MATRICES en GESTION

CHAPITRE 11

Utiliser les matrices dans la résolution de problèmes de gestion

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont :

- la représentation d'un problème de chaîne de Markov par un diagramme de transition et par une matrice de transition;
- la détermination du point invariant d'une chaîne de Markov à l'aide de la matrice augmentée d'un système d'équations linéaires;
- l'analyse, à l'aide de matrices, d'une chaîne de Markov avec états absorbants;
- l'utilisation du modèle de Leontief pour analyser un secteur d'une économie, ouverte ou fermée.

OBJECTIFS

11.1 Représenter un problème de chaîne de Markov par un diagramme de transition et par une matrice de transition.

11.2 Déterminer le point invariant d'une chaîne de Markov.

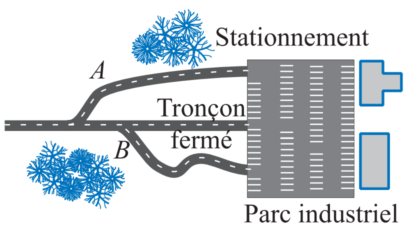
11.3 Analyser l'évolution d'une chaîne de Markov avec états absorbants.

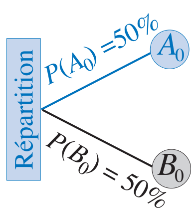
11.4 Analyser un secteur d'économie à l'aide du modèle de Leontief.

11.1 Chaînes de Markov

Les systèmes d'équations linéaires servent à modéliser de nombreux phénomènes. Les exercices du chapitre précédent contiennent quelques exemples. Dans ce chapitre, nous présentons maintenant quelques exemples d'utilisation des systèmes d'équations linéaires dans l'étude des chaînes de Markov et de l'application du modèle de Leontief.

Markov01

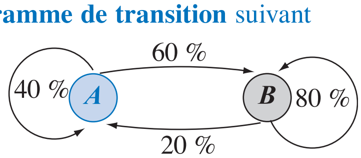


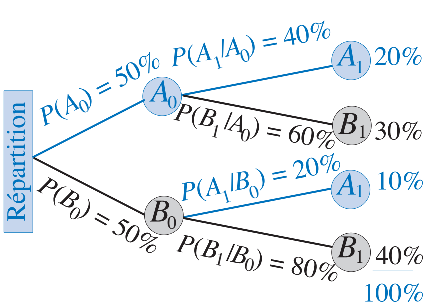


$w_0 = (0,5; 0,5)$

		Détour emprunté le lendemain	
		A_1	B_1
Détour actuel	A_0	40%	60%
	B_0	20%	80%

La matrice $P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ peut également être associée au **diagramme de transition** suivant





Mise en situation

Nous allons, à l'aide de matrices, étudier le concept **chaîne de Markov**, qui a de multiples applications dans divers domaines, dont la physique, les sciences humaines, la génétique et même la synthèse de protéines. Pour simplifier, nous ne présentons que des cas comportant au plus quatre variables.

État initial

Un municipalité entreprend des travaux sur le principal chemin d'accès à son centre industriel. Deux panneaux détours indiquent des trajets à emprunter, soit, A et B, et on prévoit que, la première journée, 50 % des automobilistes choisiront le détour A, et les autres, le détour B. La première journée, la répartition entre les deux détours est représentée par le **vecteur probabilité** (ou vecteur d'état)

$$w_0 = (0,5 \quad 0,5).$$

Ce vecteur décrit l'état initial du problème. Cependant, on sait que si la circulation est lente, une partie des automobilistes changera de trajet. Ainsi, on estime que 60% des conducteurs qui ont emprunté le détour A sont susceptibles d'opter pour le détour B le lendemain. Par ailleurs, la probabilité qu'un conducteur ayant utilisé le détour B emprunte le détour A le lendemain est de 20 %. Ces données sont contenues dans le tableau de probabilités qu'on peut représenter par la **matrice de transition**

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Après un changement d'état

Si les données restent les mêmes, il est possible de prévoir, à l'aide du produit matriciel, la répartition de la circulation au lendemain du début des travaux.

La probabilité qu'un conducteur choisisse le détour A le lendemain est :

$$0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,2 = 0,2 + 0,1 = 0,3 = 30\ \%,$$

et la probabilité qu'un conducteur choisisse le détour B le lendemain est

$$0,5 \times 0,6 + 0,5 \times 0,8 = 0,3 + 0,4 = 0,7 = 70\ \%.$$

Il est à noter que le nouveau vecteur probabilité, $w_1 = (0,3 \quad 0,7)$, est le résultat de la multiplication des matrices w_0 et P,

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}_{1\times 2} \bullet \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}_{1\times 2}.$$

Les prédictions quant à la répartition de la circulation deux jours après le début des travaux sont présentées ci-contre sous forme de diagramme. On multiplie le vecteur probabilité et la matrice de transition à nouveau :

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}_{1\times 2} \bullet \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0{,}26 & 0{,}74 \end{pmatrix}_{1\times 2}.$$

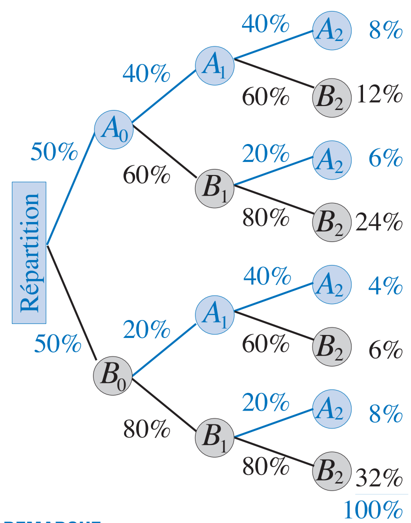
Avant de poursuivre, voyons quelques définitions.

Vecteur probabilité

On appelle **vecteur probabilité** (ou **vecteur d'état**) toute matrice $1\times n$ constituée d'éléments non négatifs dont la somme est égale à 1.

Matrice de transition

On appelle **matrice de transition** toute matrice carrée constituée d'éléments non négatifs et tels que la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.



REMARQUE

Dans la mise en situation, la matrice $(0{,}5 \quad 0{,}5)$ est un vecteur probabilité. La matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

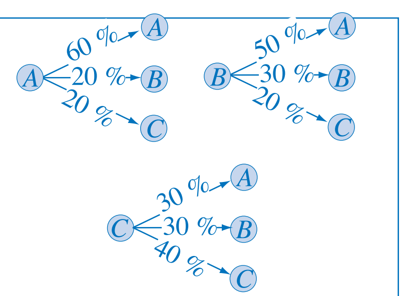
EXEMPLE 11.1.1

Une municipalité inaugure une troisième piste cyclable et piétonnière sur son territoire. L'utilisation actuelle des pistes est décrite par le vecteur probabilité $w_0 = (0{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0)$. Selon l'estimation du service des loisirs, la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

a) En effectuant une opération matricielle, déterminer le vecteur probabilité après un changement d'état.

b) En effectuant une opération matricielle, déterminer le vecteur probabilité après deux changements d'état.



REMARQUE

Dans un processus de Markov, la matrice de transition représente les probabilités de changement d'état. Le produit

$$w_1 = w_0 \bullet P$$

donne le vecteur probabilité après un changement d'état et le produit

$$w_2 = w_1 \bullet P,$$

le vecteur probabilité après deux changements d'état. On peut déterminer directement le vecteur probabilité après deux changements en multipliant le vecteur initial par la matrice P^2, en vertu de l'associativité de la multiplication de matrices,

$$w_2 = w_1 \bullet P = w_0 \bullet P \bullet P = w_0 \bullet P^2.$$

■ ***Solution***

a) L'utilisation des pistes après un changement d'état est

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 \bullet P \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}56 & 0{,}24 & 0{,}20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le vecteur probabilité de l'utilisation des pistes, après un changement d'état, est donc $(0{,}56 \quad 0{,}24 \quad 0{,}2)$. La piste A devrait être utilisée par 56 % des adeptes, la piste B par 24 % et la piste C par 20 %.

b) L'utilisation des pistes après deux changements d'état est

$$
\begin{aligned}
w_2 &= w_1 \bullet P \\
&= \begin{pmatrix} 0{,}56 & 0{,}24 & 0{,}20 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0{,}516 & 0{,}244 & 0{,}240 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Le vecteur probabilité donnant la répartition des adeptes sur les pistes après deux changements d'état est (0,516 0,244 0,24). Donc, 51,6% des utilisateurs choisissent la piste *A*, 24,4 % la piste *B* et 24% la piste *C*.

Répartition après n changements	
n	w_n
0	(0,5 0,5)
1	(0,3 0,7)
2	(0,26 0,74)
3	(0,252 0,748)
4	(0,250 4 0,749 6)
⋮	⋮

Markov02

REMARQUE

Il est à noter que les deux équations

$$-0{,}6t_1 + 0{,}2t_2 = 0$$
$$0{,}6t_1 - 0{,}2t_2 = 0$$

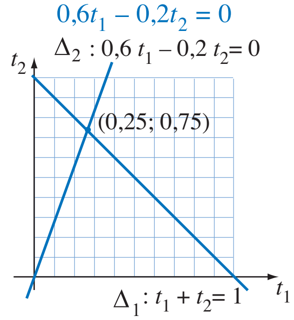
représentent une même contrainte : il est inutile de la répéter. Graphiquement, ce sont des droites confondues.

