice qui ne tient pas compte de la périodicité des fonctions trigonométriques dans la recherche de l'angle. Il faut représenter la situation graphiquement ou géométriquement pour apporter les corrections qui s'imposent en prenant en compte le contexte du problème.

Intervalle principal

Les fonctions trigonométriques sont des fonctions périodiques, c'est-à-dire que les valeurs de la variable dépendante se répètent à intervalles réguliers. La calculatrice ne peut tenir compte de cette caractéristique dans la recherche de la valeur de l'angle dont un rapport trigonométrique est donné. Pour chaque fonction trigonométrique, la calculatrice affiche une valeur d'angle à l'intérieur d'un intervalle appelé **intervalle principal.** Pour faciliter l'interprétation des résultats, on choisit cet intervalle le plus près possible de l'origine et de manière qu'il contienne toutes les valeurs que peut prendre la fonction, et ce une et une seule fois. Le tableau suivant indique l'intervalle principal associé aux fonctions sinus, cosinus et tangente.

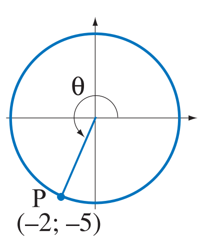
REMARQUE
Il est à noter, que la fonction inverse arcsinus n'est pas la relation inverse de sinus, mais un sous-ensemble de celle-ci, déterminé par l'intervalle de la préimage principale.



INTERVALLE DE LA PRÉIMAGE PRINCIPALE		
La préimage principale de la fonction sinus est dans l'intervalle fermé [–π/2; π/2].		
La préimage principale de la fonction cosinus est dans l'intervalle fermé [0; π].		
La préimage principale de la fonction tangente est dans l'intervalle ouvert]–π/2; π/2[.		

EXEMPLE 7.3.4

Calculer la mesure, en radians et en degrés, de l'angle déterminé par le rayon et la partie positive de l'axe horizontal dans la figure présentée ci-contre.



■ ***Solution***

Par définition de la fonction tangente,

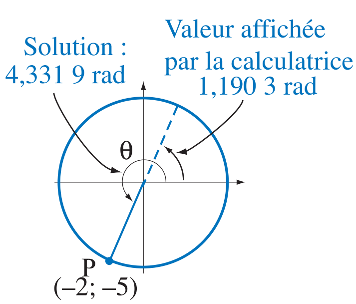
$$\tan\theta = \frac{\text{ordonnée du point}}{\text{abscisse du point}} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}.$$

La préimage de 5/2 est alors arctan(5/2) = 1,1903 rad. Cette valeur que donne la calculatrice appartient à l'intervalle]–π/2; π/2[. Ce n'est manifestement pas l'angle recherché. Cependant,

$$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta \text{ ou encore } \tan(180° + \theta) = \tan\theta.$$

En effectuant la correction, on obtient

$$\pi + 1{,}1903 = 3{,}1416 + 1{,}1903 = 4{,}3319 \text{ rad.}$$

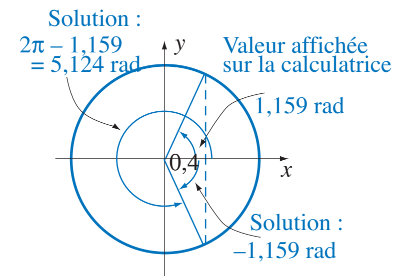


La contrainte dont il faut tenir compte dans la résolution d'un problème est parfois exprimée sous la forme d'un intervalle.

EXEMPLE 7.3.5

Trouver un angle θ tel que $\cos\theta = 0{,}4$ et $\theta \in [\pi; 2\pi]$.

Solution



La calculatrice donne

$$\theta = \arccos 0{,}4 = 1{,}159 \text{ rad.}$$

Cette valeur ne répond pas à la contrainte puisque $1{,}159 \notin [\pi;2\pi]$. En vertu de la symétrie par rapport à l'axe des x, on peut poser

$$\theta = 2\pi - 1{,}159 = 5{,}124 \text{ rad}$$

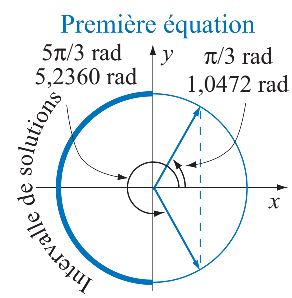
L'ensemble solution est $\{5{,}124\}$.

Dans certains cas, il faut simplifier l'équation trigonométrique à l'aide des identités pour pouvoir la résoudre.

EXEMPLE 7.3.6

Résoudre l'équation $3\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2$ sachant que $\theta \in [\pi/2;3\pi/2]$.

Solution

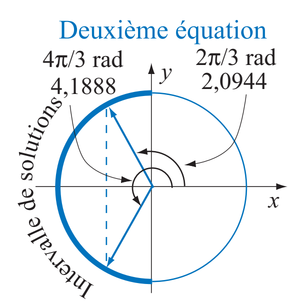


Il faut ramener l'équation à résoudre à une équation contenant une seule fonction trigonométrique. L'identité $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ donne $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. En substituant cette expression à $\sin^2\theta$ dans l'équation à résoudre, on obtient :

$$\begin{aligned}
3(1 - \cos^2\theta) - \cos^2\theta &= 2\\
3 - 4\cos^2\theta &= 2\\
-4\cos^2\theta + 1 &= 0\\
\cos^2\theta - 1/4 &= 0\\
(\cos\theta - 1/2)(\cos\theta + 1/2) &= 0\\
\cos\theta - 1/2 = 0 \text{ ou } \cos\theta + 1/2 &= 0\\
\cos\theta = 1/2 \text{ ou } \cos\theta &= -1/2.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\cos\theta = 1/2 \text{ où } \theta \in [\pi/2; 3\pi/2] \text{ ou}$$
$$\cos\theta = -1/2 \text{ où } \theta \in [\pi/2; 3\pi/2]$$



La première équation donne $\theta = \arccos(1/2) = \pi/3$: cette valeur n'appartient pas à l'intervalle $[\pi/2; 3\pi/2]$ et $2\pi - \pi/3 = 5\pi/3$ n'est pas non plus dans cet intervalle. La première équation n'a donc pas de solution dans l'intervalle $[\pi/2; 3\pi/2]$. L'ensemble-solution est l'ensemble vide, noté $\varnothing$.

La deuxième équation donne $\theta = \arccos(-1/2) = 2\pi/3$. Cette valeur appartient à l'intervalle $[\pi/2;3\pi/2]$ et $2\pi - 2\pi/3 = 4\pi/3$ est également dans cet intervalle. On accepte donc ces deux valeurs comme solutions de l'équation. L'ensemble solution est $\{2\pi/3, 4\pi/3\}$.

Un peu d'histoire

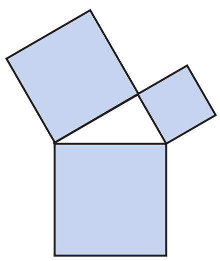
PYTHAGORE DE SAMOS

VI^e siècle avant notre ère

Pythagore vécut au VI^e siècle avant notre ère, né vers ~580 à Samos, une île de la mer Égée située tout près de Milet, où vivait Thalès, qui devait avoir une cinquantaine d'années à la naissance de Pythagore (NH Pythagore). On admet généralement que Pythagore fut l'élève de Thalès et de son disciple Anaximandre avant d'entreprendre de nombreux voyages, particulièrement en Égypte et à Babylone. À son retour à Samos, l'île étant sous la domination du tyran Polycrate, Pythagore décida de s'installer à Crotone en Italie du sud, où il fonda une communauté qui tenait à la fois de la secte et de l'académie. On y étudiait la philosophie, les mathématiques et les sciences naturelles. Les membres de l'École vivaient en communauté et gardaient secret les enseignements reçus et leurs découvertes. Il est donc difficile de connaître la véritable contribution de Pythagore. Son nom est cependant resté associé à un théorème qui, dans sa formulation moderne s'énonce :

> « Dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit. »

Pour les Pythagoriciens, la relation portait sur les aires des carrés construits sur les côtés :.



