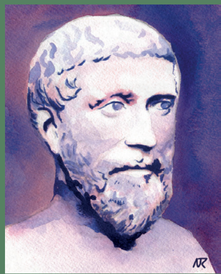
Illustration : Noémie Ross



Pythagore
vers –580 à –495

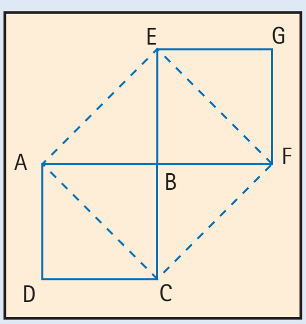
Le Psythagoricien Hippase de Metaponte, qui vécut vers ~460, a montré que la diagonale d'un carré et le côté de celui-ci n'avaient pas de commune mesure. En termes modernes, le rapport de la diagonale du carré à son côté n'est pas un nombre rationnel.

Pythagore
L'incommensurabilité

Dans leurs recherches pour déterminer le rapport de la diagonale du carré et de son côté, les Pythagoriciens ont connu une conclusion qui a sapé les fondements de leur conception de l'univers.

L'un des disciples, Hippase de Metaponte a démontré en utilisant un raisonnement par l'absurde qu'il est impossible d'exprimer le rapport de la diagonale et du côté du carré comme quotient de deux nombres entiers.

La découverte d'Hippase se fonde sur un résultat hérité des Égyptiens qui avaient démontré, à l'aide de la figure ci-contre, que l'aire du carré construit sur la diagonale d'un carré est le double de l'aire du premier carré.



En effet, l'aire du carré ABCD est égale à deux fois l'aire du triangle ABC et l'aire du carré AEFC est égale à quatre fois l'aire du triangle ABC. Hippase a tiré profit de ce résultat de la façon suivante :

En supposant que la diagonale et le côté sont commensurables, leurs longueurs s'expriment par des nombres entiers dans l'unité de la plus grande commune mesure des deux segments. Les entiers mesurant la diagonale et le côté sont donc les plus petits possibles, c'est-à-dire que ces nombres n'ont pas de facteur commun.

Puisque l'aire du carré AEFC est le double de l'aire du carré ABCD, l'aire du carré AEFC est donnée par un nombre pair. Cependant, le carré d'un nombre impair ne peut jamais donner un nombre pair. La longueur de la diagonale est donc donnée par un nombre pair.

Puisque le carré d'un nombre pair est divisible par 4, l'aire du carré AEFC est divisible par 4.

Cette aire étant le double de celle du carré ABCD, l'aire du carré ABCD est également donnée par un nombre pair. Par conséquent, la longueur du côté du carré ABCD est elle aussi donnée par un nombre pair. La diagonale et le côté du carré ont donc un facteur commun puisqu'ils sont tous deux pairs. Cela contredit le fait que les nombres n'ont pas de facteur commun.

Cette contradiction vient de l'hypothèse selon laquelle la diagonale et le côté du carré ont une commune mesure. Il faut donc rejeter cette hypothèse. La diagonale et le côté du carré sont donc incommensurables.

L'étude des rapports et proportions entreprise par les Pythagoriciens s'est révélée pleine de surprises. Ils ont démontré plusieurs propriétés des figures géométriques mais, ils ont également découvert qu'il est impossible d'exprimer le rapport de la diagonale et du côté du carré comme rapport de deux nombres entiers. Tant qu'ils n'avaient pas réussi à déterminer un tel rapport, ils pouvaient garder espoir. Ne pas réussir à exprimer le rapport de deux longueurs comme quotient de deux entiers n'est pas suffisant pour conclure que ce rapport est impossible. Pour tirer une telle conclusion, il faut démontrer que cela est effectivement impossible, ce qui est beaucoup plus exigeant. C'est ce que Hippase a fait pour le rapport de la diagonale du carré à son côté. Cette découverte a porté un dur coup aux , car elle détruisait le fondement de leur conception de l'univers. Il n'était plus possible d'accepter à la fois le théorème de Pythagore, la constitution en particules indivisibles de la matière et du temps et la commensurabilité qui en découlait. Le théorème de Pythagore avait été démontré déductivement, la conception d'un univers constitué de particules finies indivisibles et la commensurabilité devaient être rejetées.

La théorie des proportions qui ne pouvait plus se fonder sur la commensurabilité a été formulée autrement par Eudoxe de Cnide (408 à 355 avant notre ère) qui fut élève de Platon (vers ~427 à ~348) et du pythagoricien Archytas de Tarente (vers ~430). Les travaux d'Eudoxe ont été repris et complétés par Euclide avec qui la théorie des proportions se dégage complètement du postulat de la commensurabilité. Ce postulat a cependant permis de développer un impressionnant corpus de connaissances qui a été préservé en utilisant d'autres fondements.

Euclide présente également une autre démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale du carré et de son côté en développant une approche différente de celle d'Hippase.

Autres grandeurs incommensurables

La diagonale et le côté du carré de côté unitaire n'ont pas de commune mesure. Existe-t-il d'autres grandeurs qui n'ont pas de commune mesure avec l'unité ? Le Pythagoricien Théodore de Cyrène (~465 à ~398) s'est attaqué à ce problème. On lui attribue la construction de la spirale permettant de construire les racines carrées des nombres entiers consécutifs. En partant d'un triangle rectangle isocèle de côté unitaire, on reporte l'unité à angle droit avec l'hypoténuse et ainsi de suite. On obtient la spirale ci-contre.

Dans un dialogue intitulé Théétète et mettant en scène Socrate, Théétète d'Athènes et Théodore de Cyrène, Platon écrit en particulier :

Théodore que voici nous avait tracé quelques figures à propos des racines et nous avait montré que celles de 3 pieds et de 5 pieds ne sont point pour la longueur commensurables avec celle d'un pied, et, les prenant ainsi, l'une après l'autre, il était allé jusqu'à celle de 17 pieds et il s'était, je ne sais pourquoi, arrêté là.