L'équation caractéristique du vecteur probabilité, soit

$$t_1 + t_2 = 1,$$

représente une contrainte dont il faut tenir compte. Le système est donc formé des deux équations :

$$t_1 + t_2 = 1$$
$$0{,}6t_1 - 0{,}2t_2 = 0$$



Mise en situation (suite)

Le tableau de la répartition de la circulation après n changements d'état indique que la probabilité qu'un automobiliste emprunte le trajet *A* diminue alors que la probabilité qu'il emprunte le détour *B* augmente. On peut supposer à long terme, que 25 % des gens choisiront le détour *A* et 75 % le détour *B*. Il serait intéressant de savoir si la répartition de la circulation va se stabiliser avec le temps. Autrement dit, on se demande s'il existe un vecteur probabilité $w = (t_1 \quad t_2)$ tel que

$$w \bullet P = w$$

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit, on obtient les équations

$$\begin{cases} 0{,}4t_1 + 0{,}2t_2 = t_1 \\ 0{,}6t_1 + 0{,}8t_2 = t_2 \end{cases} ; \text{ donc } \begin{cases} -0{,}6t_1 + 0{,}2t_2 = 0 \\ 0{,}6t_1 - 0{,}2t_2 = 0 \end{cases}$$

On constate que les deux équations sont équivalentes, de sorte qu'on peut en éliminer une. Cependant, le vecteur $(t_1 \quad t_2)$ étant un vecteur probabilité, on doit avoir

$$t_1 + t_2 = 1$$

En remplaçant la première équation par cette contrainte, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 \\ 0{,}6t_1 - 0{,}2t_2 = 0 \end{cases}$$

et, en résolvant, on a

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}6 & -0{,}2 & 0 \end{array}\right) &\approx \begin{array}{l} L_1 \\ 10L_2 - 6L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -6 \end{array}\right) \\
&\approx \begin{array}{l} 8L_1 + L_2 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc:c} 8 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -6 \end{array}\right) \\
&\approx \begin{array}{l} L_1/8 \\ L_2/(-8) \end{array} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 1 & 0{,}75 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Le vecteur recherché est (0,25 0,75); en effet,

$$\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que, si la circulation se stabilise, 25 % des gens vont opter pour le détour A et 75% pour le détour B.

Point invariant d'une chaîne de Markov

Un vecteur probabilité w est appelé **point invariant** d'une chaîne de Markov si $w \bullet P = w$ où P est la matrice de transition de la chaîne.

PROCÉDURE

Recherche du point invariant d'une chaîne de Markov

1. Construire la matrice de transition.
2. Écrire les équations du point invariant à l'aide du produit matriciel et substituer à la première équation la ligne correspondant à l'équation $t_1 + t_2 + ...+ t_n = 1$.
3. Résoudre le système d'équations.
4. Interpréter le résultat selon le contexte.

REMARQUE

En pratique, à l'étape 2, on peut remplacer n'importe laquelle des équations par l'équation

$$t_1 + t_2 + ...+ t_n = 1.$$

Cela ne modifie pas la solution, mais il est plus simple d'échelonner la matrice quand l'élément a_{11} est égal à 1.

EXEMPLE 11.1.2

Déterminer le point invariant de la répartition des usagers des pistes aménagées par la municipalité décrite dans l'exemple 11.1.1.Dans ce cas, la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

■ ***Solution***

On cherche le vecteur $w = (t_1 \quad t_2 \quad t_3)$ tel que $w \bullet P = w$. On a le système d'équations

$$\begin{cases} 0{,}6t_1 + 0{,}5t_2 + 0{,}3t_3 = t_1 \\ 0{,}2t_1 + 0{,}3t_2 + 0{,}3t_3 = t_2 \\ 0{,}2t_1 + 0{,}2t_2 + 0{,}4t_3 = t_3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -0{,}4t_1 + 0{,}5t_2 + 0{,}3t_3 = 0 \\ 0{,}2t_1 - 0{,}7t_2 + 0{,}3t_3 = 0 \\ 0{,}2t_1 + 0{,}2t_2 - 0{,}6t_3 = 0 \end{cases}$$

On constate qu'on peut éliminer une équation puisque la somme des trois équations est $0t_1 + 0t_2 + 0t_3 = 0$. Aux deux équations retenues, on ajoute

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1,$$

puisque les t_i sont les composantes d'un vecteur d'état. Il faut donc résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 1 \\ 0{,}2t_1 - 0{,}7t_2 + 0{,}3t_3 = 0 \\ 0{,}2t_1 + 0{,}2t_2 - 0{,}6t_3 = 0 \end{cases}$$

On a

REMARQUE

Les équations

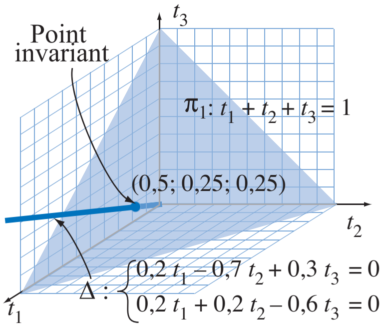
$$\begin{aligned} -0{,}4t_1 + 0{,}5t_2 + 0{,}3t_3 &= 0 \\ 0{,}2t_1 - 0{,}7t_2 + 0{,}3t_3 &= 0 \\ 0{,}2t_1 + 0{,}2t_2 - 0{,}6t_3 &= 0 \end{aligned}$$

ne constituent pas trois contraintes distinctes. Puisque leur somme est nulle, les trois équations sont représentées par trois plans passant par une même droite et deux des trois équations suffisent pour décrire celle-ci. L'équation caractéristique du vecteur probabilité, soit

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1,$$

constitue une contrainte dont il faut tenir compte. Le système est donc formé des trois équations :

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 &= 1 \\ 0{,}2t_1 - 0{,}7t_2 + 0{,}3t_3 &= 0 \\ 0{,}2t_1 + 0{,}2t_2 - 0{,}6t_3 &= 0. \end{aligned}$$



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}2 & -0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}6 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 10L_2 - 2L_1 \\ 10L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} 9L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & 10 & 7 \\ 0 & -9 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 4L_1 + 5L_3 \\ 8L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 36 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & -72 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/36 \\ L_2/(-72) \\ L_3/(-8) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right)$$

Le vecteur d'état décrivant l'état stable est donc $(0{,}50 \quad 0{,}25 \quad 0{,}25)$. À long terme, 50 % des usagers opteront pour la piste A, 25 % pour la piste B et 25 % pour la piste C.

Recherche du point invariant

Il est possible de simplifier la construction de la matrice augmentée servant à déterminer l'état stable en analysant la démarche sous forme matricielle. On cherche un vecteur w tel que

$$\begin{aligned} w \bullet P &= w, \text{ définition du point invariant;} \\ w \bullet P &= w \bullet I, \text{ où } I \text{ est la matrice identité;} \\ w \bullet P - w \bullet I &= 0_{1\times n}, \text{ par les propriétés des opérations matricielles;} \\ w \bullet (P - I) &= 0_{1\times n}, \text{ par les propriétés des opérations matricielles;} \\ (P - I)^{\mathrm{t}} \bullet w^{\mathrm{t}} &= 0^{\mathrm{t}}_{n\times 1}, \text{ par les propriétés de la transposition des matrices.} \end{aligned}$$

REMARQUE
Il y a, chaque jour, des individus qui changent de trajet mais les changements sont tels que globalement, le trafic reste le même.

Dans le cas de l'exemple 11.1.2, on a l'équation

$$(P-I)^{\mathrm{t}} \bullet w^t = \begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & -0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En substituant à la première ligne de la matrice associée à ce système d'équations la ligne correspondant à l'équation $t_1 + t_2 + t_3 = 1$, on obtient la matrice qu'il faut échelonner pour obtenir l'état stable du système, soit

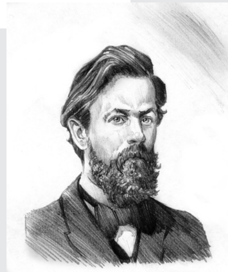
$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}2 & -0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}6 & 0 \end{array}\right).$$

On peut donc écrire directement la matrice à échelonner pour déterminer l'état stable de la chaîne de Markov.

Un peu d'histoire

ANDREÏ ANDREÏEVITCH MARKOV

1856-1922



Andreï Markov, un mathématicien russe, étudia les mathématiques à l'Université de Saint-Pétersbourg où il fut l'élève de Pafnuty Tchebychev. Après avoir reçu son diplôme, en 1878, il enseigna lui-même à Saint-Pétersbourg à partir de 1886. Il s'intéressa à la théorie des nombres, aux fractions continues et aux équations différentielles. Sa renommée est attribuable surtout à ses travaux en probabilités et, en particulier, à la création des chaînes qui portent son nom. Celles-ci ont des applications notamment en administration, en sciences sociales, en mécanique quantique, en génétique et en physique atomique.

On emploie les chaînes de Markov pour étudier des phénomènes où interviennent des variables aléatoires dont l'état futur dépend de l'état présent, mais est indépendant de la façon dont l'état présent découle des états précédents. Les travaux de Markov marquèrent le début de l'étude des processus stochastiques et ils furent poursuivis par Norbert Wiener et Andreï Kolmogorov.