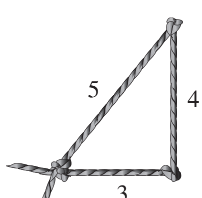
Théorème de Pythagore

> « L'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. »

Les Égyptiens savaient qu'en prenant des longueurs 3, 4 et 5, on forme un triangle rectangle. Ils se servaient de cette propriété pour construire des angles droits en utilisant une corde dans laquelle des nœuds délimitaient ces longueurs. Il leur suffisait de placer la corde de manière à former un triangle dont les nœuds correspondaient aux sommets.

Corde à nœuds

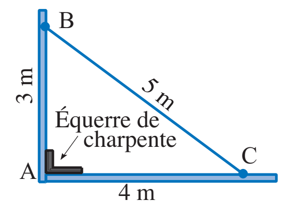
Les Égyptiens ignoraient cependant la propriété générale de tous les triangles rectangles.



Angle droit formé avec une corde à

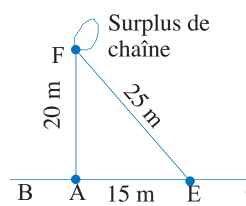
Triplet pythagoricien

Si trois nombres entiers satisfont à la relation de Pythagore, on dit qu'ils forment un triplet pythagoricien. Les nombres 3, 4 et 5 forment un tel triplet pythagoricien, tout comme les nombres 6, 8 et 10 et les nombres 5, 12 et 13. Les triplets pythagoriciens sont utilisés pour vérifier la perpendicularité des murs d'une construction. On mesure des distances $\overline{AB}$ de 3 m et $\overline{AC}$ de 4 m (ou 1,5 et 2 m) à partir d'un coin A. Si les murs sont perpendiculaires, la longueur de l'hypoténuse *BC* est de 5 m (ou 2,5 m).



Angle droit avec l'équerre

Une méthode employée en topométrie pour élever une perpendiculaire à une droite BC en un point A repose aussi sur les triplets pythagoriciens. On prend des multiples de 3, 4 et 5, par exemple 15, 20 et 25 m. On détermine sur BC le point E à 15 m du point A. On place les extrémités d'une chaîne de 50 m aux points A et E, et on joint les graduations 20 et 25 de la chaîne tendue, déterminant ainsi le point F de la perpendiculaire FA.



Angle droit formé avec une chaîne

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

À chaque étape de la résolution d'une équation, la forme de celle-ci indique la procédure la plus appropriée pour transformer cette équation et parvenir à isoler la variable. Ainsi, dans le dernier exemple, le fait que l'équation contient plus d'une fonction trigonométrique indique que la première étape consiste à utiliser une identité trigonométrique de façon à ce que l'équation ne comporte qu'une seule fonction trigonométrique. Voici les identités trigonométriques que nous utiliserons soit pour résoudre une équation trigonométrique, soit pour calculer une image à l'aide d'une calculatrice munie uniquement des fonctions sinus, cosinus et tangente.

IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES FONDAMENTALES

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$	$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$
$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$	$\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

Dans l'équation $\cos^2\theta - 1/4 = 0$, le fait que l'élévation au carré s'applique à la fonction cosinus nous laisse voir que le membre de gauche est de la forme $A^2 - B^2$, soit une différence de carrés, et qu'il faut factoriser cette dernière. La factorisation de $A^2 - B^2$ est $(A - B)(A + B)$, ce qui dans le dernier exemple donne

$$(\cos\theta - 1/2)(\cos\theta + 1/2) = 0.$$

On a donc la forme $A{\cdot}B = 0$ et il faut appliquer la propriété d'intégrité :

$$A{\cdot}B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Cette analyse de la démarche suivie illustre le fait que, dans la résolution d'une équation, la perception des formes et la reconnaissance des fonctions de la variable sont essentielles. De plus, il faut reconnaître la forme globale de chaque membre et déterminer l'ordre dans lequel s'appliquent les éléments d'une fonction composée afin d'établir ce sur quoi il faut se concentrer en premier.

EXEMPLE 7.3.7

Résoudre l'équation $\log(\sin^2 x) = 2 + \log(\cos^2 x)$ où $x \in [1,65; 7,95]$.

Solution

L'équation à résoudre étant une équation logarithmique, il faut la transformer de manière qu'elle ne contienne qu'une seule expression logarithmique. On a

$$\log(\sin^2 x) - \log(\cos^2 x) = 2.$$

En appliquant la propriété d'une différence de logarithmes, on obtient :

$$\log\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) = 2.$$

Et, par définition du logarithme,

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 10^2\text{; donc } \tan^2 x = 100.$$

Par regroupement, $\tan^2 x - 100 = 0$ et, en factorisant, on a

$$(\tan x - 10)(\tan x + 10) = 0$$

$$\tan x - 10 = 0 \text{ ou } \tan x + 10 = 0, \Leftrightarrow \tan x = 10 \text{ ou } \tan x = -10$$

$$\text{et } x = \arctan 10 = 1{,}471\ldots \quad \text{ou } x = \arctan(-10) = -1{,}471\ldots$$

Il reste à déterminer la (les) solution(s) appartenant à l'intervalle donné. Comme l'indique le graphique de la tangente, les valeurs de cette fonction se répètent à intervalle de π rad. Puisque

$$1{,}471\ldots + 3{,}1416\ldots = 4{,}613\ldots \quad \text{et} \quad 4{,}613\ldots + 3{,}1416\ldots = 7{,}754\ldots,$$

l'ensemble solution est {4,613; 7,754}.

Modèle sinusoïdal

Pour décrire des phénomènes vibratoires (ondulatoires) simples, la fonction sinus est très utile lorsque combinée à une relation affine décrivant l'angle parcouru en fonction du temps s'avère très utile.

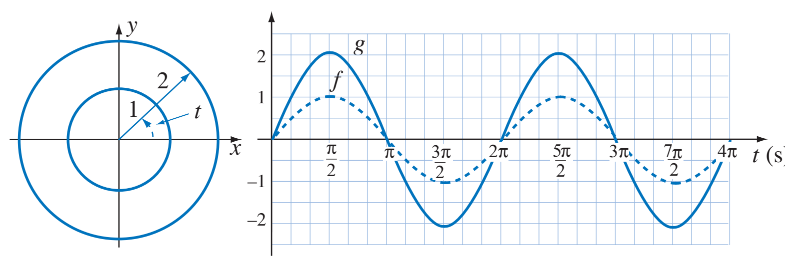
Amplitude

OndeSinus01

Soit deux rayons, l'un de longueur 1 et l'autre de longueur 2, en rotation autour de l'origine d'un système d'axes à une vitesse angulaire constante de 1 rad/s. Les modèles engendrés par la projection verticale des deux rayons sont

$$f(t) = \sin t \text{ et } g(t) = 2 \sin t,$$

et la représentation graphique de ces modèles est la suivante.



