Glossaire : Calcul différentiel

A2

ALGÈBRE DE L'INFINI

On regroupe sous l'appellation *algèbre de l'infini*, les diverses procédures pour évaluer des *limites infinies* ou des *limites à l'infini* sans avoir à effectuer de calculs.

Le premier cas rencontré est celui des limites indéterminées de la forme $k/0$.

$$\text{Si } k > 0,\ \frac{k}{0^+} = \infty \ \text{ et } \ \frac{k}{0^-} = -\infty;$$

$$\text{si } k < 0,\ \frac{k}{0^+} = -\infty \ \text{ et } \ \frac{k}{0^-} = \infty.$$

Le deuxième cas rencontré est celui de l'évaluation des limites à l'infini dont la démarche se fonde sur les règles suivantes :

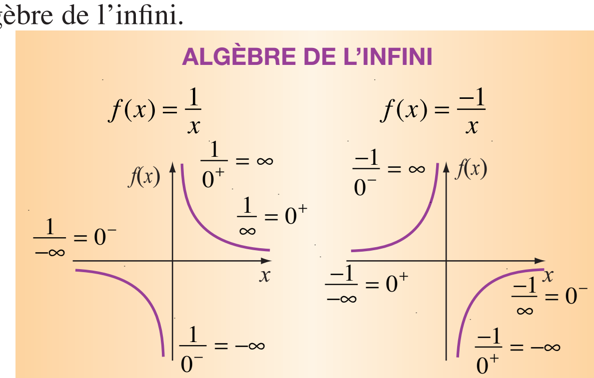
$$\text{Si } k > 0,\ \frac{k}{\infty} = 0^+ \ \text{ et } \ \frac{k}{-\infty} = 0^-;$$

$$\text{si } k < 0,\ \frac{k}{\infty} = 0^- \ \text{ et } \ \frac{k}{-\infty} = 0^+.$$

Le comportement des fonctions :

$$f(x) = \frac{1}{x} \ \text{ et } f(x) = \frac{-1}{x}$$

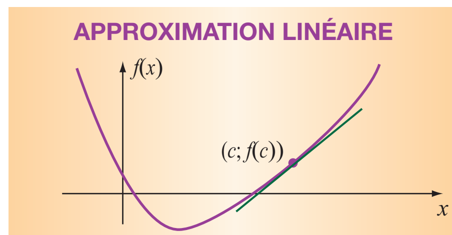
aide à se remémorer ou à retrouver les règles de l'algèbre de l'infini.



ALGÈBRE DE L'INFINI

APPROXIMATION LINÉAIRE

L'*approximation linéaire* est une procédure pour estimer les valeurs d'une fonction dans le voisinage d'un point. Cette procédure facilite le calcul de valeurs par des fonctions complexes. L'approximation linéaire se fonde sur le fait que, dans le voisinage immédiat d'un point, la courbe s'éloigne peu de la tangente en ce point.



APPROXIMATION LINÉAIRE

Le modèle d'approximation linéaire est l'équation de la tangente à la courbe en un point $(c; f(c))$, appelé *centre d'approximation*. L'équation du modèle est donc :

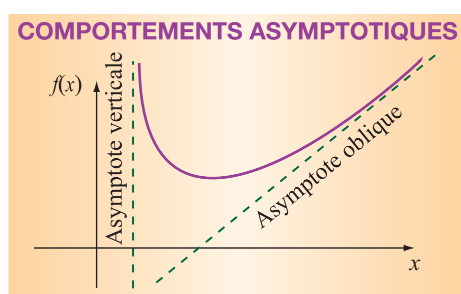
$$L(x) = f(c) + f\,'(c)\,(x - c).$$

Ce modèle permet d'estimer localement des valeurs proches des images de la fonction au voisinage du point $(c; f(c))$. C'est-à-dire qu'au voisinage du point de tangence, on a :

$$f(x) \approx L(x).$$

ASYMPTOTE

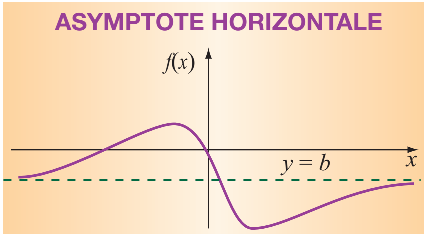
Une *asymptote* d'une fonction est une droite telle que la distance, verticale, horizontale ou oblique, entre le graphique de la fonction et la droite tend vers 0 lorsqu'on se déplace sur la courbe.



COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES

ASYMPTOTE HORIZONTALE

Une fonction f a une *asymptote horizontale* si son graphique s'approche de plus en plus d'une droite horizontale lorsque x tend vers l'infini ou moins l'infini.



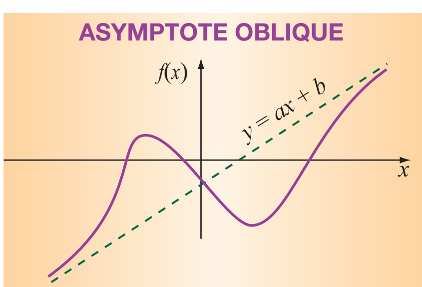
Lorsqu'une fonction f a une asymptote horizontale, on détermine algébriquement celle-ci en prenant la limite de la fonction lorsque tend vers l'infini ou moins l'infini. Symboliquement, une fonction $f(x)$ a une asymptote horizontale à $y = b$ si au moins l'une des conditions suivantes est satisfaite :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b \text{ ou } \lim_{x\to\infty} f(x)=b.$$

- Si $f(x)$ est une fonction rationnelle dont le degré du dénominateur est plus élevé que celui du numérateur, la fonction a une asymptote horizontale à la droite $y = 0$, ce que l'on confirme en évaluant la limite à l'infini.
- Si $f(x)$ est une fonction rationnelle dont le degré du dénominateur est égal à celui du numérateur, la fonction a une asymptote horizontale à la droite $y = b$, où b est le rapport des coefficients dominants des polynômes. On confirme ce verdict en évaluant la limite à l'infini.

ASYMPTOTE OBLIQUE

Le graphique d'une fonction f a une *asymptote oblique* si son graphique s'approche de plus en plus d'une droite oblique lorsque x tend vers l'infini ou moins l'infini. Pour confirmer qu'une fonction $f(x)$ a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$, il faut vérifier que la distance entre la courbe de $f(x)$ et la droite $y = ax + b$ s'approche de zéro lorsque x tend vers l'infini.

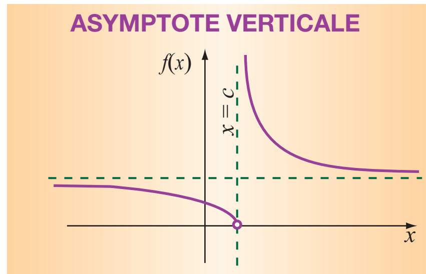


Symboliquement, le graphique d'une fonction f a une *asymptote oblique* à $y = ax + b$ si au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]=0 \text{ ou } \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-y\right]=0.$$

ASYMPTOTE VERTICALE

Le graphique d'une fonction f a une *asymptote verticale* si son graphique s'approche de plus en plus d'une droite verticale lorsque x s'approche d'une valeur particulière soit par la gauche, soit par la droite ou les deux.



Symboliquement, le graphique d'une fonction f a une *asymptote verticale* à $x = c$ si au moins l'une des conditions suivantes est satisfaite
:

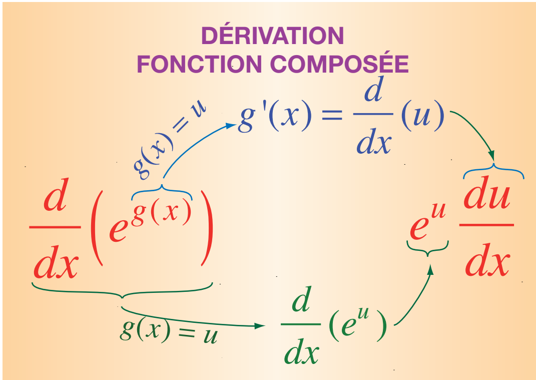
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$$
$$\text{ou } \lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x\to c^+} f(x) = \infty.$$

- Si $f(x)$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur est seul à s'annuler à $x = c$, alors la fonction a une asymptote verticale à $x = c$.
- Si $f(x)$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur et le numérateur s'annulent à $x = c$, alors la fonction a un trou à $x = c$.

CHANGEMENT DE VARIABLE

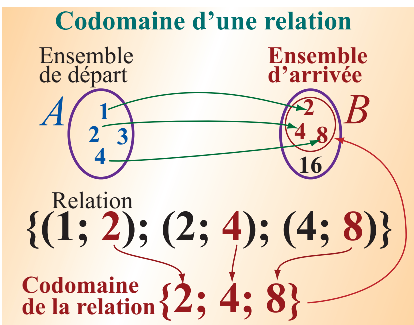
Le *changement de variable* est une procédure visant à ramener une fonction sous une forme usuelle simple. La notion de changement de variable est présente dans la dérivation des fonctions composées, dans l'intégrale indéfinie et définie.

En dérivation, l'objectif du changement de variable est d'utiliser les dérivées usuelles simples pour déterminer la dérivée d'une fonction composée.

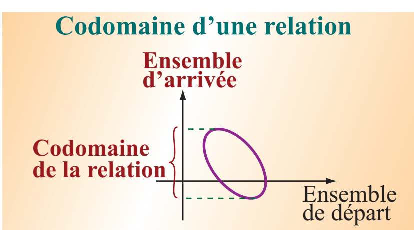


CODOMAINE D'UNE RELATION

Le *codomaine d'une relation* est l'ensemble des valeurs qui sont image dans au moins un couple de la relation.