EXEMPLE 11.1.3

Trois marques de croustilles au ketchup A, B et C se partagent le marché. Trouver la part de marché que chaque produit pourra détenir à long terme si la matrice de transition est :

Markov03

$$P = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,35 & 0,2 \\ 0,15 & 0,45 & 0,4 \\ 0,25 & 0,2 & 0,55 \end{pmatrix}.$$

Solution

On détermine la matrice $P - I$,

$$P - I = \begin{pmatrix} -0,55 & 0,35 & 0,2 \\ 0,15 & -0,55 & 0,4 \\ 0,25 & 0,2 & -0,45 \end{pmatrix}.$$

On transpose cette dernière,

$$(P - I)^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} -0,55 & 0,15 & 0,25 \\ 0,35 & -0,55 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & -0,45 \end{pmatrix}.$$

On construit la matrice augmentée et on remplace l'équation de la première ligne par la contrainte $t_1 + t_2 + t_3 = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,35 & -0,55 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & -0,45 & 0 \end{array}\right).$$

On trouve alors :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,35 & -0,55 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & -0,45 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 0,35L_1 \\ L_3 - 0,2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0,9 & -0,15 & -0,35 \\ 0 & 0,2 & -0,65 & -0,2 \end{array}\right)$$

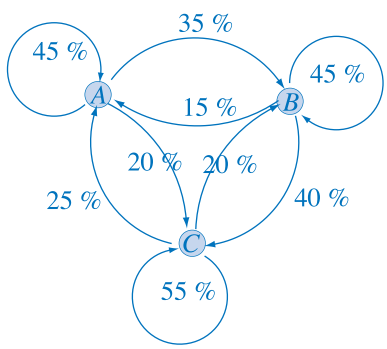
$$\approx \begin{array}{l} -0,9L_1 - L_2 \\ L_2 \\ -0,9L_3 - 0,2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -0,9 & 0 & -0,75 & -0,55 \\ 0 & -0,9 & -0,15 & -0,35 \\ 0 & 0 & 0,615 & 0,25 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} 0{,}615L_1+0{,}75L_3 \\ \approx 0{,}615L_2+0{,}15L_3 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}5535 & 0 & 0 & -0{,}1508 \\ 0 & -0{,}5535 & 0 & -0{,}1778 \\ 0 & 0 & \boxed{0{,}615} & 0{,}2500 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1/(-0{,}5535) \\ \approx L_2/(-0{,}5535) \\ L_3/(0{,}615) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}2724 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}3211 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}4065 \end{array}\right)$$

Le vecteur probabilité donnant la répartition du marché à long terme est donc $(0{,}2724 \quad 0{,}3211 \quad 0{,}4065)$. Le produit A devrait prendre 27,24 % du marché, le produit B 32,11 % et le produit C 40,65 %.

Diagramme de transition



Le diagramme en arbre n'est pas la seule façon de représenter graphiquement les probabilités de transition. On peut utiliser un **diagramme de transition** en représentant chaque état par une lettre. Des flèches issues de chaque état indiquent vers quels états la transition peut conduire. La probabilité de la transition d'un état vers un autre est donnée près de la flèche indiquant cette transition. Le diagramme de transition de l'exemple précédent est donné ci-contre. En représentant ce diagramme de transition par une matrice, on obtient bien la matrice de l'exemple 11.1.3. Dans un diagramme de transition, la somme des probabilités des flèches partant d'un état doit toujours être égale à 1. Lorsqu'il n'y a pas de flèche d'un état à un autre, cela signifie que la probabilité de cette transition est nulle.

EXEMPLE 11.1.4

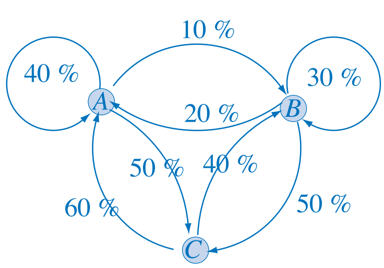
On a effectué une étude de marché portant sur trois produits concurrents, notés A, B et C. Le diagramme de transition ci-contre représente les probabilités de transition des clients.

Markov04

a) Écrire la matrice de transition.

b) Déterminer le point invariant du système.

■ ***Solution***



a) La matrice de transition de cette situation est obtenue en assignant une ligne et une colonne à chaque état. Les éléments de la matrice sont les probabilités indiquées dans le diagramme.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) La matrice $(P-I)$ est :

$$P-I=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & -0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & -1 \end{pmatrix}$$

Sa transposée est $(P-I)^t=\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & -0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -1 \end{pmatrix}$

En substituant la condition $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ à la première ligne, on obtient la matrice $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,1 & -0,7 & 0,4 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & -1 & 0 \end{array}\right)$ En résolvant, on a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,1 & -0,7 & 0,4 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 10L_2 - L_1 \\ 2L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} 8L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 11 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 3L_1 + 11L_3 \\ L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -8 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

D'où l'on tire que l'état stable est décrit par le vecteur probabilité $(5/12 \quad 1/4 \quad 1/3) = (0,4167 \quad 0,25 \quad 0,3333)$. Le produit A devrait occuper 41,67 % du marché, le produit B, 25,00 % et le produit C, 33,33 %.

PROCÉDURE

Recherche du point invariant à l'aide d'une matrice

1. Construire la matrice de transition P.
2. Construire la matrice $P - I$ et sa transposée $(P - I)^t$.
3. Construire la matrice M en remplaçant la première ligne de la matrice $(P - I)^t$ par celle de la condition $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$.
4. Échelonner la matrice obtenue et interpréter les résultats selon le contexte.

EXEMPLE 11.1.5

On a effectué une étude de marché portant sur trois produits concurrents, notés A, B et C. Les résultats de cette étude sont donnés dans le diagramme de transition ci-contre.

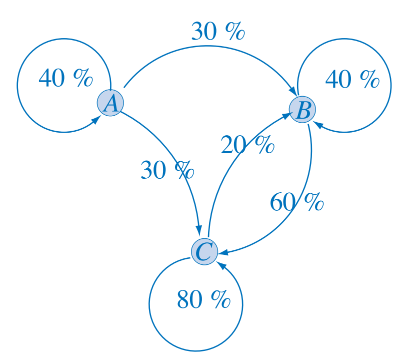
a) Écrire la matrice de transition.

b) Déterminer le point invariant du système.

Solution

a) La matrice de transition de cette situation est :

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}$$



b) $P - I = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,3 & 0,3 \\ 0 & -0,6 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & -0,2 \end{pmatrix}$ et $(P - I)^t = \begin{pmatrix} -0,6 & 0 & 0 \\ 0,3 & -0,6 & 0,2 \\ 0,3 & 0,6 & -0,2 \end{pmatrix}$

En substituant la ligne représentant la condition $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$ à la première ligne, on obtient la matrice M.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,3 & -0,6 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,6 & -0,2 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 10L_2-3L_1 \\ 10L_3-3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} 9L_1+L_2 \\ L_2 \\ 3L_3+L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & -9 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -16 & -12 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} 2L_1+L_3 \\ 16L_2-L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -144 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & -16 & -12 \end{array}\right)$$

D'où l'on tire que l'état stable est décrit par le vecteur probabilité (0 1/4 3/4) = (0 0,25 0,75). Le produit *A* sera éliminé du marché alors que le produit *B* prendra 25 % et le produit *C* 75 %.

Chaîne de markov absorbante

État absorbant et chaîne absorbante

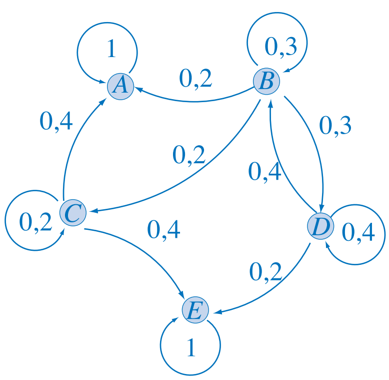
Un état **absorbant** d'une chaîne de Markov est un état qu'il est impossible de quitter. Une fois dans cet état, la probabilité d'y demeurer est 1.

Une chaîne de Markov est dite **absorbante** :

- s'il existe au moins un état absorbant;
- s'il est possible de passer de tout état à un état absorbant (pas nécessairement en un seul saut).