On constate que l'**amplitude** du modèle $g(t)$ est le double de celle de $f(t)$.

Amplitude

L'**amplitude** d'un modèle sinusoïdal est égale à la moitié de la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale du modèle. Dans un modèle vibratoire simple de la forme :

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

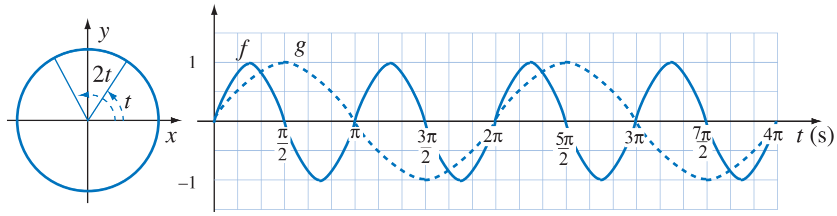
l'amplitude est donnée par le paramètre A.

Fréquence et période

Soit deux rayons unitaires en rotation uniforme autour de l'origine d'un système d'axes l'un ayant une vitesse angulaire de 1 rad/s et l'autre, une vitesse angulaire de 2 rad/s. Les modèles engendrés par la projection verticale des deux rayons sont

$$f(t) = \sin t \text{ et } g(t) = \sin 2t,$$

et la représentation graphique de ces modèles la suivante.



Puisqu'un cycle correspond à un angle au centre de 2π rad et que la vitesse de rotation du deuxième rayon est de 2 rad/s, le temps qu'il met pour faire un tour est de π secondes ou 3,1416 s. On obtient donc la durée d'un cycle en divisant la longueur du cycle, soit 2π rad, par la vitesse angulaire. Cet intervalle de temps est la **période** de l'onde sinusoïdale.

REMARQUE

La fréquence se mesure en cycles par seconde. Cependant, dans le SI, on omet le mot cycle, de sorte que l'unité est 1/s ou s^{-1}, et on l'appelle hertz (Hz).

La fréquence et la période d'une ondes ont en relation inverse l'une de l'autre

$$T = 1/f \quad \text{et} \quad f = 1/T.$$

Fréquence et période

Soit une onde sinusoïdale d'équation $g(t) = \sin(\omega t)$; la **fréquence** de cette onde est

$$f = \omega/2\pi.$$

Elle représente le nombre de tours par seconde qu'effectue le rayon décrivant l'onde sinusoïdale. L'unité de mesure de fréquence est le hertz (Hz).

La **période** de cette onde sinusoïdale est

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\omega/2\pi} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

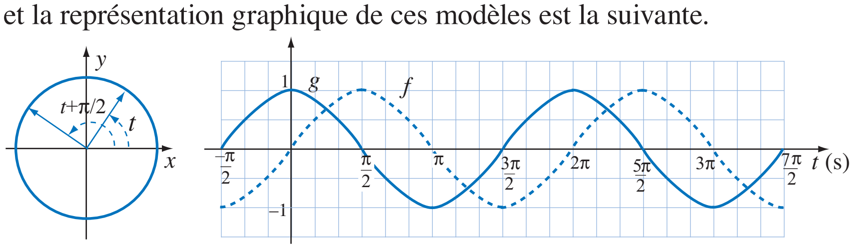
Elle représente le temps nécessaire pour effectuer un cycle complet. Son unité de mesure est la seconde (s).

Déphasage

Soit deux vecteurs unitaires en rotation uniforme autour de l'origine d'un système d'axes à une vitesse angulaire de 1 rad/s et supposons que l'un des vecteurs a commencé sa rotation $\pi/2$ s avant l'autre. Les modèles engendrés par la projection verticale de ces fonctions sont :

$$f(t) = \sin t \quad \text{et} \quad g(t) = \sin(t + \pi/2),$$

et la représentation graphique de ces modèles est la suivante.



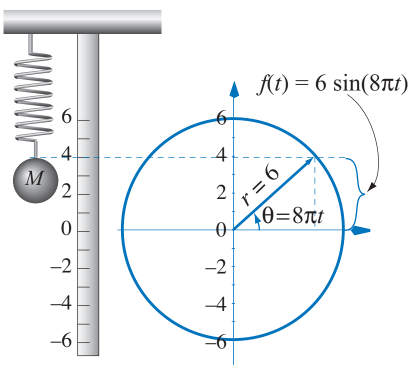
OndeSinus02

OndeSinus03

Au temps $t = 0$, le rayon dont la projection verticale est décrite par $g(t)$ fait un angle de $\pi/2$ avec la partie positive de l'axe des x. Cet angle est appelé **angle de phase initial**. Un cycle du graphique de $\sin(\omega t + \phi)$ débute lorsque $\omega t + \phi = 0$, c'est-à-dire quand $\omega t = -\phi$ et $t = -\phi/\omega$ secondes. Cet durée est appelée le **déphasage** t_d de l'onde ou du modèle sinusoïdal. Le déphasage de la fonction g définie ci-dessus est de $-\pi/2$ s.

REMARQUE
Le déphasage est la longueur de l'intervalle de temps allant du début de la période du modèle $f(t) = \sin t$ au début de la période du modèle $g(t) = \sin(\omega t + \phi)$.

OndeSinus04



Angle de phase initial et déphasage

Soit un modèle sinusoïdal $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$. L'angle φ est appelé **angle de phase initial**, alors que le **déphasage** de l'onde sinusoïdale est $t = -\phi/\omega$ s.

Mouvements oscillatoires

On utilise des modèles sinusoïdaux pour décrire des phénomènes périodiques comme les mouvements oscillatoires.

Le montage illustré ci-contre est formé d'un ressort et d'une échelle graduée de telle sorte que le point 0 indique la position d'équilibre du ressort. Si l'on donne une impulsion à la masse M, celle-ci va osciller autour de la position d'équilibre du ressort.

En supposant que les forces de frottement sont négligeables, on peut décrire le mouvement de la masse à l'aide d'un modèle sinusoïdal, en associant la position de la masse à la projection verticale d'un rayon en rotation autour de l'origine d'un système d'axes. Pour ce faire, on fait coïncider l'échelle graduée avec l'axe vertical et on représente le temps sur l'axe horizontal.

Lorsque la masse oscille, le ressort est tour à tour étiré puis comprimé. La longueur de l'oscillation dépend en fait de la masse et de la rigidité du ressort. Dans le cas où la masse oscille entre –6 dm et 6 dm et qu'elle effectue quatre oscillations complètes par seconde, $f = 4$ Hz et $\omega = 2\pi f = 8\pi$. La position de la masse M au temps t est donc décrite par le modèle sinusoïdal

$$f(t) = 6\sin(8\pi t)$$

où l'expression du membre de droite la projection sur l'axe vertical du rayon de longueur 6 en rotation à une vitesse de 8π rad/s.

EXEMPLE 7.3.8

Une masse M, suspendue à un ressort, oscille de –3 dm à 3 dm et elle effectue cinq oscillations complètes par seconde.

a) Quelle est la vitesse angulaire du rayon dont la projection sur l'axe vertical décrit la position de la masse en fonction du temps t ?

b) Déterminer les deux paramètres : la longueur et l'angle de phase initial du rayon en rotation autour de l'origine, dont la projection verticale décrit le mouvement du ressort si celui-ci est en position 3 au temps initial.