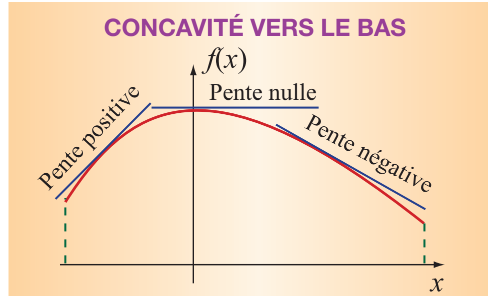
Dans un graphique cartésien, on peut identifier le codomaine sur l'axe vertical.



CONCAVITÉ VERS LE BAS

Géométriquement, une fonction est *concave vers le bas* dans un intervalle si elle est au-dessous de ses tangentes dans cet intervalle.

Analytiquement, une fonction est *concave vers le bas* dans un intervalle si son taux de variation diminue lorsque la valeur de la variable indépendante augmente dans cet intervalle, la dérivée première est donc décroissante dans cet intervalle et la dérivée seconde est négative.



La pente de la tangente, positive au départ, diminue graduellement pour devenir négative. La fonction dérivée est donc décroissante.

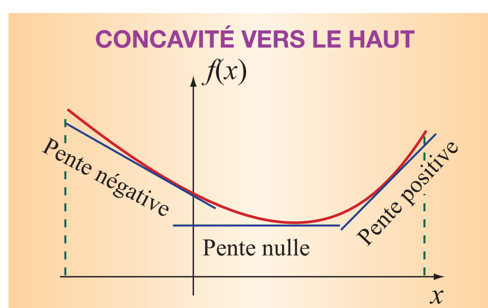
Symboliquement, une fonction f est concave vers le bas dans un intervalle I si et seulement si sa dérivée première est une fonction décroissante dans l'intervalle. Cela se traduit par le fait que la dérivée seconde est négative dans l'intervalle.

$$\begin{aligned} &f \text{ est concave vers le bas dans } I \\ \Leftrightarrow\ &f' \text{ est décroissante dans } I \\ \Leftrightarrow\ &f'' < 0 \text{ pour tout } x \in I \end{aligned}$$

CONCAVITÉ VERS LE HAUT

Géométriquement, une fonction est *concave vers le haut* dans un intervalle si elle est au-dessus de ses tangentes dans cet intervalle.

Analytiquement, une fonction est *concave vers le haut* dans un intervalle si son taux de variation augmente lorsque la valeur de la variable indépendante augmente dans cet intervalle, la dérivée première est donc croissante dans cet intervalle et la dérivée seconde est positive.



La pente de la tangente, négative au départ, augmente graduellement pour devenir positive. La fonction dérivée est donc croissante.

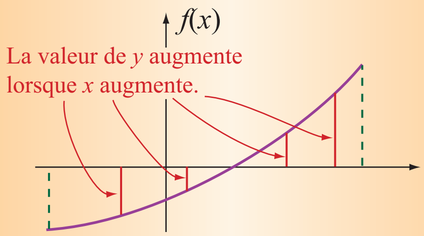
Symboliquement, une fonction f est concave vers le haut dans un intervalle I si et seulement si la dérivée première est une fonction croissante dans l'intervalle. Cela se traduit par le fait que la dérivée seconde est positive dans l'intervalle.

$$\begin{aligned} &f \text{ est concave vers le haut dans } I \\ &\Leftrightarrow f' \text{ est croissante dans } I \\ &\Leftrightarrow f'' > 0 \text{ pour tout } x \in I \end{aligned}$$

CROISSANCE

Géométriquement, une fonction f est *croissante* sur un intervalle I si l'image de x par la fonction augmente lorsque x augmente.

CROISSANCE



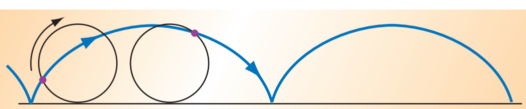
L'image de x par la fonction augmente lorsque x augmente. La pente de la tangente est positive en tous points de l'intervalle.

Analytiquement, une fonction f est *croissante* dans un intervalle I si et seulement si la pente de la tangente à la courbe est positive en tous points de l'intervalle. Cela se traduit par le fait que la dérivée est positive en tous points de l'intervalle et on écrit symboliquement :

$$f \text{ est croissante dans } I \Leftrightarrow f' > 0 \text{ pour tout } x \in I$$

CYCLOÏDE

La cycloîde est la tyrajectoire d'un point sur la circonférence d'un cercle qui roule sur une droite sans glisser.

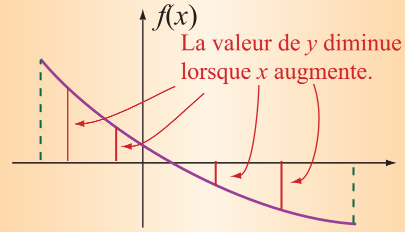


Cycloïde

DÉCROISSANCE

Géométriquement, une fonction f est d*écroissante* sur un intervalle I si l'image de x par la fonction diminue lorsque x augmente.

DÉCROISSANCE



L'image de x par la fonction diminue lorsque x augmente. La pente de la tangente est négative en tous points de l'intervalle.

Analytiquement, une fonction f est *décroissante* dans un intervalle I si et seulement si la pente de la tangente à la courbe est négative en tous points de l'intervalle. Cela se traduit par le fait que la dérivée est négative en tous points de l'intervalle et on écrit symboliquement :

$$f \text{ est décroissante dans } I \Leftrightarrow f' < 0 \text{ pour tout } x \in I$$

DÉRIVATION EN CHAÎNE

La *dérivation en chaîne* est une procédure de dérivation des fonctions composées qui consiste à dériver les formes de fonctions en ayant recours aux dérivées usuelles en partant de la fonction extérieure vers la ou les fonction(s) intérieure(s) .

Les fonctions usuelles simples sont :

FORMES USUELLES SIMPLES

$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
$\frac{d}{dx}\left(e^u\right) = e^u\frac{du}{dx}$	$(e^u)' = e^u u'$
$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u}u'$
$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u\frac{du}{dx}$	$(\sin u)' = u'\cos u$
$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u\frac{du}{dx}$	$(\cos u)' = -u'\sin u$
$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\frac{du}{dx}$	$(\tan u)' = u'\sec^2 u$
$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u\tan u\frac{du}{dx}$	$(\sec u)' = u'\sec u\tan u$
$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$	$(\cot u)' = -u'\csc^2 u$
$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u\cot u\frac{du}{dx}$	$(\csc u)' = -u'\csc u\cot u$

Ainsi, pour dériver la fonction :

$f(x) = e^{\sin^3 x^2}$, on procède comme suit :

DÉRIVATION EN CHAÎNE

$$f'(x) = \overbrace{\frac{d}{du}\left(e^{\sin^3 x^2}\right)}^{\frac{d}{dx}(e^u)}$$

$$= \overbrace{e^{\sin^3 x^2} \frac{d}{dx}\left(\sin^3 x^2\right)}^{e^u \frac{du}{dx}}$$

$$= e^{\sin^3 x^2} \overbrace{\frac{d}{dx}\left((\sin x^2)^3\right)}^{\frac{d}{dx}(u^n)}$$

$$= e^{\sin^3 x^2} \overbrace{3\sin^2 x^2 \frac{d}{dx}\left((\sin x^2)\right)}^{nu^{n-1}\frac{du}{dx}}$$

$$= e^{\sin^3 x^2}\, 3\sin^2 x^2 \overbrace{\frac{d}{dx}\left(\sin x^2\right)}^{\frac{d}{dx}(\sin u)}$$

$$= e^{\sin^3 x^2}\, 3\sin^2 x^2 \overbrace{\cos x^2 \frac{d}{dx}\left(x^2\right)}^{\cos u \frac{du}{dx}}$$

$$= e^{\sin^3 x^2}\, 3\sin^2 x^2 \cos x^2 \overbrace{\frac{d}{dx}\left(x^2\right)}^{\frac{d}{dx}(u^n)}$$

$$= e^{\sin^3 x^2}\, 3\sin^2 x^2 \cos x^2 \overbrace{2x \frac{dx}{dx}}^{n u^{n-1} \frac{du}{dx}}$$

$$= e^{\sin^3 x^2}\, 3\sin^2 x^2 \cos x^2\, 2x$$

$$= 6xe^{\sin^3 x^2} \sin^2 x^2 \cos x^2.$$

DÉRIVATION IMPLICITE

La dérivation implicite consiste à appliquer l'opérateur de dérivation aux deux membres d'une équation sans avoir à isoler une variable pour l'exprimer explicitement comme fonction de la variable par rapport à laquelle on dérive. Après avoir appliqué l'opérateur de dérivation, on peut isoler le taux de variation cherché, la procédure pour isoler est alors plus simple. Dans la plupart des cas, ce taux est alors exprimé en fonction des deux variables. Il est donc exprimé en fonction des deux coordonnées du point et non seulement en fonction de l'abscisse de celui-ci comme dans la dérivation explicite.

DÉRIVÉE DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES

Dérivée d'une fonction puissance

Si $f(x) = x^n$, où n est un nombre rationnel, alors :

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

En notation de l'opérateur de dérivation, on écrit :

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}.$$

Formes de fonctions

La règle de correspondance de plusieurs fonctions algébrique comporte des sommes, des différences, des produits, des quotients. En déterminant l'effet de l'opérateur de dérivation sur les formes de fonctions; somme, différence, produit et quotient, on peut établir des procédures permettant de dériver plusieurs fonctions algébriques. Dans le chapitre, on a établi la liste suivante.