Markov05

Lorsqu'une chaîne de Markov présente plusieurs états absorbants, on construit la matrice de transition en regroupant les états absorbants dans le coin supérieur gauche. Ainsi, en regroupant les deux états absorbants du diagramme ci-contre dans le coin supérieur gauche, on obtient la matrice



$$\begin{array}{c} \\ A \\ E \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & E & B & C & D \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0,2 & 0,0 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,0 & 0,2 & 0,0 \\ 0,0 & 0,2 & 0,4 & 0,0 & 0,4 \end{array}\right) \end{array} \text{ qui est de la forme } \left(\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & O_{r\times s} \\ \hline R_{s\times r} & Q_{s\times s} \end{array}\right).$$

où $I_{r\times r}$ est la matrice identité d'ordre r, $O_{r\times s}$ la matrice nulle de dimension $r\times s$, $R_{s\times r}$ une matrice qui donne les probabilités de se retrouver dans un état absorbant à la prochaine transition et $Q_{s\times s}$ une matrice qui représente les probabilités d'être dans un état non absorbant après la prochaine transition. C'est la **forme canonique** de la matrice de transition d'une chaîne de Markov avec états absorbants. Chacun des blocs de la matrice sous forme canonique est une **sous-matrice** de P. En calculant P^2, on trouve :

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0,2 & 0,0 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,0 & 0,2 & 0,0 \\ 0,0 & 0,2 & 0,4 & 0,0 & 0,4 \end{array}\right) \bullet \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0,2 & 0,0 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,0 & 0,2 & 0,0 \\ 0,0 & 0,2 & 0,4 & 0,0 & 0,4 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0,34 & 0,14 & 0,21 & 0,1 & 0,21 \\ 0,48 & 0,48 & 0,0 & 0,04 & 0,0 \\ 0,08 & 0,28 & 0,28 & 0,08 & 0,28 \end{array}\right).$$

On constate que, lorsqu'on calcule P^2, les blocs de la matrice identité et de la matrice nulle restent inchangés. C'est la manifestation de l'effet absorbant. La matrice carrée dans le coin inférieur droit est Q^2. En effet :

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,0 & 0,2 & 0,0 \\ 0,4 & 0,0 & 0,4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,0 & 0,2 & 0,0 \\ 0,4 & 0,0 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,21 & 0,1 & 0,21 \\ 0,0 & 0,04 & 0,0 \\ 0,28 & 0,08 & 0,28 \end{pmatrix}$$

La matrice Q^2 donne les probabilités que le système soit dans un état non absorbant j après deux changements d'état, s'il était initialement dans un état non absorbant i. Ainsi, la matrice Q^2 :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0,21 & 0,10 & 0,21 \\ 0,00 & 0,04 & 0,00 \\ 0,28 & 0,08 & 0,28 \end{pmatrix} \end{array}$$

indique que si l'état initial est B, la probabilité qu'après deux changements le système soit dans l'état B est de 21 %, la probabilité qu'il soit dans l'état C est de 10 % et elle est de 21 % qu'il soit dans l'état D.

En additionnant les éléments de chacune des lignes de la matrice Q^2, on obtient les probabilités, selon l'état initial, qu'après deux changements d'état le système soit encore dans un état non absorbant. On obtient les sommes des éléments de chacune des lignes par le produit

$$Q^2 \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,21 & 0,10 & 0,21 \\ 0,00 & 0,04 & 0,00 \\ 0,28 & 0,08 & 0,28 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,52 \\ 0,04 \\ 0,64 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si l'état initial est B, la probabilité que le système soit dans un état non absorbant après deux changements d'état est de 52 %, elle est de 4 % si l'état initial est C et de 64 % si l'état initial est D.

Comparons ces probabilités avec celles que le système soit dans un état non absorbant après une transition, soit :

$$Q \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,0 & 0,2 & 0,0 \\ 0,4 & 0,0 & 0,4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}.$$

On constate que les probabilités que le système soit dans un état non absorbant après une transition diminuent. En effectuant le même calcul sur la matrice Q^3, on obtient

$$Q^3 \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,147 & 0,062 & 0,147 \\ 0,000 & 0,008 & 0,000 \\ 0,196 & 0,072 & 0,196 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,356 \\ 0,008 \\ 0,464 \end{pmatrix}.$$

Les probabilités que le système soit dans un des états non absorbants diminuent à chaque changement d'état. Lorsque n tend vers l'infini, la matrice Q^n tend vers la matrice nulle de dimension $s \times s$. À long terme, le processus sera donc absorbé. Cela illustre le théorème suivant que nous accepterons sans démonstration.

THÉORÈME

État stable d'une chaîne absorbante

Dans toute chaîne de Markov absorbante, la probabilité que le processus soit absorbé est égale à 1.

Considérons maintenant la sous-matrice du coin inférieur gauche. Dans la matrice P, cette sous-matrice donne les probabilités que le système soit dans un état absorbant après un changement d'état. Dans la matrice P^2, elle représente les probabilités que le système soit dans un état absorbant après deux changements d'état. On peut également obtenir ces probabilités par des opérations sur les sous-matrices de la façon suivante :

$$\overbrace{R+Q\bullet R=\underbrace{\begin{pmatrix} 0,2 & 0,0 \\ 0,4 & 0,4 \\ 0,0 & 0,2 \end{pmatrix}}_{\text{Première transition}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0,0 & 0,2 & 0,0 \\ 0,4 & 0,0 & 0,4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0,2 & 0,0 \\ 0,4 & 0,4 \\ 0,0 & 0,2 \end{pmatrix}}_{\text{Deuxième transition}}}^{\text{Absorption}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,34 & 0,14 \\ 0,48 & 0,48 \\ 0,08 & 0,28 \end{pmatrix}}_{\text{Absorption après deux transitions}}$$

Interprétons l'information donnée par la matrice $R + Q \bullet R$, soit :

$$\begin{array}{c} \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,34 & 0,14 \\ 0,48 & 0,48 \\ 0,08 & 0,28 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si le système est initialement dans l'état B, la probabilité qu'il se stabilise dans l'état A après deux changements d'état est de 34 % et la probabilité qu'il se stabilise dans l'état E après deux changements d'état est de 14 %. On interprète les éléments des autres lignes de la même façon.

La somme des éléments de chacune des lignes donne la probabilité d'absorption selon l'état initial.

$$\begin{array}{c} B \\ C \\ D \end{array} \begin{pmatrix} 0,34 & 0,14 \\ 0,48 & 0,48 \\ 0,08 & 0,28 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,48 \\ 0,96 \\ 0,36 \end{pmatrix} \begin{array}{c} B \\ C \\ D \end{array}$$

La probabilité que le système soit dans un état absorbant après deux transitions est de 48 % si l'état initial est B, de 96 % si l'état initial est C et de 36 % si l'état initial est D.

EXEMPLE 11.1.6

Dans la mise en situation précédente, déterminer, selon l'état initial, les probabilités que le système soit dans un état absorbant après trois changements d'état.

REMARQUE

Lorsqu'on calcule P_n, on obtient une matrice de la forme :

$$P = \left(\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & O_{r\times s} \\ \hline R_{s\times r} & Q_{s\times s} \end{array}\right)$$

où Q^n est la matrice qui donne les probabilités d'avoir des états non absorbants après n transitions, pour chacun des états de départ non absorbants.

Dans la mise en situation ci-contre, on constate en observant les puissances de la matrice Q que la plus grande somme de probabilités de transition vers un état non absorbant de la matrice Q est 0,8 (somme d'une ligne). Dans la matrice Q^2, toutes les sommes de probabilités de transition vers un état non absorbant sont plus petites ou égales à $0,8^2 = 0,64$. Dans la matrice Q^3, toutes les sommes de probabilités sont plus petites ou égales à $0,8^3$. Lorsque n tend vers l'infini, les éléments de Q^n tendent vers 0, ce qui signifie que la probabilité que le système soit dans un état non absorbant après n changements tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La probabilité que le système soit absorbé est donc égale à 1.

Cette remarque donne une idée de la façon de démontrer que la probabilité d'absorption d'un système avec états absorbants est 1. Il s'agit de considérer la plus grande somme de probabilités de transition vers les états non absorbants de la matrice Q, probabilité que l'on peut noter p. Alors, toutes les sommes des lignes de Q_n sont plus petites ou égales à p^n et, puisque $p < 1$, la limite lorsque n tend vers l'infini est 0. Donc, la probabilité que le système soit dans un état non absorbant devient nulle lorsque n tend vers l'infini et la probabilité qu'il soit dans un état absorbant tend vers 1.

■ ***Solution***

Il faut additionner les probabilités que le système soit absorbé après une transition, après deux transitions et après trois transitions. Cela donne :

$$R+Q\bullet R+Q^2\bullet R=\begin{pmatrix}0{,}422 & 0{,}222\\ 0{,}496 & 0{,}496\\ 0{,}168 & 0{,}368\end{pmatrix}.$$

En effectuant la somme des lignes, on obtient :

$$\begin{pmatrix}0{,}422 & 0{,}222\\ 0{,}496 & 0{,}496\\ 0{,}168 & 0{,}368\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}644\\ 0{,}992\\ 0{,}536\end{pmatrix}.$$

La probabilité que le système soit dans un état absorbant après trois transitions est de 64,4 % si l'état initial est B, de 99,2 % si l'état initial est C et de 53,6 % si l'état initial est D.

Un peu *d'histoire*

WILHELM JORDAN

1842-1899

Wilhelm Jordan était un géodésien allemand qui étudia les reliefs de l'Allemagne et de l'Afrique, et fonda le Journal de géodésie d'Allemagne.

Jordan est né à Ellwangen, un petit village dans le sud de l'Allemagne. Il étudia à l'Institut Polytechnique de Stuttgart. Il travailla d'abord pendant deux ans en tant qu'assistant ingénieur sur un projet de construction de chemin de fer pour ensuite y travailler en tant qu'assistant géodésiste.

En 1868, à l'âge de 26 ans, il devint professeur à Karlsruhe. En 1874 Jordan prit part à l'expédition de Friedrich Gerhard Rohlfs en Libye. De 1881 jusqu'à sa mort, il fut professeur de géodésie et de géométrie pratique à l'Université technique de Hanovre. Il fut un écrivain prolifique et son ouvrage le plus célèbre est intitulé *Handbuch der Vermessungskunde* (Manuel de géodésie).

Il est connu en mathématiques pour avoir laissé son nom à la technique de résolution d'équations linéaires appelée Élimination de Gauss-Jordan. C'est dans la troisième édition de son « *Manuel de géodésie* », parue en 1888, qu'il présente cette méthode

Il ne faut pas confondre Wilhelm Jordan avec le mathématicien français Camille Jordan..