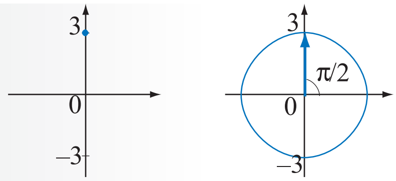
c) Calculer l'amplitude, la période, la fréquence et le déphasage, et tracer le graphique du modèle décrivant la position de la masse au temps t pour un intervalle d'une seconde.

Solution

a) Puisque la fréquence est de 5 oscillations par seconde, la vitesse angulaire est égale à

$$5 \times 2\pi = 10\pi \text{ rad/s.}$$

b) L'amplitude étant de 3 dm, la longueur du rayon est 3. La vitesse angulaire est de 10π rad/s et l'angle de phase initial est de $\pi/2$ rad.



c) La fonction donnant la position de la masse au temps t est la projection du rayon sur l'axe vertical. Cette fonction est définie par

$$f(t) = 3\sin(10\pi t + \pi/2).$$

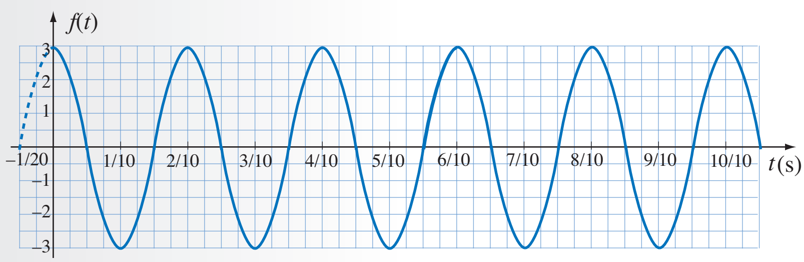
Son amplitude est de 3 dm et sa période est égale à

$$\frac{2\pi}{\omega} = -\frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5} \text{ s.}$$

Sa fréquence est de 5 Hz et son déphasage est l'instant t tel que

$$10\pi t + \pi/2 = 0$$

c'est-à-dire $t = -1/20$ s. La représentation graphique de cette fonction est la suivante.



REMARQUE

Pour décrire un phénomène physique assez simple, il faut souvent utiliser une combinaison de modèles simples. Ainsi,

$$y = f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

est une **fonction composée.** Elle résulte de la combinaison de la règle $y = \sin x$ et de la règle affine

$$x = \omega t + \varphi.$$

De plus, si $\varphi = \pi/2$, on peut utiliser les propriétés des fonctions trigonométriques et

$$y = A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

PROCÉDURE

Description symbolique du graphique d'une sinusoïde

1. Repérer sur le graphique l'instant t_1 du début et l'instant t_2 de la fin du premier cycle.
2. Calculer la période, $T = t_2 - t_1$.
3. Déterminer la fréquence, $f = 1/T$, et la vitesse $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.
4. Déterminer l'angle de phase initial φ (en posant $\omega t_1 + \phi = 0$).
5. Déterminer l'amplitude, $A = (V_{max} - V_{min})/2$.
6. Écrire le modèle mathématique $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$.

PROCÉDURE

Représentation graphique d'une sinusoïde

Soit $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$.

1. Calculer le déphasage t en posant $\omega t + \phi = 0$.
2. Calculer la période, $T = 2\pi/\omega$.
3. Déterminer la fréquence $f = 1/T = \omega/2\pi$.
4. Tracer le graphique d'une sinusoïde.
5. Graduer l'axe horizontal et positionne l'axe vertical en tenant compte du déphasage et de la période.
6. Déterminer l'amplitude et graduer l'axe vertical en tenant compte de l'amplitude.

Ondes

La lumière visible, les rayons infrarouges, les rayons ultraviolets et les sons se déplacent dans l'espace sous forme d'ondes. Trois paramètres caractérisent une onde : la longueur d'onde, la fréquence et la vitesse.

OndeSinus05

Longueur d'onde

La **longueur d'onde**, représentée par la lettre grecque λ (lambda), est la distance entre deux crêtes consécutives de l'onde. Elle se mesure en mètres (m).

Soit une onde dont la fréquence est de f cycles par seconde (f Hz) et dont la longueur d'onde est de λ m. Les f cycles parcourus en une seconde ont une longueur totale de $f\lambda$ m. L'onde parcourt donc $f\lambda$ m/s. C'est sa vitesse de propagation

REMARQUE
La vitesse de propagation d'un son est de 336 m/s et la vitesse de propagation de la lumière est de $2{,}9979 \times 10^8$ m/s.

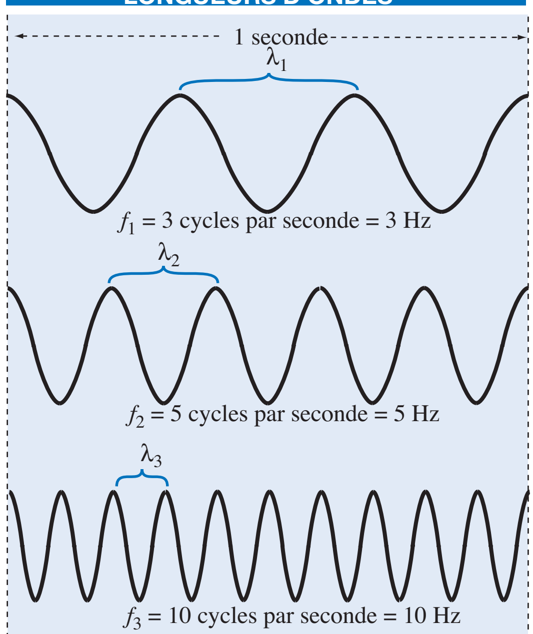
$$v = f\lambda$$

où f est la fréquence en hertz (Hz), λ est la longueur d'onde en mètres (m) et v est la vitesse de propagation en mètres par seconde (m/s).

Dans l'illustration suivante, les trois ondes ont la même vitesse, mais des longueurs d'onde et des fréquences différentes.

REMARQUE
Si des ondes se déplaçant à un même vitesse, la relation entre leur longueur d'onde et leur fréquence en est une de proportionnalité inverse.

LONGUEURS D'ONDES

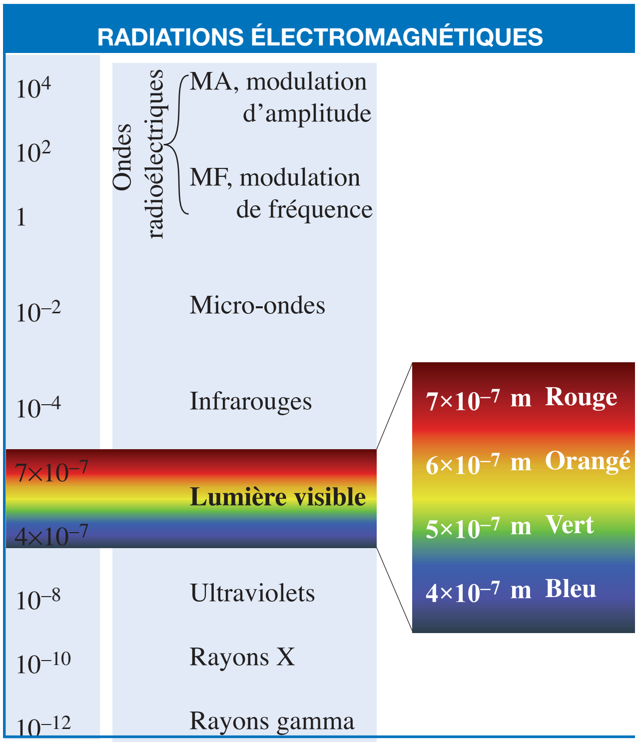


Radiation électromagnétique

La radiation électromagnétique est l'une des formes de déplacement de l'énergie dans l'espace. Ce type de radiation est une onde qui se déplace à la vitesse de la lumière. On désigne sa vitesse par la lettre c et sa fréquence par la lettre grecque ν (nu)

$$\lambda\nu = c.$$

La lumière visible, l'énergie solaire, les ondes radio font partie des radiations électromagnétiques. Le spectre de ces ondes est donné dans la figure suivante.