DÉRIVATION DES FORMES

Si $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ sont des fonctions dérivables et $\boldsymbol{k}$ une constante :

- Produit d'une fonction par une constante $\boldsymbol{k}$:

$$(kv)' = kv' \text{ ou } \frac{d}{dx}(kv) = k\frac{d}{dx}(v).$$

- Somme (ou différence) de fonctions :

$$(u+v)' = u' + v' \text{ ou } \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v).$$

$$(u-v)' = u' - v' \text{ ou } \frac{d}{dx}(u-v) = \frac{d}{dx}(u) - \frac{d}{dx}(v).$$

- Produit de fonctions :

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ ou } \frac{d}{dx}(uv) = v\frac{d}{dx}(u) + u\frac{d}{dx}(v).$$

- Quotient de fonctions :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ ou } \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

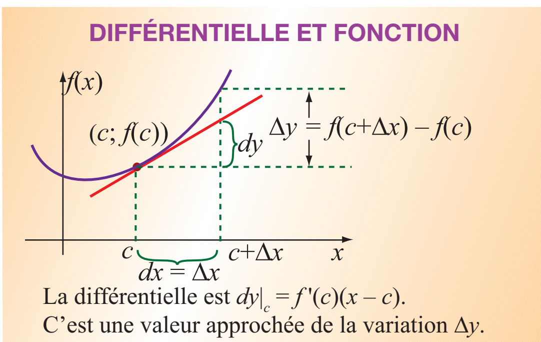
DIFFÉRENTIELLE

La *différentielle* est une notion associée à la variation d'une variable.

- La différentielle d'une variable indépendante, notée dx, est la variation réelle de celle-ci, on note donc $dx = \Delta x$.
- La différentielle d'une variable dépendante, notée dy, est une estimation de la variation Δy. La différentielle d'une fonction f en un point d'abscisse c de son domaine dépend de c, l'abscisse d'un point de la courbe, de la variation dx de la variable indépendante et du taux de variation au point d'abscisse c. Elle est définie par :

$$dy|_c = f\,'(c)\;dx.$$

On peut interpréter graphiquement la différentielle dy à partir de la fonction f ou à partir de sa dérivée $f\,'$.

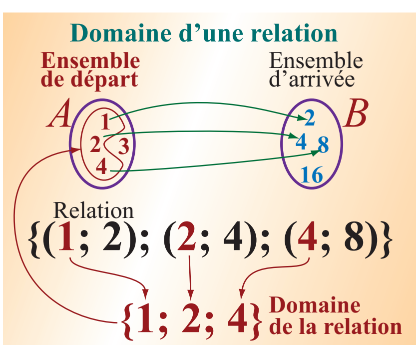


La différentielle est $dy|_c = f\,'(c)(x - c)$.
C'est une valeur approchée de la variation Δy.

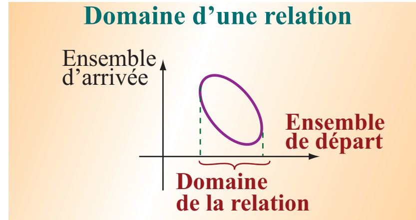
L'interprétation de la différentielle à partir de la fonction f permet de calculer une valeur approchée de la variation Δy de la variable indépendante dans l'intervalle $[c;\ c + \Delta x]$.

DOMAINE D'UNE RELATION

Le *domaine* d'une relation est l'ensemble des valeurs qui sont préimage dans au moins un couple de la relation.



Dans un graphique cartésien, on peut identifier le domaine sur l'axe horizontal.



DOMAINE DE VALIDITÉ D'UN MODÈLE

Intervalle pour lequel le modèle est valide, compte tenu de la situation qu'il décrit.

ÉQUATION D'UNE DROITE

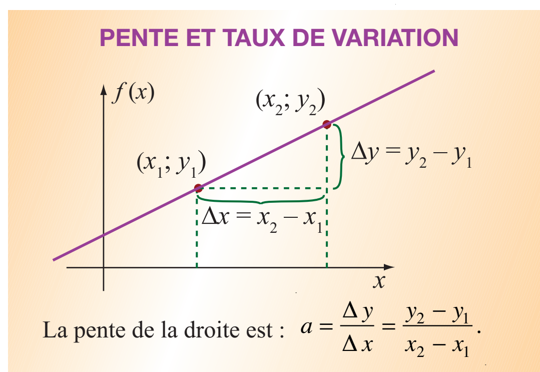
L'équation d'une droite est une expression de la forme :

$$y = ax + b.$$

Sa représentation graphique est une droite de pente a et d'ordonnée à l'origine b (voir également fonction affine).

À partir de données numériques, la pente est le rapport de la variation de y sur la variation de x. Ainsi, si les données sont $(x_1;\ y_1)$ et $(x_2;\ y_2)$, la pente est :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



La pente de la droite est : $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

L'équation de la droite de pente a passant par un point $(c;\ d)$ est donnée par :

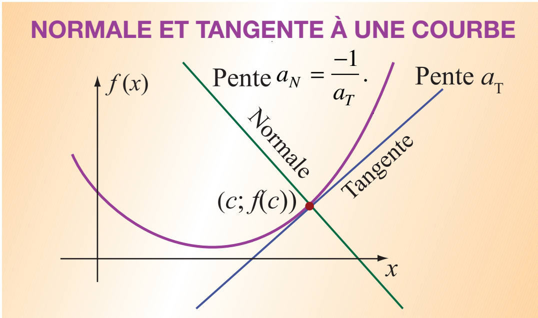
$$y = d + a(x - c).$$

ÉQUATION DE LA NORMALE

La normale à une courbe en un point $(c;\ f(c))$ est la droite perpendiculaire à la courbe et à la tangente en ce point. L'équation de la normale à la courbe est donc l'équation de la droite passant par le point de tangence $(c;\ f(c))$ et dont la pente est $a_N = -1/a_T$.

Cette équation est :

$$y = f(c) + a_N\,(x - c).$$



ÉQUATION DE LA TANGENTE

C'est l'équation de la droite passant par le point de tangence $(c; f(c))$ et dont la pente est $a_T = \left.\frac{dy}{dx}\right|_c$.

Cette équation est :

$$y = f(c) + a_T\,(x - c).$$

ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES

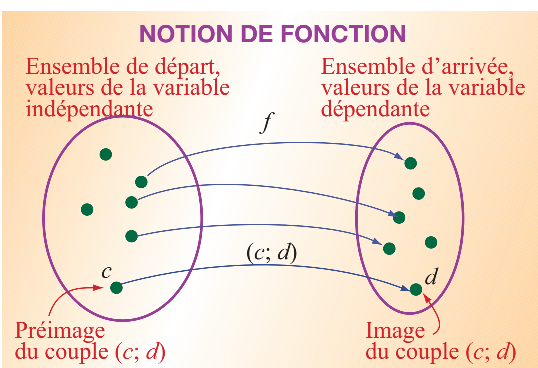
Les équations d'une courbe qui décrivent les coordonnées d'un point mobile à l'aide d'un paramètre.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \end{cases}$$

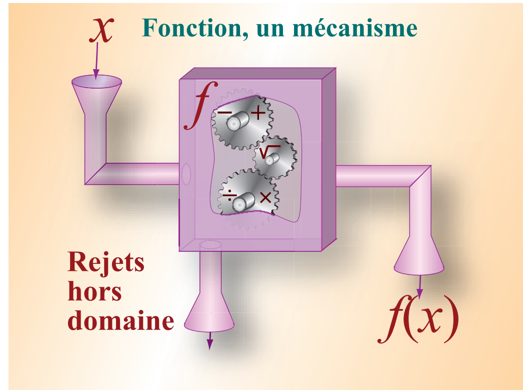
En issolant le paramètre dans l'une des équations et een substituant dans l'autre, on obtient l'équation cartésienne de la courbe.

FONCTION

Une *fonction* est une correspondance entre les éléments de deux ensembles telle qu'à chaque valeur de la variable indépendante ne correspond qu'une seule valeur de la variable dépendante.



On compare parfois une fonction à un mécanisme. On y introduit une valeur de la variable indépendante et il en ressort l'image de la valeur introduite. Les valeurs de l'ensemble de départ pour lesquelles le mécanisme n'est pas défini sont rejetées.



FONCTION AFFINE

Une *fonction affine* est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax + b.$$

Sa représentation graphique est une droite de pente a et d'ordonnée à l'origine b. Le taux de variation en tout point de la courbe est a, la pente de la droite (voir aussi équation d'une droite et coût de production).

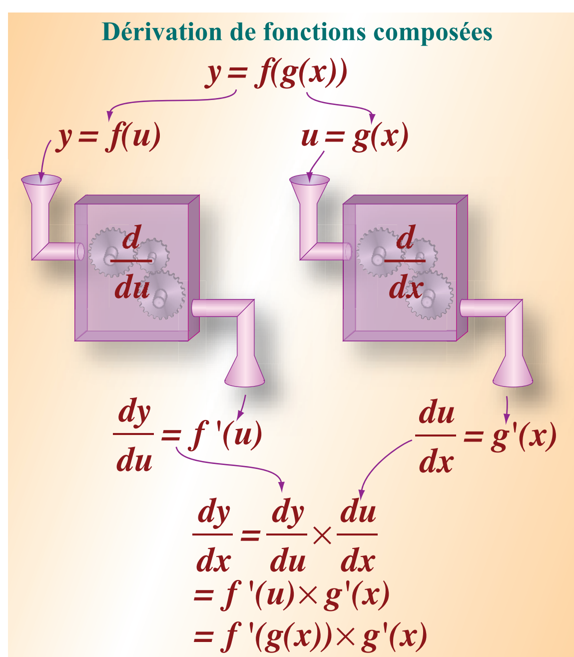
FONCTION ALGÉBRIQUE

Une *fonction algébrique* est une fonction dont la règle de correspondance ne comporte qu'un nombre fini d'opérations algébriques : addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines.