CAMILLE JORDAN

1838-1922

Camille Jordan était un mathématicien français. Né à Lyon, il étudia à l'École polytechnique (Promotion 1855) et fut ingénieur au corps des mines. Il enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville (Joseph, 1809-1882) au Collège de France. Il est connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse.

Aujourd'hui on associe son nom à un certain nombre de résultats fondamentaux :

le théorème de Jordan en topologie plane et la courbe de Jordan à laquelle ce théorème se réfère ;

la réduction de Jordan qui est la traduction matricielle de la réduction des endomorphismes. Cette réduction est employée, en particulier, en analyse pour la résolution d'équations différentielles ou pour déterminer le terme général de suites récurrentes.

Camille Jordan a contribué à faire accepter la théorie de Galois et a étudié les groupes de Mathieu, premiers exemples de groupes sporadiques. En 1919, il devint membre étranger de la Royal Society.

11.2 Exercices

1. Indiquer lesquelles des matrices suivantes sont des vecteurs probabilités (ou d'état) et dire pourquoi.
   a) $(1 \quad 0 \quad 0)$ c) $(0{,}6 \quad -0{,}2 \quad 0{,}6)$
   b) $(0{,}2 \quad 0{,}8 \quad 0{,}4)$ d) $(0{,}4 \quad 0 \quad 0{,}6)$

2. Indiquer lesquelles des matrices suivantes sont des matrices de transition et dire pourquoi.
   a) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

3. Il ressort d'une étude réalisée par une municipalité que, sur une population de 50 000 personnes, 40 000 vivent au centre-ville et 10 000 en périphérie. De plus, chaque année, 10% des premiers déménagent en périphérie alors que 5% des seconds déménagent au centre-ville.

Résidence actuelle		Prochaine résidence	
		Centre-ville	Banlieue
	Centre-ville	0,90	0,10
	Banlieue	0,05	0,95

   a) Quelle sera la répartition de la population après un an ?
   b) Quelle sera la répartition de la population après deux ans ?
   c) Pour planifier efficacement la construction d'infrastructures en banlieue, la municipalité a besoin de connaître la répartition de sa population à long terme. Déterminer cette répartition.
   d) Si la population reste la même jusqu'à ce que le point invariant soit atteint, quel sera alors le nombre total de personnes vivant au centre-ville et en périphérie ?
   Même question si la population s'accroît de 12% dans l'intervalle ?

4. Soit la matrice de transition

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

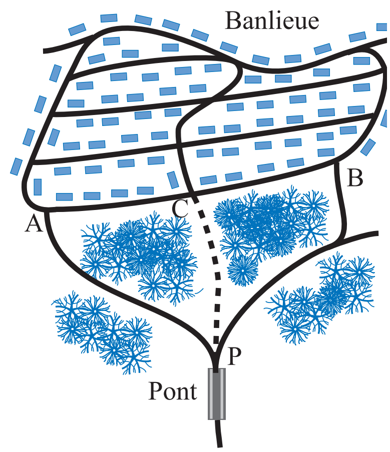
   Vérifier si les matrices A^2 et A^3 sont également des matrices de transition.

5. Soit la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

   Vérifier si les matrices P^2 et P^3 sont également des matrices de transition.

6. Les résidents d'une banlieue doivent emprunter un pont pour se rendre au travail. Le service d'urbanisme de la municipalité envisage la construction du tronçon de route CP (en pointillé sur le croquis) pour faciliter l'accès au pont.



   On s'attend à ce que 70% des automobilistes utilisent le nouveau tronçon à son ouverture et que les autres se partagent également entre les deux tronçons préexistants. Cependant, on estime que 20% des usagers changeront d'itinéraire à l'intérieur d'un mois s'ils jugent la circulation trop lente. La matrice de transition suivante repose sur cette hypothèse.

Trajet actuel		Trajet futur		
		AP	BP	CP
	AP	0,8	0,1	0,1
	BP	0,1	0,8	0,1
	CP	0,1	0,1	0,8

   a) Si 70% des automobilistes empruntent le trajet CP durant le mois suivant l'ouverture et que 15% choisissent chacun des deux autres trajets, quelle est la répartition un mois après l'ouverture ?

b) Quelle est la répartition deux mois après l'ouverture ?

c) Déterminer l'état stable de la chaîne de Markov.

d) Depuis l'ouverture du nouveau tronçon, on a observé une plus grande stabilité dans le comportement des utilisateurs du trajet CP que chez ceux qui empruntent les autres trajets, ce qui a permis de dresser le tableau de transition suivant. Quel sera l'état stable à long terme?

		Trajet futur		
		AP	BP	CP
Trajet actuel	AP	0,7	0,15	0,15
	BP	0,15	0,7	0,15
	CP	0,05	0,05	0,9

7. Une municipalité est constituée des trois arrondissements : A, B et C, qui regroupent respectivement 20 %, 30 % et 50 % de la population. Un sondage effectué auprès des citoyens a permis d'établir que plusieurs d'entre eux aimeraient déménager dans un autre arrondissement et on a établi la matrice de transition suivante.

$$P=\begin{pmatrix} 0{,}60 & 0{,}10 & 0{,}30 \\ 0{,}05 & 0{,}40 & 0{,}55 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}90 \end{pmatrix}.$$

a) Quelle est la répartition un an après le sondage si le nombre de logements disponibles a permis à tous les citoyens qui le désiraient de changer d'arrondissement.

b) Déterminer l'état stable de la chaîne de Markov.

c) Dans quel secteur la municipalité devrait-elle implanter les infrastructures pour permettre de nouveaux développements ?

8. Déterminer la répartition à long terme du marché pour la matrice de transition suivante.

$$P=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

9. Soit la matrice de transition $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice A^2 est également une matrice de transition.

10. Supposons qu'il n'y a que trois sortes de détergent dans le commerce : A, B et C, qui détiennent 25 %, 25 % et 50 % du marché respectivement. Un sondage effectué auprès des consommateurs a donné la matrice de transition suivante.

$$P=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer la part de marché que chaque sorte de détergent peut espérer détenir à long terme.

b) L'entreprise qui fabrique le détergent C vient de faire une campagne publicitaire pour son produit, suivie d'un sondage qui a permis de déceler un changement dans le comportement des consommateurs; on a obtenu la matrice de transition suivante.

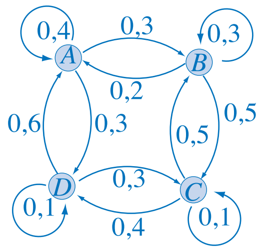
$$P=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}20 & 0{,}30 \\ 0{,}1 & 0{,}40 & 0{,}50 \\ 0{,}10 & 0{,}01 & 0{,}80 \end{pmatrix}$$

Déterminer, dans ces conditions, la part de marché que chaque type de détergent peut espérer conquérir à long terme.

11. Une enquête a été effectuée auprès des téléspectateurs qui captent les nouvelles à la télévision. Certains téléspectateurs se sont déclarés insatisfaits du traitement des nouvelles à la chaîne qu'ils captent et ont manifesté l'intention de changer de chaîne. La matrice de transition ci-contre a été établie à partir de cette enquête où les chaînes de télévision ont été représentées par les lettres A, B et C. Si la tendance se maintient, déterminer la part de téléspectateurs que chaque chaîne peut espérer avoir à long terme.

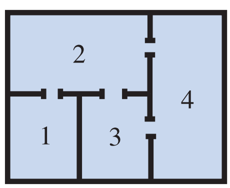
		Prochaine chaîne		
		A_1	B_1	C_1
Chaîne actuelle	A_0	0,5	0,2	0,3
	B_0	0,4	0,5	0,1
	C_0	0,4	0,3	0,3

12. On a effectué une étude de marché portant sur quatre produits concurrents, notés A, B, C et D. Le diagramme de transition ci-dessous représente les probabilités de transition des clients.



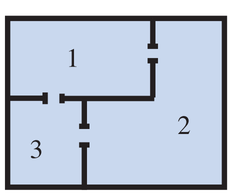
a) Écrire la matrice de transition.
b) Déterminer le point invariant du système.

13. On place une souris dans le compartiment 1 du labyrinthe illustré ci-dessous. Chaque fois qu'elle entend une sonnerie, effarouchée, elle change de compartiment en choisissant au hasard une des portes du compartiment où elle se trouve.



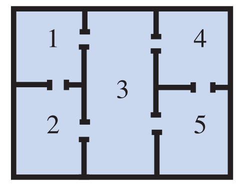
a) Représenter le processus par une matrice de transition.
b) Après trois sonneries, quelle est la probabilité que la souris se retrouve à nouveau dans le compartiment de départ ?
c) Sur une longue période de temps, quelle sera la distribution des visites dans chaque compartiment ?

14. On place une souris dans le compartiment 2 du labyrinthe illustré ci-dessous. Chaque fois qu'elle entend une sonnerie, la courageuse souris change de compartiment en choisissant au hasard une des portes du compartiment où elle se trouve.



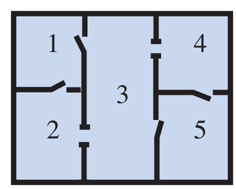
a) Représenter le processus par une matrice de transition.
b) Après trois sonneries, quelle est la probabilité que la souris se retrouve à nouveau dans le compartiment de départ ?
c) Sur une longue période de temps, quelle sera la distribution des visites dans chaque compartiment ?

15. On place une souris dans le labyrinthe illustré ci-dessous. Elle a appris que lorsqu'elle entend une sonnerie, elle doit changer de compartiment en choisissant au hasard une des portes du compartiment où elle se trouve.