EXEMPLE 7.3.9

Déterminer la fréquence d'une lumière rouge dont la longueur d'onde est de 650 nm.

Solution

On connaît la vitesse, c'est celle de la lumière, c = 2,9979 × 10^8 m/s. On peut déterminer la fréquence ν puisqu'on connaît aussi la longueur d'onde λ :

$$\lambda\nu = c.$$

Il faut d'abord exprimer la longueur d'onde en mètres. Puisque λ = 650 nm, alors

$$\lambda = 6{,}50\times10^{2}\ \text{nm}\times\frac{1\ \text{m}}{10^{9}\ \text{nm}} = 6{,}50\times10^{-7}\ \text{m}.$$

En isolant ν et en remplaçant c et λ par leurs valeurs, on obtient

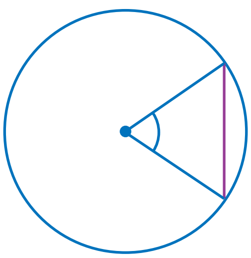
$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{2{,}997\,9\times10^{8}\ \text{m/s}}{6{,}50\times10^{-7}\ \text{m}} = 0{,}461\,21\ldots\times10^{15}.$$

La fréquence de la lumière rouge est de 4,61 × 10^{14} Hz, si on arrondit à trois chiffres significatifs.

Un peu d'histoire

LA TRIGONOMÉTRIE

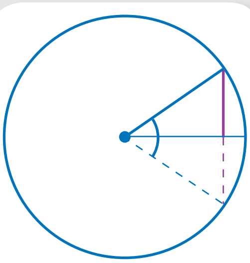
À ses débuts, il y a 4 000 ans, la trigonométrie est un volet technique de l'astronomie. Les astronomes babyloniens cherchent à déterminer la distance aux astres et la position des étoiles, mais ne peuvent que mesurer des angles. Ils constituent les premières tables astronomiques en divisant le cercle en 360 degrés, leur système de numération étant en base 60. Les premiers problèmes d'astronomie résolus par des techniques de trigonométrie sont la distance de la Terre à la Lune par Aristarque de Samos (NH Aristarque) et la circonférence terrestre par Ératosthène de Cyrène (NH Ératosthène01). À la même époque, Archimède calcule un intervalle de valeurs pour π (NH Archimède04).



Géométrie des cordes

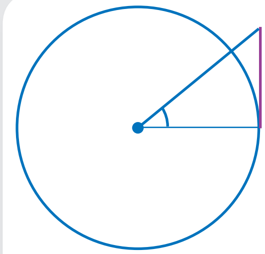
Convaincu de la circularité des trajectoires des planètes et que les étoiles sont toutes à la même distance de la Terre, sur la sphère des fixes, Hipparque de Nicée mesure les angles entre les étoiles et dresse les premières tables de cordes qui permettent dans un cercle de déterminer la longueur d'une corde en fonction de l'angle au centre qui lui est associé. Ce faisant, il est amené à constater que l'axe de la Terre n'est pas fixe, il crée l'astrolabe, permettant de déterminer la hauteur d'un astre par rapport à l'horizon, et développe l'idée des parallèles et des méridiens pour repérer tout point sur la Terre (NH Hipparque01). À l'aide de ses tables de cordes, il calcule la distance de la Terre à la Lune ainsi que le rayon et la circonférence de cette dernière.

Un siècle plus tard, Claude Ptolémée (NH Ptolémée01) poursuit le travail d'Hipparque en adaptant sa théorie des épicycles et déférents (NH Hipparque02), en améliorant la précision des tables de cordes et en les utilisant pour calculer la trajectoire des planètes. Il établit des égalités de rapports équivalentes, dans la géométrie des cordes, aux formules modernes que sont les développements de $\sin(A + B)$, $\cos(A + B)$ et $\sin^2(A/2) = (1 - \cos A)/2$.



Géométrie des demi-cordes

En Inde, au V^{e} siècle, Aryabhata l'ancien eut l'idée d'utiliser la demi-corde au lieu de la corde. Les mathématiciens indiens ont alors remplacé les tables de cordes par des tables de demi-cordes ou tables des sinus. Le monde arabe prend la relève au VIII^{e} siècle alors que Bagdad et Damas deviennent les nouveaux centres de la science et que les textes mathématiques grecs et indiens sont traduits en arabe. Al-Khwarizmi (NH Al-Khwarizmi01) établit les premières véritables tables du sinus. Al-Battani produit de nouvelles tables pour la Lune et le Soleil, introduit l'usage du sinus dans les calculs, et en partie celui de la tangente, formant ainsi les bases de la trigonométrie moderne. Il obtient de nouvelles formules comme $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$. Le mathématicien d'origine iranienne Abou Al-Wafa (940-997) développe l'usage de la tangente, qui est la fonction idéale pour mesurer une hauteur, et choisit le cercle de rayon unitaire dans l'établissement des tables.



La tangente

Avec Nasir Al-din Tusi (1201-1274), qui établit la loi des sinus, la trigonométrie devient un champ disciplinaire distinct de l'astronomie. Au XIV^{e} siècle, Al-Kashi construit de nouvelles tables de fonctions trigonométriques et découvre la relation permettant de calculer la longueur des côtés dans un triangle quelconque, appelée maintenant « loi des cosinus ».

Les traductions en latin des ouvrages arabes, à partir du XII^{e} siècle permettent à l'Occident de prendre la relève. Au XV^{e} siècle, l'astronome et mathématicien allemand Johann Müller, ou Regiomontanus (1436-1476), développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques. Au XVI^{e} siècle François Viète (NH Viète01) fait évoluer la trigonométrie pour lui donner la forme qu'on lui connaît et Albert Girard (1595-1632) introduit les notations sin, cos et tan.

Le premier graphique de la fonction sinus a été obtenu par Gilles Personne de Roberval en déterminant l'aire sous la demi-cycloïde à l'aide de la méthode des indivisibles (NH Roberval03). L'avènement de la géométrie analytique a facilité à la fois la représentation graphique et la généralisation des fonctions trigonométriques en permettant de définir celles-ci dans le cercle trigonométrique.

On associe beaucoup la trigonométrie au calcul de distances et de hauteurs dans notre environnement en pensant à l'arpentage. En réalité, la mesure de distances terrestres n'a pas été la première application de la trigonométrie. Celle-ci s'est développée comme volet technique de l'astronomie, l'étude du monde supralunaire dont la nature était distincte de celle du monde sublunaire. On croyait que les deux mondes obéissaient à des lois distinctes et il n'y avait, à priori, pas de raison pour que les techniques d'étude du monde supralunaire puisse avoir des applications dans le monde sublunaire. Il a fallu que la trigonométrie devienne un champ disciplinaire distinct pour que les applications terrestres se développent.