FONCTION COMPOSÉE

Une *fonction composée* est une fonction que l'on peut ramener à une forme usuelle simple par changement de variable.

On applique alors les formes usuelles pour dériver la fonction.



FONCTION CONSTANTE

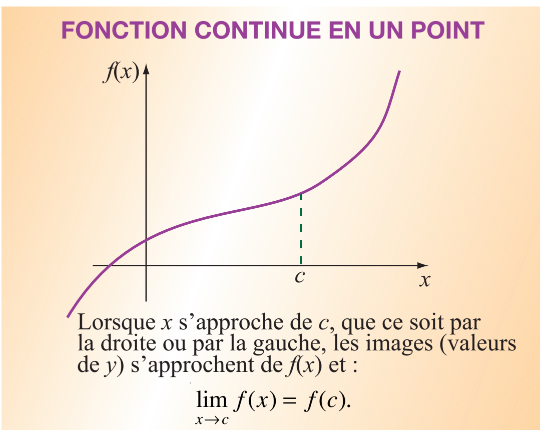
Une *fonction constante* est une fonction dont la variable dépendante est constante, elle est de la forme :

$$f(x) = b.$$

Elle est représentée graphiquement par une droite parallèle à l'axe horizontal. Son taux de variation est nul en tout point.

FONCTION CONTINUE

Intuitivement, une *fonction continue* est une fonction dont on peut tracer la courbe sans avoir à lever le crayon du papier. Cette définition intuitive n'est cependant ni suffisamment précise, ni utilisable dans une démonstration .
Analytiquement, une fonction est *continue en un point d'abscisse* c si la limite de la fonction lorsque x tend vers c est égale à $f(c)$.



Une fonction est *continue sur un intervalle* $[c; d]$ si elle est continue en tout point de l'intervalle (voir aussi fonction discontinue).

FONCTION DÉRIVABLE

On dit qu'une fonction f est dérivable à $x = c$ si la limite suivante existe :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Rappelons que la limite existe si ;

- la limite à gauche est égale à la limite à droite;
- cette limite est un nombre réel.

Cela signifie également que la pente de la tangente la tangente au point $(c; f(c))$ ou la taux de variation ponctuel est un nombre réel.

En faisant appel à la fonction dérivée, on dit qu'une fonction f est *dérivable* au point d'abscisse c si $f'(c)$ est définie, c'est-à-dire qu'on peut calculer l'image de c par la fonction f'.

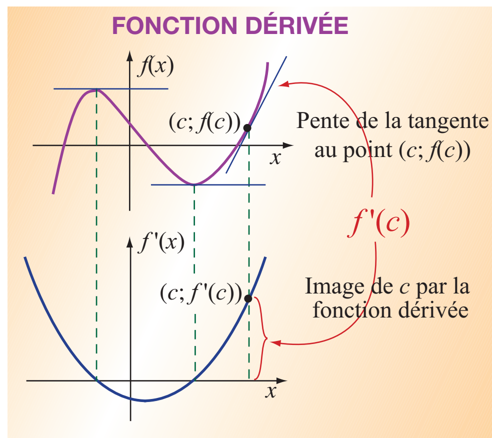
On dit qu'une fonction f est *dérivable sur un intervalle I* si elle est dérivable pour toute valeur de x dans cet intervalle.

FONCTION DÉRIVÉE

La *dérivée* d'une fonction f est définie par :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

C'est la fonction qui décrit le comportement du taux de variation ponctuel (pente de la tangente) en fonction de l'abscisse du point.



La définition de fonction dérivée nous a permis de déterminer la dérivée d'une fonction puissance, de l'exponentielle et de la logarithmique de base e, ainsi que des fonctions trigonométriques. Nous l'avons également utilisée pour démontrer toutes les techniques de dérivation ; sommes, produits, quotients et fonctions composées.

FONCTION DISCONTINUE

Intuitivement, une fonction discontinue est une fonction dont on ne peut tracer le graphique sans lever le crayon du papier.
Il y a divers types de discontinuité : par trou, par déplacement, par saut, fini ou infini et discontinuité par manque.

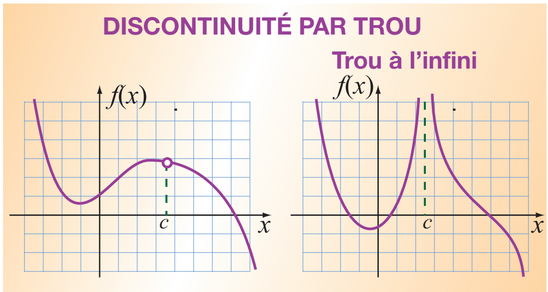
Discontinuité par trou

On dit qu'une fonction f a une discontinuité par trou à $x = c$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

- la fonction n'est pas définie pour x = c (c n'est pas dans le domaine de la fonction);

- la limite de la fonction lorsque x tend vers c existe (la limite à gauche est égale à la limite à droite et cette limite est un nombre réel).

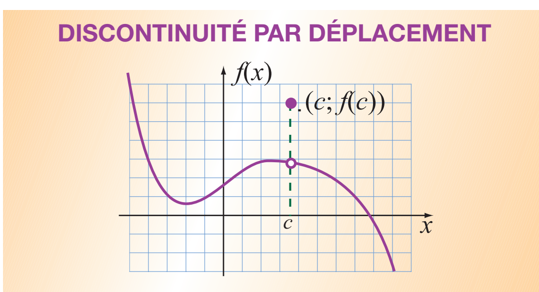
Lorsque la limite à gauche et la limite à droite sont toutes les deux égales à l'infini ou toutes les deux égales à moins l'infini, on a une discontinuité par trou à l'infini.



Discontinuité par déplacement

On dit qu'une fonction f a une discontinuité par déplacement à $x = c$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

- la fonction est définie à $x = c$;
- la limite de la fonction lorsque x tend vers c existe;
- la limite de la fonction lorsque x tend vers c est différente de l'image de c.



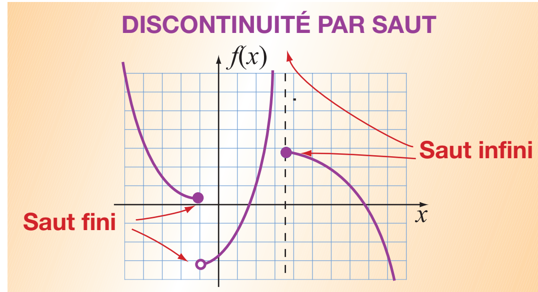
Discontinuité par saut

On dit qu'une fonction f a une discontinuité par saut à $x = c$ si la condition suivante est satisfaite :

- la limite de la fonction lorsque x tend vers c par la gauche est différente de la limite de la fonction lorsque x tend vers c par la droite.

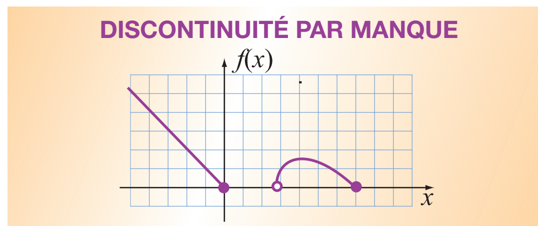
Lorsque la limite à gauche et la limite à droite sont des nombres réels, on a une discontinuité par *saut fini*.

Lorsque l'une des limites à gauche ou à droite est l'infini ou moins l'infini, on a une discontinuité par *saut infini*.



Discontinuité par manque

On dit qu'une fonction f a une discontinuité par manque sur un intervalle si la fonction n'est pas définie sur cet intervalle. L'intervalle peut être ouvert ou fermé et il peut s'étendre jusqu'à l'infini ou jusqu'à moins l'infini.



FONCTION EXPONENTIELLE

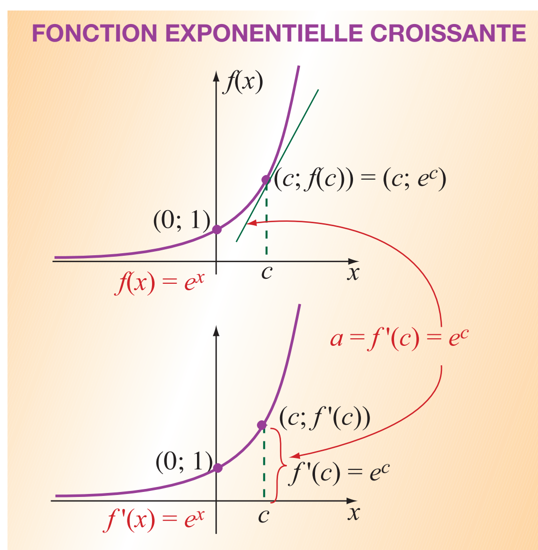
Une *fonction exponentielle* est une fonction dont la variable indépendante est en exposant. Soit une fonction de la forme :

$$f(x) = b^x \text{ où } b > 0 \text{ et } b \neq 1.$$

La fonction exponentielle usuelle, de base e, est :

$$f(x) = e^x.$$

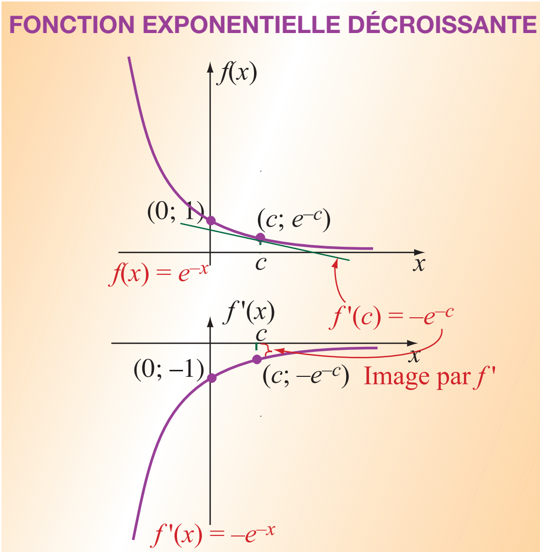
Cette fonction est sa propre dérivée, soit $f'(x) = e^x$.