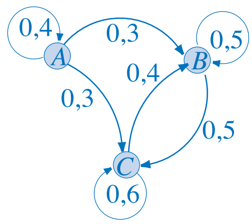
Représenter le processus par une matrice de transition.

16. Notre super souris au comportement aléatoire est placée dans le labyrinthe illustré. Les portes des compartiments 1 et 5 se ferment automatiquement dès que la souris entre dans un de ces compartiments. Celle-ci est alors prisonnière.



a) Représenter le processus par une matrice de transition.
b) Déterminer la matrice donnant, selon le compartiment dans lequel elle a été initialement placée, les probabilités que la souris ne soit pas prisonnière après un changement d'état.
c) Déterminer la matrice donnant, selon le compartiment dans lequel elle a été initialement placée, les probabilités que la souris ne soit pas prisonnière après deux changements d'état.
d) Déterminer la matrice donnant les probabilités que la souris ne soit pas prisonnière après trois changements d'état.
e) Quelle information peut-on obtenir grâce aux matrices Q, Q^2 et Q^3?
f) Déterminer, selon l'état initial, les probabilités que le système soit dans un état absorbant après un changement, deux changements et trois changements d'état.

17. On a effectué une étude de marché portant sur trois produits concurrents, notés A, B et C. Le diagramme de transition ci-dessous représente les probabilités de transition des clients.



a) Écrire la matrice de transition.
b) Déterminer la matrice représentant la situation après un changement d'état, puis après deux changements.
c) Quelle information sur le produit A peut-on obtenir grâce aux matrices P, P^2 et P^3?
d) Expliquer pourquoi on peut être certain que le produit A sera à long terme éliminé du marché.
e) Déterminer le point invariant du système.

18. Soit $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, la matrice de transition d'une chaîne absorbante.
a) Calculer P^2. Déterminer la probabilité de passer de l'état non absorbant à l'état absorbant à la transition suivante. Déterminer la probabilité de demeurer dans l'état non absorbant à la transition suivante.
b) Calculer P^3. Déterminer la probabilité de passer de l'état non absorbant à l'état absorbant à la transition suivante. Déterminer la probabilité de demeurer à l'état non absorbant à la transition suivante.

19. Construire le diagramme de transition des matrices suivantes. Déterminer celles qui sont associées à une chaîne absorbante et donner la forme canonique de la matrice ainsi que la matrice Q donnant les probabilités d'états non absorbants. Calculer Q^2, Q^3 et Q^4. Que révèlent ces matrices sur le comportement du système?

a) $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

20. Les chaînes de Markov sont très utiles dans le domaine de la génétique. Dans l'étude de croisement de porcs, on a constaté que certains avaient un poil long et que d'autres avaient un poil court. La longueur du poil est contrôlée par une paire de gènes que l'on notera A et a. Il y a trois types de génotypes possibles, soit AA, Aa (qui est le même que aA) et aa. Le gène A domine le gène a. On dira donc que le génotype AA est dominant, que le génotype Aa est hybride et que le génotype aa est récessif. Les porcs du type AA et Aa ont le poil long tandis que celui de type aa ont le poil court. Si on croise un porc quelconque avec un porc dominant, le tableau suivant décrit la matrice de transition à chaque croisement.

	AA	*Aa*	*aa*
AA	1	0	0
Aa	0,5	0,5	0
aa	0	1	0

a) Si un troupeau est constitué de 45% de porcs de type AA, de 15% de porcs de type Aa et de 40% de type aa, quel devrait être la distribution des génotypes suite à un croisement avec un porc dominant?
b) Déterminer l'état stable de ce processus.
c) Si on croise les porcs uniquement avec des porcs hybrides, la matrice de transition devient :

	AA	*Aa*	*aa*
AA	0,5	0,5	0
Aa	0,25	0,5	0,25
aa	0	0,5	0,5

Quel serait alors l'état stable d'un troupeau à long terme?

11.3 Modèle de Leontief

L'économiste américain d'origine russe Wassily Leontief a reçu, en 1973, le prix Nobel de sciences économiques pour ses travaux de modélisation mathématique des échanges inter industriels. Il s'intéressa en particulier à la question suivante : dans une économie constituée de n industries interreliées, quelle doit être la production de celles-ci pour répondre exactement à la demande ? Pour apporter des éléments de réponse à cette question, il a divisé l'économie en divers secteurs et, à l'aide de compilations statistiques, il a développé une méthode d'analyse de ces données. Pour bien comprendre cette approche, nous allons l'illustrer à l'aide de l'exemple simple suivant.

Leontief01

Mise en situation

Les deux formes d'énergie disponibles dans une région sont le gaz naturel et l'électricité. Pour extraire le gaz naturel, on utilise les deux sources d'énergie, le gaz naturel pour faire fonctionner la machinerie et l'électricité pour les autres besoins. Par ailleurs, le gaz naturel et l'électricité sont utilisées pour faire fonctionner les turbines des usines produisant de l'électricité à partir du gaz naturel. Il y a donc interdépendance entre ces deux secteurs d'activité économique. Ces deux secteurs produisent un bien dont la valeur est mesurée en dollars. Une **unité d'un produit** est la quantité de ce produit valant un dollar.

Par une étude statistique, on a établi que pour produire un dollar de gaz naturel, il faut utiliser 0,30 \$ de gaz naturel et 0,40 \$ d'électricité. Pour produire un dollar d'électricité, on a utilise 0,10 \$ de gaz naturel et 0,20 \$ d'électricité. Cela constitue les données internes d'utilisation des sources d'énergie par les compagnies productrices.

Le gaz naturel et l'électricité servent aussi dans d'autres secteurs d'activité, ce qui constitue la demande externe, c'est-à-dire la demande qui n'est pas à des fins de production d'énergie mais de stricte consommation. Supposons que la demande externe hebdomadaire est de 3 400 unités de gaz naturel (valeur de 3400 \$) et de 4 000 unités d'électricité (valeur de 4 000 \$). Combien chacun des secteurs doit-il produire pour répondre exactement à la demande ?

Pour répondre à cette question, il faut tenir compte à la fois des besoins internes des industries productrices et de la demande externe. Considérons comme secteur 1, noté S_1, le secteur de production de gaz naturel et secteur 2, noté S_2, le secteur de production d'électricité. Notons de plus,

p_1 le nombre total d'unités de gaz naturel à produire et

p_2 le nombre total d'unités d'électricité à produire.

On peut alors décrire les conditions d'équilibre du marché par des équations linéaires. Ainsi, pour déterminer la production totale de gaz naturel, il faut tenir compte de l'énergie à consommer pour la produire ainsi que de la demande externe. On a alors

Production totale du secteur S_1

$$p_1 = \overbrace{\underbrace{0{,}30\,p_1}_{\substack{\text{Quantité de}\\ \text{gaz naturel}\\ \text{requise par } S_1}} + \underbrace{0{,}10\,p_2}_{\substack{\text{Quantité de}\\ \text{gaz naturel}\\ \text{requise par } S_2}}}^{\substack{\text{Contraintes}\\ \text{de production}}} + \underbrace{3\ 400}_{\substack{\text{Demande}\\ \text{externe de}\\ \text{gaz naturel}}}$$

De la même façon, pour déterminer la production totale d'électricité, il faut tenir compte de l'énergie à consommer pour la produire ainsi que de la demande externe. On a alors

Production totale du secteur S_2

$$p_2 = \overbrace{\underbrace{0{,}40\,p_1}_{\substack{\text{Quantité}\\ \text{d'électricité}\\ \text{requise par } S_1}} + \underbrace{0{,}20\,p_2}_{\substack{\text{Quantité}\\ \text{d'électricité}\\ \text{requise par } S_2}}}^{\substack{\text{Contraintes}\\ \text{de production}}} + \underbrace{4\ 000}_{\substack{\text{Demande}\\ \text{externe}\\ \text{d'électricité}}}$$

En regroupant les inconnus dans le membre de gauche des équations obtenues, on a le système d'équations

$$\begin{cases} p_1 = 0{,}30\,p_1 + 0{,}1\,p_2 + 3\ 400 \\ p_2 = 0{,}4\,p_1 + 0{,}2\,p_2 + 4\ 000 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}7\,p_1 - 0{,}1\,p_2 = 3\ 400 \\ -0{,}4\,p_1 + 0{,}8\,p_2 = 4\ 000 \end{cases}$$

En appliquant la méthode de Gauss-Jordan, on obtient

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}7 & -0{,}1 & 3\ 400 \\ -0{,}4 & 0{,}8 & 4\ 000 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} 10L_1 \\ 10L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{7} & -1 & 34\ 000 \\ -4 & 8 & 40\ 000 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 \\ 7L_2 + 4L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -1 & 34\ 000 \\ 0 & 52 & 416\ 000 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2/52 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -1 & 34\ 000 \\ 0 & \boxed{1} & 8\ 000 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 42\ 000 \\ 0 & 1 & 8\ 000 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1/7 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6\ 000 \\ 0 & 1 & 8\ 000 \end{array}\right)$$

Il faut donc produire au total 6 000 unités de gaz naturel et 8 000 unités d'électricité.