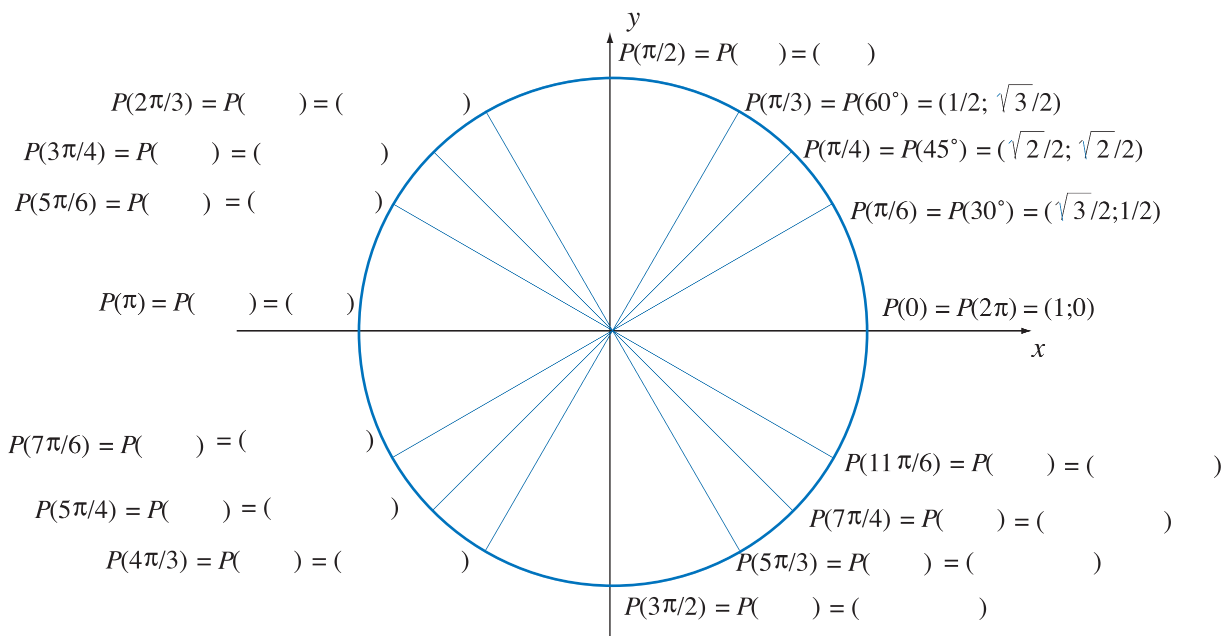
L'usage des fonctions trigonométriques s'est depuis répandu dans une foule de domaines, en particulier en physique pour la description des ondes.

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

7.4 Exercices

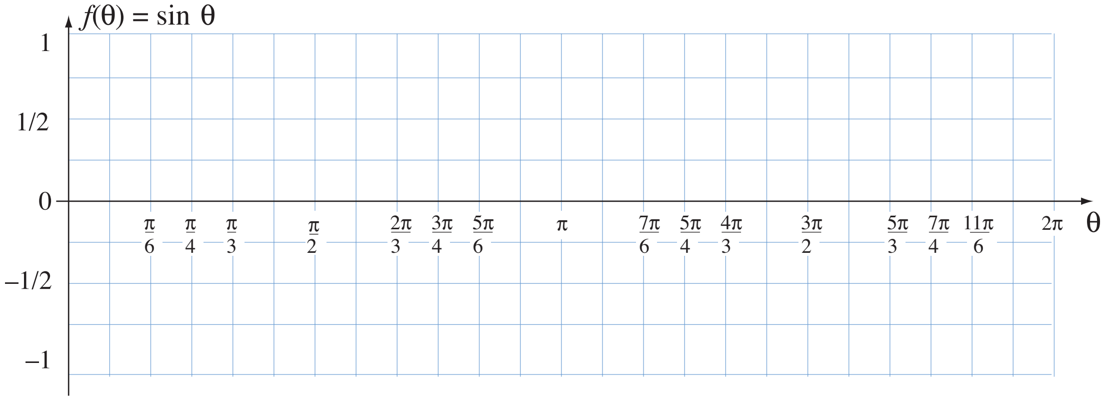
1. Dans la figure suivante, indiquer les coordonnées des points du cercle trigonométrique associés aux angles remarquables et à leurs multiples.

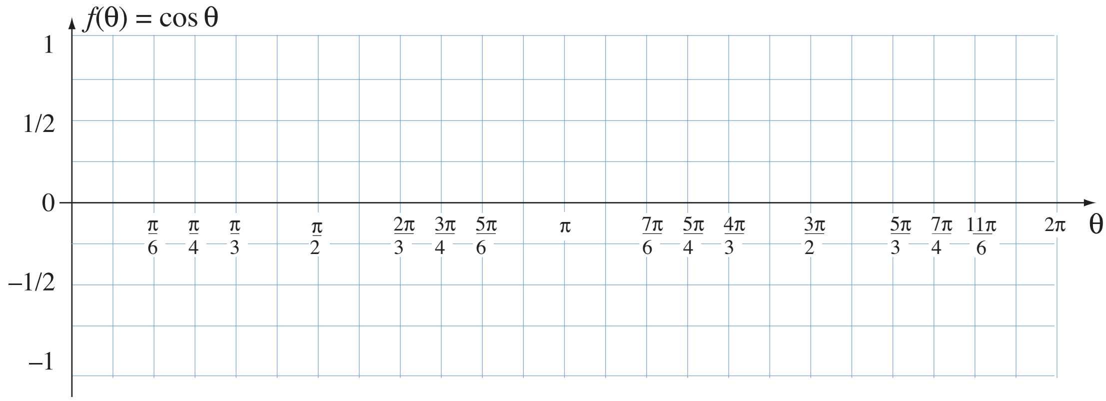


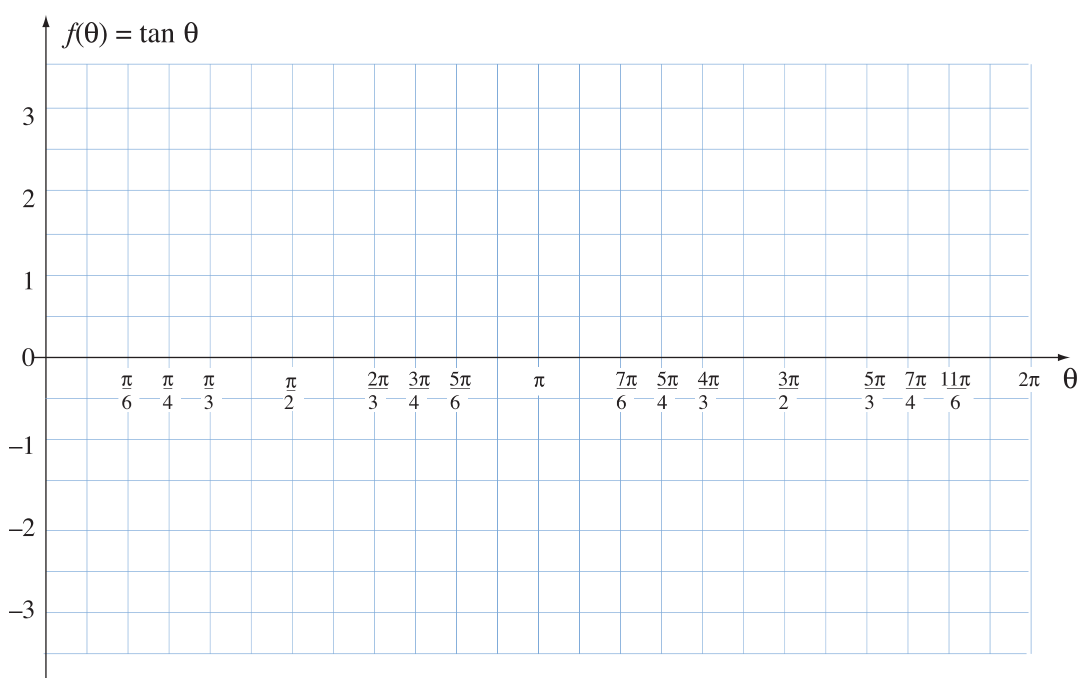
2. Dans le tableau suivant, exprimer chaque angle en radians et donner son image par chacune des fonctions trigonométriques.