La fonction exponentielle décroissante est :

$$f(x) = e^{-x}$$

dont la dérivée est $f'(x) = -e^{-x}$.



Une fonction de la forme $f(x) = b^x$ peut toujours se ramener à une exponentielle de base e. En effet, les propriétés des logarithmes et des exposants permettent d'écrire $e^{\ln b} = b$. C'est donc dire que :

$$f(x) = b^x = e^{x \ln b}.$$

On dérive facilement une telle fonction par la dérivation en chaîne. Cela donne :

$$\frac{d}{dx}\left(b^x\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln b}\right)$$

$$= e^{x\ln b}\frac{d}{dx}(x\ln b) = e^{x\ln b}\ln b = b^x \ln b.$$

Dans la modélisation de phénomènes de croissance ou de décroissance, on peut avoir à procéder à partir d'une équation différentielle. La fonction obtenue est alors une fonction exprimée en base e.

Lorsqu'on veut modéliser un phénomène à partir de sa description verbale, on obtient plus souvent des fonctions de la forme :

$f(x) = ab^x$ où $b > 0$, $b \neq 1$ et a est la valeur initiale.

Dans les cas de croissance à un taux constant r, la fonction est de la forme :

$f(x) = a(1 + r)^x$ où $r > 0$ est le taux de croissance.

Dans les cas de décroissance à un taux constant r, la fonction est de la forme :

$f(x) = a(1 - r)^x$ où $r > 0$ est le taux de décroissance.

FONCTION INVERSE

Lorsque la relation formée de tous les couples réciproques d'une fonction est une fonction, on l'appelle *fonction inverse*. Le graphique d'une relation réciproque est symétrique à celui de la fonction par rapport à la droite $y = x$.

FONCTION LOGARITHMIQUE

Une *fonction logarithmique* est une fonction de la forme :

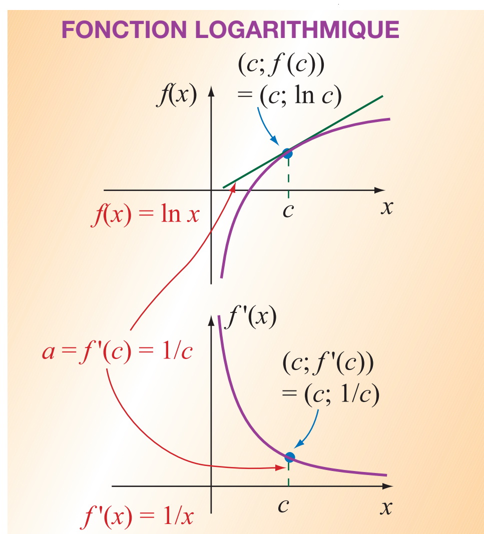
$$f(x) = a \log_c x + b \text{ où } c > 0 \text{ et } c \neq 1.$$

La forme la plus simple est la fonction de base e qui s'écrit :

$$f(x) = \ln x.$$

Le domaine de cette fonction est l'intervalle]0; ∞[et sa dérivée est :

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$



FONCTION POLYNOMIALE

Une *fonction polynomiale* de degré n est une fonction de la forme :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

FONCTION PUISSANCE

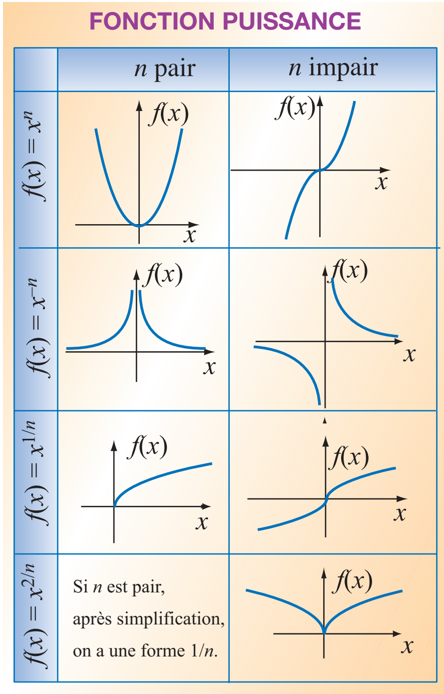
Une *fonction puissance* est une fonction de la forme :

$$f(x) = x^n, \text{ où } n \text{ est un nombre réel.}$$

Dans le présent cours, nous n'avons rencontré que des cas où n est un nombre rationnel.

La fonction puissance prend diverses formes selon que l'exposant est entier ou fractionnaire. Cependant, la dérivée est toujours donnée par :

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}.$$



FONCTION QUADRATIQUE

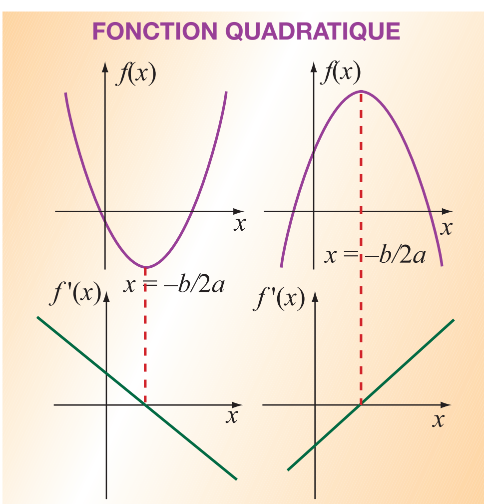
Une *fonction quadratique* est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Sa représentation graphique est une parabole dont l'ordonnée à l'origine est c. Son taux de variation est décrit par la dérivée :

$$f'(x) = 2ax + b,$$

qui s'annule à $x = –b/2a$. Sa dérivée seconde est $f''(x) = 2a$.



Si $a < 0$, la dérivée seconde est négative et la parabole est concave vers le bas. Le point d'abscisse $x = –b/2a$ est alors la valeur maximale de la fonction.

Si $a > 0$, la dérivée seconde est positive et la parabole est concave vers le haut. Le point d'abscisse $x = –b/2a$ est alors la valeur minimale de la fonction.

FONCTION RATIONNELLE

Une *fonction rationnelle* est une fonction dont la règle de correspondance est définie par un quotient de polynômes. Par exemple :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 4}$$

est une fonction rationnelle. Pour dériver une telle fonction, il faut appliquer la règle du quotient de fonctions (voir à ce sujet dérivée des fonctions algébriques).

FONCTION TRANSCENDANTE

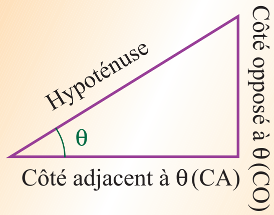
Une *fonction transcendante* est une fonction dont la règle de correspondance ne peut se décrire par un nombre fini d'opérations algébriques : addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines.

Les fonction exponentielles, logarithmiques, trigonométriques et trigonométriques inverses sont des fonctions transcendantes.

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

La notion de *fonction trigonométrique* découle de celle de *rapport trigonométrique*. Dans un triangle rectangle, dont un des côtés est constant, les longueurs des autres côtés dépendent d'un angle aigu du triangle. Un rapport trigonométrique est un rapport des longueurs de deux côtés du triangle. À partir des trois côtés d'un triangle rectangle, on peut définir six rapports.

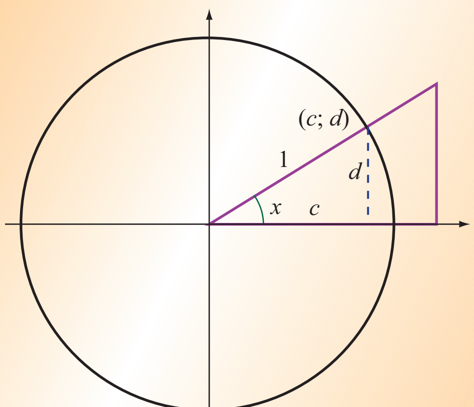
RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES



$$\sin\theta=\frac{CO}{H},\quad \cos\theta=\frac{CA}{H},\quad \tan\theta=\frac{CO}{CA},$$
$$\csc\theta=\frac{H}{CO},\quad \sec\theta=\frac{H}{CA},\quad \cot\theta=\frac{CA}{CO}.$$

Dans ce contexte, les rapports trigonométriques n'étaient définis que pour des angles inférieurs à 90° ou π/2 rad. L'avènement de la géométrie analytique a permis de généraliser les rapports trigonométriques en définissant les fonctions à l'aide des coordonnées (c; d) du point d'intersection de l'angle x avec la circonférence du *cercle trigonométrique*, soit le cercle de rayon 1 centré à l'origine d'un système d'axes.

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES



$$\sin x=d,\quad \cos x=c,\quad \tan x=\frac{d}{c},$$
$$\csc x=\frac{1}{d},\quad \sec x=\frac{1}{c},\quad \cot x=\frac{c}{d}.$$

En définissant ainsi les fonctions, l'angle x peut varier de $-\infty$ à ∞.