Décrivons cette démarche à l'aide des matrices. Le système d'équation s'écrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Production}\\ \text{totale}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Demande}\\ \text{interne}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3\ 400 \\ 4\ 000 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Demande}\\ \text{externe}}}$$

En appliquant les propriétés des opérations sur les matrices, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\ 400 \\ 4\ 000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\ 400 \\ 4\ 000 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\ 400 \\ 4\ 000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 \\ -0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\ 400 \\ 4\ 000 \end{pmatrix}$$

REMARQUE
On dit que le **système économique est en équilibre** si la production est égale à la somme de la demande interne et de la demande externe, soit :

$$P = Q \bullet P + D$$

Le système est donc en équilibre lorsque la matrice de production P satisfait à la condition :

$$(I - Q) \bullet P = D$$

C'est cette équation qu'il faut résoudre pour trouver la matrice de production.

On peut décrire cette démarche de façon symbolique pour lui donner une portée plus générale. Notons

P la matrice de la production totale,

Q la matrice des contraintes de la production (demande interne) et

D la matrice de la demande externe.

On a alors

$P = Q \bullet P + D$, production = demande interne + demande externe;

$P - Q \bullet P = D$, par les propriétés des opérations;

$I \bullet P - Q \bullet P = D$, puisque I est la matrice identité;

$(I - Q) \bullet P = D$, par les propriétés des opérations.

REMARQUE
La matrice augmentée du système est

$$\left(I - Q \;\vdots\; D\right)$$

On peut donc établir directement la matrice associée au système d'équations à résoudre, c'est la matrice $I - Q$ la matrice augmentée est obtenue en ajoutant la colonne D à la matrice associée.

Leontief02

EXEMPLE 11.3.1

Une entreprise compte trois secteurs spécialisés dans la production d'une forme d'énergie : le mazout (M), le gaz naturel (G) et l'électricité (E). Les échanges entre les secteurs d'activité permettent de satisfaire aux besoins énergétiques de chacun. Pour produire une unité de mazout, il faut 0,2 unité de gaz naturel et 0,2 unité d'électricité; pour produire une unité de gaz naturel, 0,2 unité de mazout, 0,1 unité de gaz naturel et 0,3 unité d'électricité; pour produire une unité d'électricité, 0,1 unité de mazout, 0,2 unité de gaz naturel et 0,1 unité d'électricité.

a) Représenter sous forme matricielle les besoins de consommation d'énergie liés à la production de chaque type d'énergie.

b) Le carnet de commandes de l'entreprise (demande externe) pour le mois de juin est de 450 unités de mazout, 400 unités de gaz naturel et 430 unités d'électricité. Déterminer la production permettant de répondre aux besoins de la production et à la demande externe.

Solution

a) En représentant les données dans un tableau, on obtient :

Production d'une unité

$$\begin{array}{c} \\ M \\ G \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M & G & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \end{array}$$

qui donne la matrice de la consommation interne que nous noterons $Q = (q_{ij})$, où l'élément q_{ij} représente le nombre d'unités du secteur i nécessaires pour produire une unité du secteur j. Ainsi, la première colonne indique que, pour produire une unité de mazout, il faut consommer 0,2 unité de gaz naturel et 0,2 unité d'électricité.

b) La matrice de production est $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, où p_j est le nombre d'unités total qu'il faut produire dans chaque secteur : mazout, gaz et électricité. Pour répondre à la demande externe tout en satisfaisant à ses propres besoins, l'entreprise doit s'assurer que $(I - Q) \bullet P = D$ où

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0,9 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0,9 \end{pmatrix}$$

On a donc : $\begin{pmatrix} 1 & -0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0,9 & -0,2 \\ -0,2 & -0,3 & 0,9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 400 \\ 430 \end{pmatrix}$

En résolvant ce système d'équations, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -0,2 & -0,1 & 450 \\ -0,2 & 0,9 & -0,2 & 400 \\ -0,2 & -0,3 & 0,9 & 430 \end{array}\right) \approx \begin{array}{c} 10L_1 \\ 10L_2 \\ 10L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} \boxed{10} & -2 & -1 & 4\,500 \\ -2 & 9 & -2 & 4\,000 \\ -2 & -3 & 9 & 4\,300 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{c} L_1 \\ 5L_2 + L_1 \\ 5L_3 + L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 10 & -2 & -1 & 4\,500 \\ 0 & \boxed{43} & -11 & 24\,500 \\ 0 & -17 & 44 & 26\,000 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{c} 43L_1 + 2L_2 \\ L_2 \\ 43L_3 + 17L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 430 & 0 & -65 & 242\,500 \\ 0 & 43 & -11 & 24\,500 \\ 0 & 0 & 1\,705 & 1\,534\,500 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3/1\,705 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 430 & 0 & -65 & 242\,500 \\ 0 & 43 & -11 & 24\,500 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 900 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{c} L_1 + 65L_3 \\ L_2 + 11L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 430 & 0 & 0 & 301\,000 \\ 0 & 43 & 0 & 34\,400 \\ 0 & 0 & 1 & 900 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{c} L_1/430 \\ L_2/43 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 1 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 900 \end{array}\right)$$

Il faut donc produire 700 unités de mazout, 800 unités de gaz naturel et 900 unités d'électricité.

Leontief03

REMARQUE
Pour les problèmes sur le modèle de Leontieff, il est conseillé d'utiliser la feuille qui a servi à résoudre les systèmes d'équations linéaires lors du deuxième laboratoire sous Excel.

Modèle de Leontief (économie ouverte)

Un **modèle de Leontief** est un modèle économique constitué de n industries interdépendantes, chacune produisant pour :

- répondre à ses besoins et aux besoins des $(n - 1)$ autres industries, ce qui constitue la **demande interne**;
- répondre aux besoins des clients, ce qui constitue la **demande externe**.

Les échanges entre les industries sont décrits dans une matrice Q appelée **matrice des contraintes de production**. On désigne par :

- P la matrice de production et par D la matrice de la demande externe;
- p_j la production de l'industrie j;
- q_{ij} le nombre d'unités de la production de l'industrie i nécessaires pour produire 1 unité de la production de l'industrie j;
- $q_{ij}\,p_j$ la quantité de la production de l'industrie i consommée par l'industrie j;
- d_i la demande externe adressée à l'industrie i : c'est la portion de la production qui excède la demande interne.

On se sert du modèle de Leontief pour analyser l'économie d'une région, d'un secteur d'activité ou d'une entreprise qui a différents secteurs qui s'échangent des biens ou des services. Il est souvent utile de pouvoir chiffrer ces échanges en dollars. On peut construire un modèle économique de Leontief en remplaçant les unités de biens échangés par leur valeur en dollars.

EXEMPLE 11.3.2

Une entreprise gère trois usines. La matrice de consommation des échanges interusines est :

Production d'une unité

Besoins

$$\begin{array}{c} \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} U_1 & U_2 & U_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans cette matrice, l'entrée q_{ij} indique la valeur en dollars des produits de l'usine U_i nécessaires pour fabriquer chaque dollar de produits de l'usine U_j.

La demande externe D en millions de dollars est $D = \begin{pmatrix} 25 \\ 31 \\ 92 \end{pmatrix}$

Déterminer la valeur, en millions de dollars, de la production de chaque usine pour répondre à la demande externe.

■ *Solution*

La condition à satisfaire est : $(I - Q) \bullet P = D$

Puisque :

$$I-Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,1&0,2&0,3\\0,3&0,3&0,1\\0,2&0,1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,9&-0,2&-0,3\\-0,3&0,7&-0,1\\-0,2&-0,1&1\end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{pmatrix}0,9&-0,2&-0,3\\-0,3&0,7&-0,1\\-0,2&-0,1&1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\31\\92\end{pmatrix}$$

En résolvant cette équation, on trouve :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0,9&-0,2&-0,3&25\\-0,3&0,7&-0,1&31\\-0,2&-0,1&1&92\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}10L_1\\10L_2\\10L_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}9&-2&-3&250\\-3&7&-1&310\\-2&-1&10&920\end{array}\right)$$

$$\approx\begin{array}{l}L_1\\3L_2+L_1\\9L_3+2L_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}9&-2&-3&250\\0&19&-6&1\,180\\0&-13&84&8\,780\end{array}\right)$$

$$\approx\begin{array}{l}19L_1+2L_2\\L_2\\19L_3+13L_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}171&0&-69&7\,110\\0&19&-6&1\,180\\0&0&1\,518&182\,160\end{array}\right)$$

$$\approx\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3/1\,518\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}171&0&-69&7\,110\\0&19&-6&1\,180\\0&0&1&120\end{array}\right)$$

$$\approx\begin{array}{l}L_1+69L_3\\L_2+6L_3\\L_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}171&0&0&15\,390\\0&19&0&1\,900\\0&0&1&120\end{array}\right)\approx\begin{array}{l}L_1/171\\L_2/19\\L_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&90\\0&1&0&100\\0&0&1&120\end{array}\right)$$

La production de l'usine U_1 doit être de 90 M\$, celle de U_2 de 100 M\$ et celle de U_3 de 120 M\$.

Économie fermée

Leontief04

Dans les situations présentées jusqu'à maintenant, la demande du secteur externe était considérée comme une finalité. Elle n'était pas incluse dans le modèle, car elle n'était pas considérée comme un produit intermédiaire visant à satisfaire un besoin d'un des secteurs de l'économie. C'est ce qu'on appelle une économie ouverte décrite par un **modèle de Leontief ouvert**. Lorsque le secteur externe est inclus dans le modèle comme une industrie supplémentaire, on a un **modèle de Leontief fermé**. Dans un tel modèle, tous les biens sont considérés comme des produits intermédiaires, car ils sont tous produits pour satisfaire aux besoins des (n + 1) secteurs du modèle. La proportion de la production consommée par ce secteur supplémentaire est alors la portion non consommée par les autres industries.