t°	θ	$\sin\theta$		$\cos\theta$		$\tan\theta$	
0°	0	0	0	1	1	0	0
30°	$\pi/6$	1/2	0,5	$\sqrt{3}/2$	0,866...	$\sqrt{3}/3$	0,577...
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	0,707...	$\sqrt{2}/2$	0,707...	1	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	0,866...	1/2	0,5	$\sqrt{3}$	1,732...
90°							
120°							
135°							
150°							
180°							
210°							
225°							
240°							
270°							
300°							
315°							
330°							
360°							

3. Représenter graphiquement les valeurs inscrites dans le tableau du dernier exercice et tracer le graphique des fonctions sinus, cosinus et tangente.







4. En utilisant le cercle trigonométrique, montrer que, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$:
   a) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$,
   b) $\cos(-\theta) = \cos\theta$,
   c) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.

5. En utilisant le cercle trigonométrique, montrer que, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$:
   a) $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$,
   b) $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$,
   b) $\tan(\pi/2 - \theta) = \cot\theta$.

6. En utilisant le cercle trigonométrique, montrer que, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$:
   a) $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$,
   b) $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$,
   b) $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$.

7. En utilisant le cercle trigonométrique, montrer que, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$:
   a) $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$,
   b) $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$,
   b) $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$.

8. Déterminer la valeur principale des expressions suivantes.

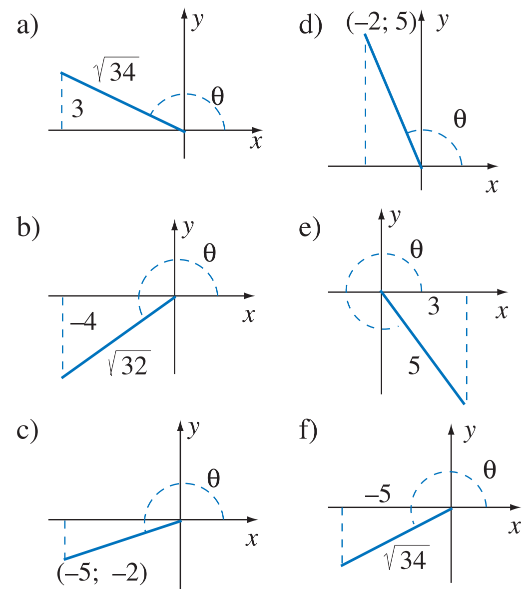
a) arcsin (1)	i) arccos (–2)
b) arcsin (–0,5)	j) arccos (0,866)
c) arctan (–1)	k) arcsin (0,707)
d) arcsin (–1)	l) arccos (1)
e) arctan (1)	m) arcsin (0,345)
f) arccos (–0,866)	n) arccos (0)
g) arcsin (0,789)	o) arccos (–0,654)
h) arctan (1,4142)	

9. À l'aide d'une calculatrice, déterminer l'angle θ tel que :
   a) $\sin\theta = -0{,}88$ et $\theta \in [\pi/2; 3\pi/2]$,
   b) $\tan\theta = -1{,}44$ et $\theta \in [\pi/2; 3\pi/2]$,
   c) $\cos\theta = 0{,}6$ et $\theta \in [\pi; 2\pi]$,
   d) $\tan\theta = 1{,}44$ et $\theta \in [0; 2\pi]$.

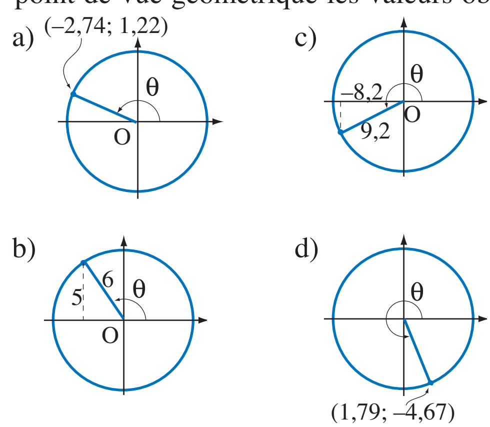
10. Résoudre les équations trigonométriques suivantes et retenir la valeur principale comme solution.

a) $\cos 3\theta = 1/2$	d) $\tan\theta = \sin\theta$
b) $\sin 2\theta = 1/2$	e) $\sin^2\theta + \sin 2\theta = 0$
c) $\sec^2\theta = 4$	f) $2\sin^2\theta = 1 + \sin\theta$

11. À l'aide d'une calculatrice, trouver l'angle θ dans les figures suivantes.



12. Calculer la valeur des six fonctions trigonométriques pour l'angle θ et la longueur du rayon donnés dans chacun des graphiques suivants. Interpréter du point de vue géométrique les valeurs obtenues.

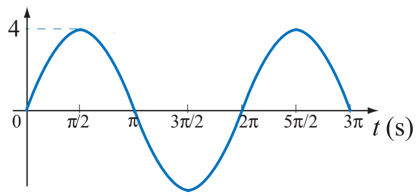


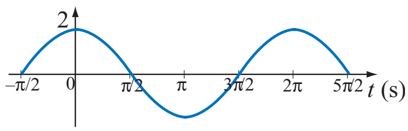
13. Représenter graphiquement les modèles sinusoïdaux suivants.
   a) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 0{,}5\sin t$
   b) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = \sin 2t$
   c) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 3\sin t$
   d) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 2\sin \pi t$
   e) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = \sin(t + \pi/2)$
   f) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 2{,}5\sin(t + \pi/2)$
   g) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 2\sin(t - \pi/2)$
   h) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 2\sin 2t$

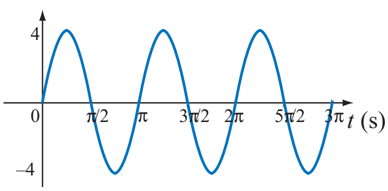
i) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 2\sin(2t - 3)$

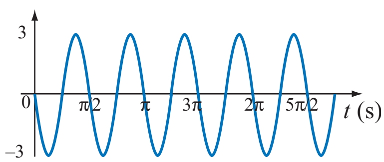
j) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 2\sin(2t - 1)$

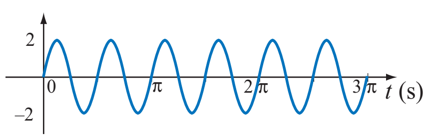
14. Déterminer la vitesse angulaire, l'angle de phase initial, la période, la fréquence, le déphasage et l'amplitude ainsi que la règle de correspondance des fonctions dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