Les dérivées de ces fonctions sont :

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x,\qquad \frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x,$$
$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x,\qquad \frac{d}{dx}(\sec\theta)=\sec x\tan x,$$
$$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x,\qquad \frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x.$$

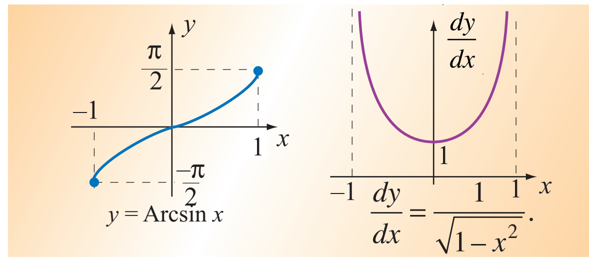
FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES INVERSES

Fonction Arcsinus

La fonction inverse de la fonction sinus est appelée *Arcsinus* et est définie de la façon suivante :

y = Arcsin x si et seulement si $x = \sin y$,

où $\text{dom}_{\text{Arcsin}} = [-1;\ 1]$ et $\text{codom}_{\text{Arcsin}} = [-\pi/2;\ \pi/2]$.

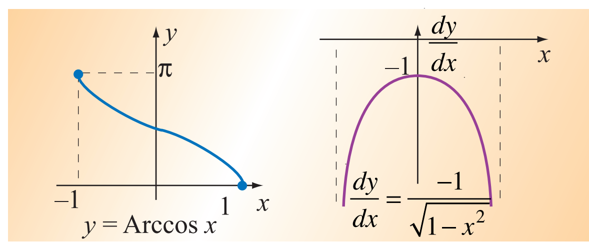


Fonction Arccosinus

La fonction inverse de la fonction cosinus est appelée *Arccosinus* et est définie de la façon suivante :

y = Arccos x si et seulement si $x = \cos y$,

où $\text{dom}_{\text{Arccos}} = [-1;\ 1]$ et $\text{codom}_{\text{Arccos}} = [0;\ \pi]$.

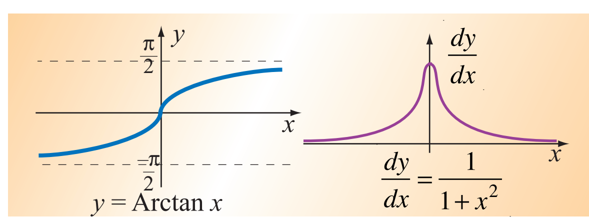


Fonction Arctangente

La fonction inverse de la fonction tangente est appelée *Arctangente* et est définie de la façon suivante :

y = Arctan x si et seulement si $x = \tan y$,

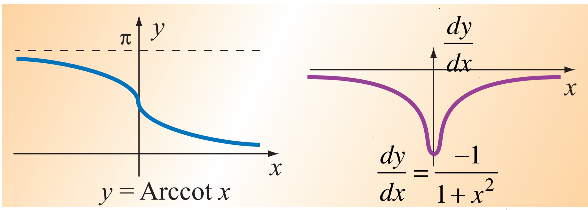
où $\text{dom}_{\text{Arctan}} = \mathbf{R}$ et $\text{codom}_{\text{Arctan}} =]-\pi/2;\ \pi/2[$.



Fonction Arccotangente

La fonction inverse de la fonction cotangente est appelée *Arccotangente* et est définie de la façon suivante :

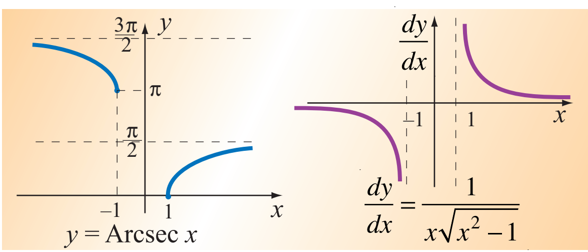
y = Arccot x si et seulement si x = cot y,
où $\text{dom}_{\text{Arccot}} = \mathbf{R}$ et $\text{codom}_{\text{Arccot}} =]0; \pi[$.



Fonction Arcsécante

La fonction inverse de la fonction sécante est appelée *Arcsécante* et est définie de la façon suivante :

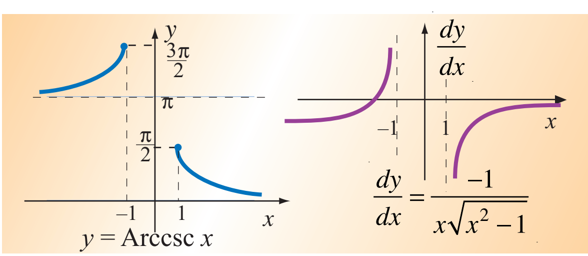
y = Arcsec x si et seulement si x = sec y,
où $\text{dom}_{\text{Arcsec}} =]-\infty; -1]\cup[1; \infty[$
et $\text{codom}_{\text{Arcsec}} = [0; \pi/2[\cup[\pi; 3\pi/2[$.



Fonction Arccosécante

La fonction inverse de la fonction cosécante est appelée *Arccosécante* et est définie de la façon suivante :

y = Arccsc x si et seulement si x = csc y,
où $\text{dom}_{\text{Arccsc}} =]-\infty; -1]\cup[1; \infty[$
et $\text{codom}_{\text{Arccsc}} =]0; \pi/2]\cup]\pi; 3\pi/2]$.



MAGE D'UN COUPLE

Soit (c; d), un couple d'une relation. La *préimage* est le premier élément du couple et l'image est le deuxième élément du couple.

INCERTITUDE

Les instruments de mesure n'étant pas de précision infinie, les mesures faites pendant une expérience ne sont pas exactes. Il en résulte une *incertitude* sur les calculs portant sur ces mesures. On estime cette incertitude par la différentielle de la relation entre la variable mesure et la variable calculée..

LIMITE À L'INFINI

La *limite à l'infini* d'une fonction est la valeur vers laquelle tendent les images de la fonction lorsque sa variable indépendante tend vers l'infini ou moins l'infini. Une limite à l'infini peut être un nombre réel lorsque la fonction a une asymptote horizontale et elle peut être infinie, en particulier lorsque la fonction a une asymptote oblique.

LIMITE INFINIE

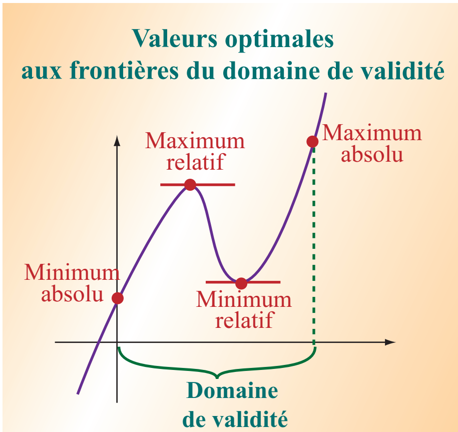
Par *limite infinie* on désigne le comportement des valeurs d'une fonction qui croissent ou décroissent sans borne. Les asymptotes verticales sont des droites correspondant à des limites infinies du type :

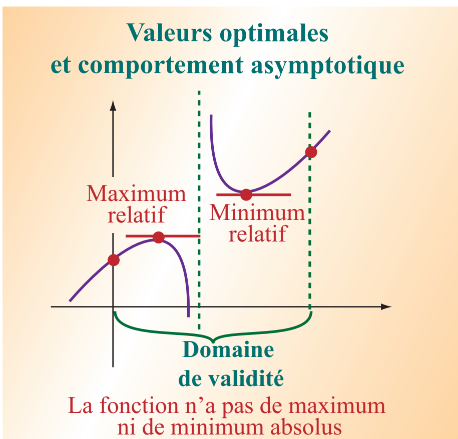
$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty.$$

MAXIMUM ET MINIMUM ABSOLUS

Plus grande valeur qu'un modèle peut prendre dans son domaine de validité. Pour le trouver, il faut évaluer la fonction aux maxima relatifs de ce domaine et à ses frontières.

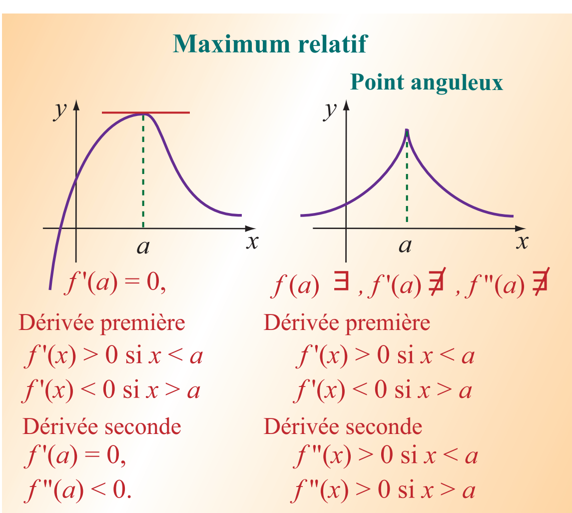
Plus petite valeur qu'un modèle peut prendre dans son domaine de validité. Pour le trouver, il faut évaluer la fonction aux minima relatifs de ce domaine et à ses frontières.





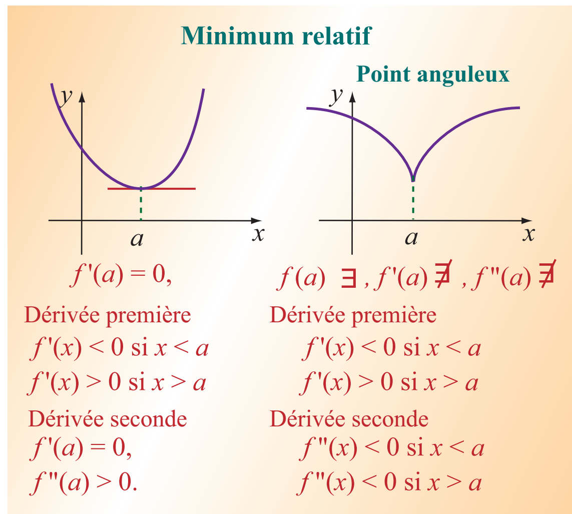
MAXIMUM RELATIF

Plus grande valeur de la fonction dans un voisinage. On le définit de la façon suivante :
Soit f, une fonction. On dit que la fonction admet un *maximum relatif* au point d'abscisse a s'il existe un intervalle $]c; d[\subset \mathrm{dom}_f$ tel que $a \in\ ]c; d[$ et $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in\ ]c; d[$.



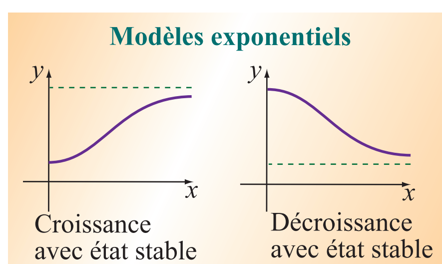
MINIMUM RELATIF

Plus petite valeur de la fonction dans un voisinage. On le définit de la façon suivante :
Soit f une fonction. On dit que la fonction admet un *minimum relatif* au point d'abscisse a s'il existe un intervalle $]c; d[\subset \mathrm{dom}_f$ tel que $a \in\ ]c; d[$ et $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in\ ]c; d[$.



MODÈLES EXPONENTIELS LIMITÉS

Un *modèle exponentiel limité* est un modèle exponentiel dont la croissance ou la décroissance n'est pas infinie. Ils décrivent des phénomène de croissance ou de décroissance comportant un état stable (asymptote horizontale).



MODÉLISATION

La *modélisation* est la démarche visant à décrire le lien entre les variables d'un phénomène par une règle de correspondance que l'on appelle *modèle mathématique*.

MOUVEMENT CURVILIGNE

Tout mouvement qui n'est pas rectiligne. La description et l'analyse d'un mouvement curviligne se fait normalement à l'aide d'équations paramétriques.

OPTIMISATION

En optimisation, on doit rechercher les valeurs optimales d'un modèle décrivant une situation ou un phénomène.

OPÉRATEUR DE DÉRIVATION

Symbole qui signifie : dériver l'expression dans la parenthèse qui suit. On le note :

$$\frac{d}{dx}(\ ).$$

ORDONNÉE À L'ORIGINE

Ordonnée du point de rencontre d'une fonction avec l'axe vertical. C'est la valeur de la variable dépendante lorsque la variable indépendante est nulle. Dans le cas d'un modèle décrivant un coût, cette valeur représente les frais fixes. Lorsque la variable indépendante est le temps, l'ordonnée à l'origine représente la valeur initiale (à $t = 0$).

PARAMÈTRE

Le mot paramètre s'utilise en divers sens en mathématiques.

Dans son premier sens, le paramètre est un symbole d'un modèle général auquel on peut assigner une valeur particulière qui est maintenue constante pour décrire un phénomène. En ce sens, on dit que les symboles a et b sont les paramètres de la fonction affine :

$$f(x) = ax + b.$$

En donnant des valeurs à a et b, on obtient une fonction particulière. Par exemple, en posant $a = 2$ et $b = 3$ et en maintenant ces valeurs constantes, on a la fonction :

$$f(x) = 2x + 3.$$

En changeant la valeur des paramètres, on obtient une autre fonction affine.

Dans son deuxième sens, le paramètre est une variable à l'aide de laquelle on exprime plusieurs variables entre lequelles il existe une relation. C'est en ce sens qu'est utilisé le mot paramètre dans le présent chapitre. Ainsi, dans l'expression :

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 4 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$$

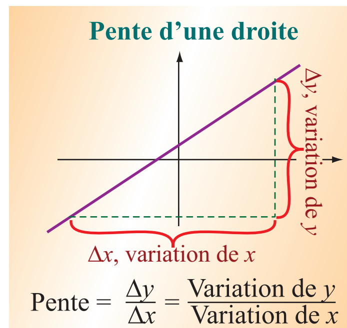
les variables x et y sont exprimées en fonction du paramètre t. On peut faire la même chose dans un repère tridimensionnel en considérant trois variables et un paramètre.

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 4 \\ y = 3t - 1 \\ z = t^3 + 2t \end{cases}$$

En statistiques, on utilise le mot paramètre pour représenter différentes mesures d'une série statistique, soit la médiane, le mode, la moyenne, la variance, ...

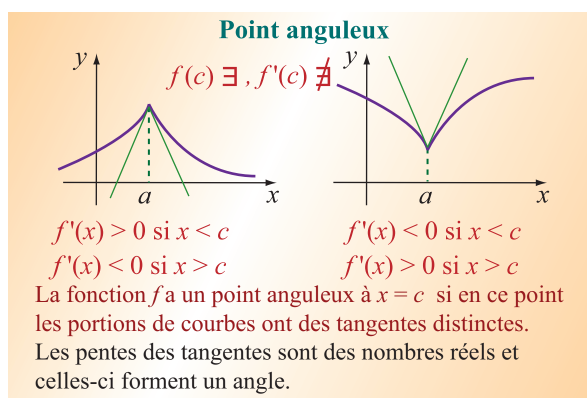
PENTE D'UNE DROITE

La *pente d'une droite* est le rapport de la variation de la variable dépendante sur la variation correspondante de la variable indépendante. La pente d'une droite est un rapport constant quel que soit l'intervalle considéré.



POINT ANGULEUX

Un *point anguleux* est un point du graphique d'une fonction où la courbe change brutalement de direction et où la courbe admet deux tangentes distinctes (voir représentation graphique dans maximum relatif et dans minimum relatif).

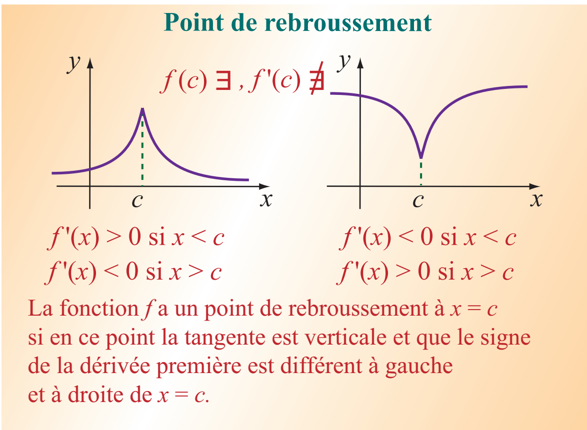


POINT CRITIQUE

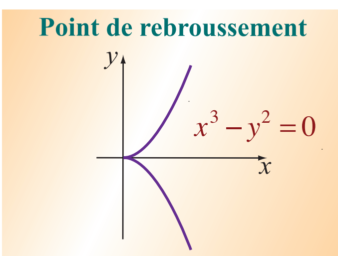
Soit f, une fonction et c un élément de son domaine. On dit que c est une *valeur critique de* f si $f'(c) = 0$ ou si $f'(c)$ n'existe pas. Si la correspondance est définie, c'est-à-dire si $f(c)$ existe, alors le point $(c; f(c))$ est appelé *point critique*. Un point critique peut être un maximum relatif, un minimum relatif, un point anguleux, ou un point de rebroussement.

POINT DE REBROUSSEMENT

Un *point de rebroussement* est un point du graphique d'une fonction où la courbe change brutalement de direction et où la courbe admet deux tangentes verticales confondues.

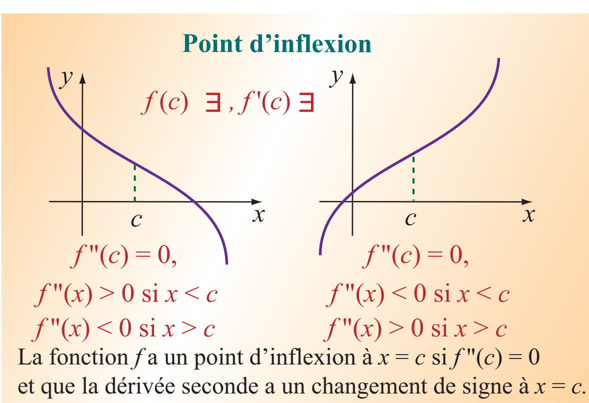


Notons qu'une relation peut avoir un point de rebroussement dont la tangente est horizontale.



POINT D'INFLEXION

Un *point d'inflexion* est un point où s'effectue un changement de concavité.



PRÉIMAGE D'UN COUPLE

Soit $(c; d)$, un couple d'une relation. La préimage est le premier élément du couple et l'image est le deuxième élément du couple.

PROPRIÉTÉS DES LIMITES

Si $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{k}$ sont des nombres réels et que :

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \text{ et } \lim_{x\to c} g(x) = M,$$

alors on a les propriétés suivantes :

- $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = L + M,$
- $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x) = L - M,$
- $\lim\limits_{x\to c}\left[kf(x)\right] = k\lim\limits_{x\to c} f(x) = kL,$
- $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)g(x)\right] = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to c} g(x)\right) = LM,$
- $\lim\limits_{x\to c}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)}{\left(\lim\limits_{x\to c} g(x)\right)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$,
- $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\right]^{r/s} = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^{r/s} = L^{r/s}.$

En utilisant ces propriétés pour évaluer des limites, on a constaté rapidement que dans la plupart des cas, on peut évaluer la limite en calculant l'image par la fonction.

RELATION DE A DANS B

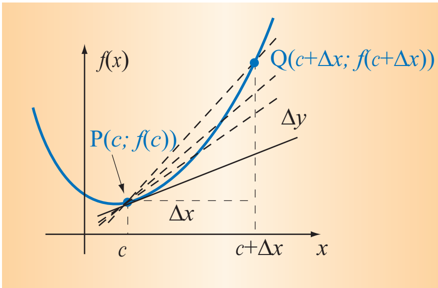
Ensemble de couples $(c; d)$ tel que $c \in A$ et $d \in B$. L'ensemble A est appelé l'*ensemble de départ* de la relation et B, l'*ensemble d'arrivée de* la relation.