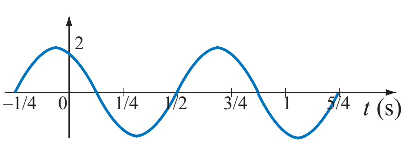
a) 

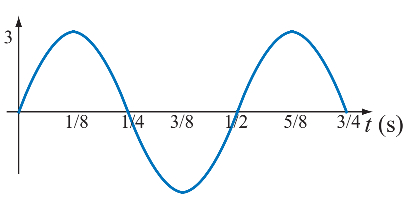
b) 

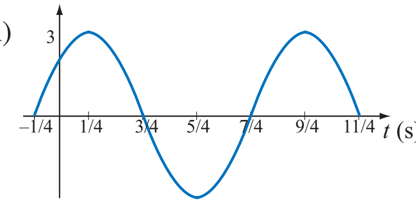
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

15. Dans un feu d'artifice, on obtient une couleur bleue en chauffant du chlorure de cuivre (CuCl) à environ 1 200°C. Le composé émet alors de la lumière bleue dont la longueur d'onde est de 450 nm.
   a) Calculer la fréquence de cette lumière.
   b) Les travaux de Max Planck (1858-1947) ont montré que l'énergie émise ou absorbée par la matière est un multiple entier de $h\nu$ où h est la constante de Planck, dont la valeur expérimentale est $6{,}626 \times 10^{-34}$ J·s et ν est la fréquence de la radiation électromagnétique émise ou absorbée. La variation d'énergie est donc
   $$\Delta E = nh\nu$$
   où n est un nombre entier de quanta d'énergie. Déterminer l'énergie d'un quantum émis par CuCl.

16. Le laser d'un lecteur de disque compact utilise une lumière de 780 nm de longueur d'onde.
   a) Quelle est la fréquence de cette lumière?
   b) Quel est l'énergie d'un photon (quantum d'énergie) de cette lumière?

17. Une station de radio MF émet à 102,3 MHz. Quelle est la longueur d'onde de ces ondes radioélectriques?

18. Le mercure émet de la lumière visible dont la longueur d'onde est soit de 407,7 nm soit de 435,8 nm. Calculer l'énergie d'un seul photon et d'une mole de photons de lumière pour chacune de ces longueurs d'onde.

19. Déterminer la préimage principale :
   a) de 1,5 par la fonction tangente,
   b) de 0,2 par la fonction sinus,
   c) de 3,2 par la fonction $f(x) = 4 \sin 2x$,
   d) de 5,4 par la fonction $f(x) = 6 \cos 3x$,
   e) de 13,2 par la fonction $f(x) = 5 \tan 3x$.

20. Donner les solutions principales des équations suivantes.

a) $4 \cos \theta = \sec \theta$

b) $12\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$

c) $6 \tan^2 x + \tan x - 12 = 0$

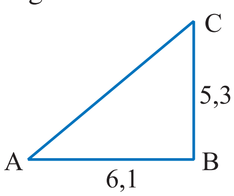
d) $5 \tan^2 x - 22 \tan x + 8 = 0$

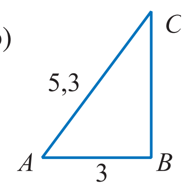
e) $8 \sin^2 x + 2 \sin x - 3 = 0$

f) $\sin x \cot x = 0$

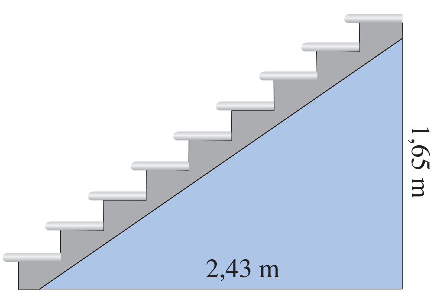
g) $12 \cos^2 x + 5 \cos x - 3 = 0$

21. Calculer, en radians et en degrés, les angles des triangles suivants.

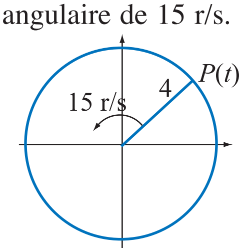
a) 

b) 

22. Calculer l'angle d'inclinaison de l'escalier illustré ci-dessous.



23. Un vecteur de longueur 4 est en mouvement circulaire autour de l'origine d'un système d'axes à une vitesse angulaire de 15 r/s.



a) Déterminer la fréquence de ce mouvement.

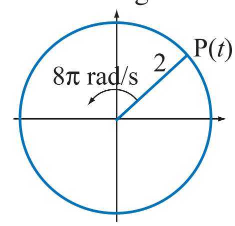
b) Déterminer la période de ce mouvement.

c) Calculer la vitesse angulaire en radians par seconde.

d) Exprimer la hauteur du point P en fonction du temps t si la hauteur initiale est 0.

e) Calculer la hauteur du point P à 1/60 s.

24. Un vecteur de longueur 2 est en mouvement circulaire à une vitesse angulaire de 8π rad/s.



a) Déterminer la fréquence de ce mouvement.

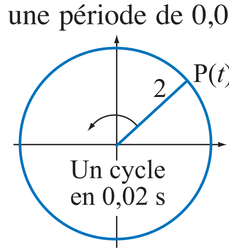
b) Déterminer la période de ce mouvement

c) Calculer la vitesse angulaire en tours par seconde.

d) Exprimer la hauteur du point P en fonction du temps t si l'angle de phase initial est $\pi/2$ rad.

e) Calculer la hauteur du point P à 1/32 s.

25. Un vecteur de longueur 6 est en mouvement circulaire avec une période de 0,02 s.



a) Déterminer la fréquence de ce mouvement.

b) Déterminer la vitesse angulaire en radians par seconde.

c) Exprimer la position du vecteur en fonction du temps t si l'angle de phase initial est $-\pi/2$ rad.

d) Calculer la position du vecteur à 1/200 s.

26. La position d'un vecteur en mouvement circulaire est décrite par $f(t) = 6 \sin(6\pi t - \pi/2)$

a) Déterminer l'amplitude du mouvement vertical.

b) Déterminer la période et la fréquence de ce mouvement.

c) Déterminer la vitesse angulaire en radians par seconde.

d) Trouver l'angle de phase initial de ce mouvement.

27. Une masse M suspendue à un ressort oscille de –4 dm à 4 dm en effectuant cinq oscillations complètes par seconde.

a) Quelle est la vitesse angulaire du vecteur dont la projection sur l'axe vertical décrit la position de la masse en fonction du temps t ?

b) Donner les paramètres: longueur et angle de phase initial du vecteur en rotation autour de l'origine, dont la projection verticale décrit le mouvement du ressort si celui-ci est en position 4 au temps initial.

c) Donner l'amplitude, la période, la fréquence et le déphasage et tracer le graphique du modèle décrivant la position de la masse au temps *t*.

28. Une masse M suspendue à un ressort oscille de –5 dm à 5 dm en effectuant huit oscillations complètes par seconde.

a) Quelle est la vitesse angulaire du vecteur dont la projection sur l'axe vertical décrit la position de la masse en fonction du temps *t* ?

b) Donner les paramètres: longueur et angle de phase initial du vecteur en rotation autour de l'origine, dont la projection verticale décrit le mouvement du ressort si celui-ci est en position 0 au temps initial et se déplace vers le haut.

c) Donner l'amplitude, la période, la fréquence et le déphasage et tracer le graphique du modèle décrivant la position de la masse au temps *t*.