RELATION RÉCIPROQUE

Relation obtenue en intervertissant les composantes de chaque couple de la fonction. La relation réciproque est parfois une fonction, on l'appelle alors *fonction inverse*.

TANGENTE À UNE COURBE

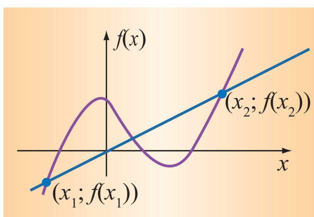
La tangente en un point d'abscisse c est la droite vers laquelle tendent les sécantes passant par les points $(c; f(c))$ et $(c+\Delta x; f(c+\Delta x))$ lorsque Δx tend vers 0. La tangente touche la courbe en un point (Blaise Pascal l'appelait la *touchante*).



TAUX DE VARIATION MOYEN

Le taux de variation moyen d'une fonction $y = f(x)$ sur un intervalle $[x_1; x_2]$ est le rapport de la variation de la variable dépendante sur celle de la variable indépendante dans cet intervalle. On le note :

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[x_1;x_2]} \text{ ou } \left.\text{TVM}\right|_{[x_1;x_2]}.$$



Pour fins de calculs, il est défini par :

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[x_1;x_2]} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ou } \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[x_1;x_2]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

où est $x_2 - x_1$ est la largeur Δx de l'intervalle.

Si l'intervalle est noté $[c;\ c + \Delta x]$, le taux de variation moyen est alors :

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[c;c+\Delta x]} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Graphiquement, le taux de variation moyen est la pente de la sécante à la courbe passant par les points $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$ ou par les points $(c; f(c))$ et $(c+\Delta x; f(c+\Delta x)$, selon la notation utilisée.

TAUX DE VARIATION INSTANTANÉ

Lorsque la variable indépendante est le temps t, le taux de variation ponctuel est appelé *taux de variation instantané*.

TAUX DE VARIATION LIÉS

Lorsqu'il existe un lien entre deux variables, il existe également un lien entre leurs taux de variation instantanés. On dit alors que les taux de variation sont liés. Pour obtenir la relation entre les taux, on dérive implicitement la relation entre les variables.

TAUX DE VARIATION PONCTUEL

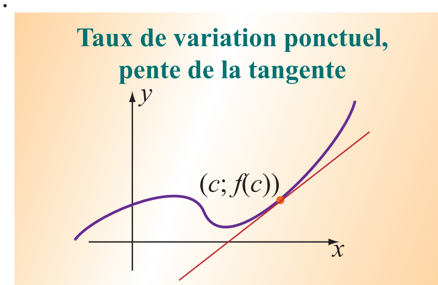
Le taux de variation ponctuel en un point $(c; f(c))$ est la valeur limite des taux de variation moyens sur des intervalles emboîtés dont la largeur tend vers 0 au voisinage du point. On le note :

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_c \text{ ou } \left.\text{TVP}\right|_c$$

et il est obtenu en évaluant :

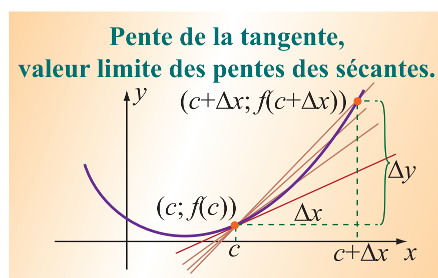
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Graphiquement, le taux de variation ponctuel est la pente de la tangente au point d'abscisse c, soit le point $(c; f(c))$.



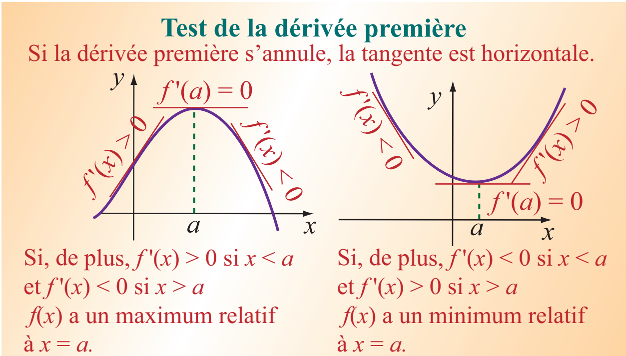
Il est impossible de calculer directement le taux de variation ponctuel car pour calculer la pente d'un segment de droite, il faut en connaître deux points et on ne connaît que le point de tangence. C'est pourquoi il faut prendre la limite des pentes des sécantes sur un intervalle de largeur Δx au voisinage de c, lorsque Δx tend vers 0. On a donc :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_c = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$



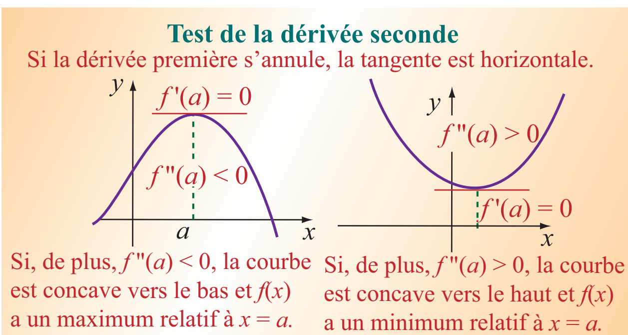
TEST DE LA DÉRIVÉE PREMIÈRE

Test qui permet, en analysant le signe de la dérivée première au voisinage d'un point critique, de déterminer si ce point correspond à une valeur maximale ou à une valeur minimale de la fonction.



TEST DE LA DÉRIVÉE SECONDE

Test qui permet, en analysant le signe de la dérivée seconde en un point critique associé à un zéro de la dérivée première, de déterminer si ce point correspond à une valeur maximale ou à une valeur minimale de la fonction.

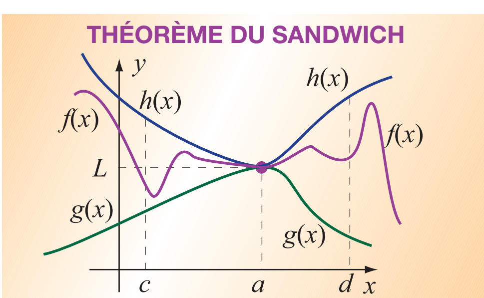


THÉORÈME DU SANDWICH

Le *théorème du sandwich* est à l'effet que lorsque les images d'une fonction $f(x)$ sont toujours comprises entre celles de deux autres fonctions, $g(x)$ et $h(x)$ au voisinage d'une valeur a et que ces deux fonctions ont la même limite L lorsque x tend vers a,

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

alors $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = L.$

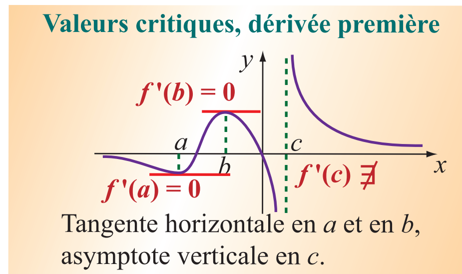


VALEUR CRITIQUE

Soit f, une fonction. On dit qu'un élément a du domaine de f est une *valeur critique de f* relative à l'une de ses dérivées si la dérivée s'annule à $x = a$ ou si elle n'existe pas.

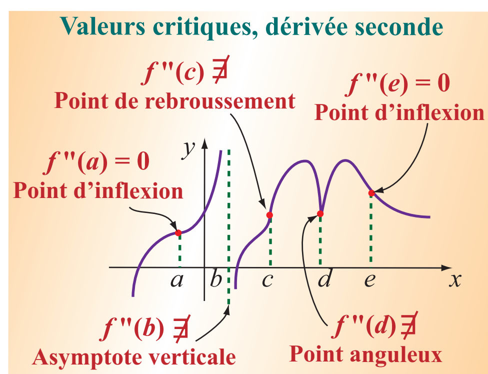
Valeurs critiques, dérivée première

Si $f'(a) = 0$, la tangente est horizontale à $x = a$. Le point $(a; f(a))$ est alors appelé *point critique*.
Si $f'(a)$ n'existe pas, la fonction a une asymptote verticale à $x = a$.



Valeurs critiques, dérivée seconde

Si $f''(a) = 0$, la fonction f peut avoir un maximum, un minimum ou un point d'inflexion à $x = a$. Le point $(a; f(a))$ est appelé *point critique*.
Si $f''(a)$ n'existe pas, la dérivée première a une asymptote verticale à $x = a$. La fonction peut avoir une asymptote verticale, un point anguleux ou un point de rebroussement.



VALEURS OPTIMALES

Valeurs maximales et valeurs minimales d'une fonction ou d'un modèle (voir aussi maximum et minimum relatif et absolu).

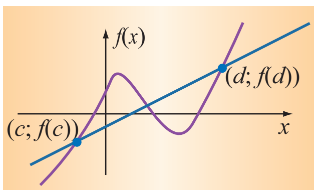
VARIATION

Tout changement de la valeur d'une variable est appelé une *variation*. Pour représenter une variation de la variable x, on écrit Δx, qui se lit delta x. Si la valeur initiale de cette variable est représentée par c et la valeur finale par d, la variation Δx est donnée par :

$$\Delta x = d - c.$$

Soit f, une fonction continue sur un intervalle fermé $[c; d]$. La variable dépendante y subit une variation Δy lorsque la variable indépendante x varie. Dans l'intervalle $[c; d]$, la variation de la variable dépendante est :

$$\Delta y = f(d) - f(c).$$



VITESSE INITIALE

La *vitesse initiale* est la vitesse d'un mobile au temps $t = 0$, c'est-à-dire à l'instant où débute l'étude du phénomène.