EXEMPLE 11.3.3

L'économie d'une région est fondée principalement sur trois secteurs : agriculture (S_1), construction (S_2), industrie (S_3). La matrice des échanges entre ces secteurs est :

Production d'une unité

$$\text{Besoins}\quad\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}1 \end{pmatrix} \end{array}$$

où les éléments sont exprimés en dollars. Les autres activités économiques de la région sont : services, distribution et consommation, groupées en un secteur (S_0). On estime que l'équivalent d'un dollar des biens et des services produits par ce secteur nécessite l'utilisation de 0,25 \$ des produits de S_1, 0,15 \$ des produits de S_2 et 0,20 \$ des produits de S_3.

a) En supposant qu'il n'y a ni importation ni exportation, tous les biens et services produits dans la région sont consommés dans la région et réciproquement. Construire la matrice du modèle économique fermé de cette situation.

b) Déterminer les conditions d'équilibre de cette économie.

Solution

a) Pour construire la matrice de consommation, il faut ajouter une ligne et une colonne à la matrice des échanges intersecteurs. Nous noterons S_0 ce nouveau secteur.

La consommation étant considérée comme une activité économique, tout ce qui n'est pas consommé par l'un des secteurs S_1, S_2 ou S_3 est consommé par le secteur S_0, et c'est la contribution de ce secteur à l'activité économique.

Ainsi, dans la matrice des échanges donnée ci-dessus, pour produire 1 \$ de biens du secteur S_1, on utilise 0,20 \$ des produits du secteur S_1, 0,05 \$ des produits du secteur S_2 et 0,10 \$ des produits du secteur S_3, pour un total de 0,35 \$. Il y a donc 0,65 \$ des activités du secteur S_0 utilisées par le secteur S_1. (De la même façon, pour les autre secteurs, la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1.)

Par ailleurs, les biens et services produits par le secteur S_0 nécessitent l'utilisation de 0,25 \$ des produits de S_1, 0,15 \$ des produits de S_2 et 0,20 \$ des produits de S_3, ce qui donne une somme de 0,60 \$. Il y a donc 0,40 \$ des activités de S_0 utilisées par le secteur S_0. La matrice du modèle économique fermé est ainsi :

$$\begin{array}{c} \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}65 & 0{,}65 & 0{,}65 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Soit R, la matrice de production. Puisqu'il n'y a plus de demande externe, le système est en équilibre lorsque :

$$\begin{aligned} R &= Q \bullet R \\ R - Q \bullet R &= 0 \\ I \bullet R - Q \bullet R &= 0 \\ (I - Q) \bullet R &= 0 \end{aligned}$$

On a donc un système d'équations linéaires homogène. Dans cette situation, la matrice est

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}65 & 0{,}65 & 0{,}65 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}65 & -0{,}65 & -0{,}65 \\ -0{,}25 & 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}15 \\ -0{,}15 & -0{,}05 & 0{,}9 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & -0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

Le système à résoudre est

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}65 & -0{,}65 & -0{,}65 \\ -0{,}25 & 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}15 \\ -0{,}15 & -0{,}05 & 0{,}9 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & -0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour appliquer la méthode de Gauss-Jordan, il n'est pas utile de conserver une colonne de 0, on a

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}65 & -0{,}65 & -0{,}65 \\ -0{,}25 & 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}15 \\ -0{,}15 & -0{,}05 & 0{,}9 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & -0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} \approx \begin{array}{l} 100L_1 \\ 100L_2 \\ 100L_3 \\ 100L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 60 & -65 & -65 & -65 \\ -25 & 80 & -20 & -15 \\ -15 & -5 & 90 & -10 \\ -20 & -10 & -5 & 90 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 \\ 12L_2 + 5L_1 \\ 4L_3 + L_1 \\ 3L_4 + L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 60 & -65 & -65 & -65 \\ 0 & 635 & -565 & -505 \\ 0 & -85 & 295 & -105 \\ 0 & -95 & -80 & 205 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/5 \\ L_2/5 \\ L_3/5 \\ L_4/5 \end{array} \begin{pmatrix} 12 & -13 & -13 & -13 \\ 0 & 127 & -113 & -101 \\ 0 & -17 & 59 & -21 \\ 0 & -19 & -16 & 41 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{l} 127L_1 + 13L_2 \\ L_2 \\ 127L_3 + 17L_2 \\ 127L_4 + 19L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1\,524 & 0 & -3\,120 & -2\,964 \\ 0 & 127 & -113 & -101 \\ 0 & 0 & 5\,572 & -4\,384 \\ 0 & 0 & -4\,179 & 3\,288 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/12 \\ L_2 \\ L_3/4 \\ L_4/3 \end{array} \begin{pmatrix} 127 & 0 & -260 & -247 \\ 0 & 127 & -113 & -101 \\ 0 & 0 & \boxed{1\,393} & -1\,096 \\ 0 & 0 & -1\,393 & 1\,096 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{l} 1\,393L_1 + 260L_3 \\ 1\,393L_2 + 113L_3 \\ L_3 \\ L_4 + L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 176\,911 & 0 & 0 & -629\,031 \\ 0 & 176\,911 & 0 & -264\,541 \\ 0 & 0 & 1\,393 & -1\,096 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/176\,911 \\ L_2/176\,911 \\ L_3/1\,393 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3{,}56 \\ 0 & 1 & 0 & -1{,}50 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}79 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La variable p_3 est libre, on la représente par le paramètre t. Puisqu'il s'agit d'un système d'équations homogène, la troisième ligne représente l'équation $p_3 - 0{,}79t = 0$, d'où $p_3 = 0{,}79t$. On procède de la même façon pour les autres variables et on obtient l'ensemble solution

$$\{(p_1; p_2; p_3; p_4) \mid p_1 = 3{,}56t, p_2 = 1{,}50t, p_3 = 0{,}79t, p_4 = t\}$$

Ainsi, si la valeur de la production dans le secteur industriel (S_3) est de 100 000 \$, celle du secteur de la construction (S_2) est de 79 000 \$; de 150 000 \$ dans le secteur agricole (S_1), 356 000 \$ dans celui des autres activités économiques (S_0).

Modèle de Leontief (économie fermée)

Un **modèle de Leontief** représente une **économie fermée** lorsque la matrice des contraintes de production satisfait aux conditions suivantes.

- $0 \leq q_{ij} \leq 1$ pour tout i et tout j;
- la somme des éléments d'une colonne quelconque est égale à 1.

PROCÉDURE

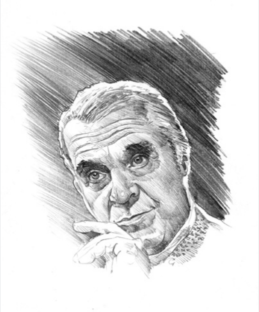
Conditions d'équilibre d'une économie fermée (modèle de Leontief)

1. Construire le tableau des échanges en ajoutant un secteur supplémentaire.
2. Utiliser l'information sur les produits consommés par ce nouveau secteur pour déterminer les éléments de chacune des lignes de la colonne supplémentaire.
3. Compléter le tableau en s'assurant que la somme des éléments de chacune des colonnes est 1.
4. Déterminer la matrice $I - Q$ et échelonner la matrice augmentée du système d'équations $I - Q = 0$.

Un peu d'histoire

WASSILY LEONTIEF

1906-1999



Wassily Leontief était un économiste d'origine russe. Il est né à Munich en Allemagne en 1906 et est mort à New York en 1999. Il a étudié à l'Université de Leningrad (anciennement Saint-Pétersbourg) où il obtint une maîtrise à dix-neuf ans. S'opposant au communisme, il fut arrêté plusieurs fois et il fut autorisé à quitter le pays. Il étudia ensuite à l'université Humboldt (1925-1928) qui lui décerna un doctorat.

Leontief immigra aux États-Unis en 1931. Il a travaillé pour le *National Bureau of Economic Research* et a enseigné à l'Université de Harvard de 1931 à 1975. En 1948, il a fondé le *Harvard Economic Research Project* sur la structure de l'économie américaine. Il en a été le directeur de 1948 à 1975. Il occupa le poste de professeur d'économie à l'Université de New York de 1975 jusqu'à sa mort. Il fut nommé directeur de l'*Institute for Economic Analysis* en 1978.

À partir de 1949, il entreprit de modéliser les données fournies par le *Bureau of Labor Statistics en* utilisant les premiers ordinateurs disponibles à Harvard. Dans sa recherche, il a divisé l'économie américaine en 500 secteurs, chaque secteur étant représenté par une équation linéaire. En 1973, il reçut le « prix Nobel » d'économie pour ses travaux sur l'analyse entrée-sortie (input-output) pour décrire les systèmes économiques en tenant compte de ce qui est utilisé pour la production et ce qui en résulte en tenant compte du fait que la production nécessite la consommation de certains biens. Le modèle d'analyse conçu par Leontief consiste à construire une matrice dont les éléments sont les biens que les industries achètent (intrants) et vendent (sortants). En y ajoutant les gouvernements, les consommateurs et les pays étrangers, on obtient une représentation globale des biens et services d'une économie nationale. Cette méthode d'analyse économique est employée sous différentes formes dans plusieurs pays industrialisés pour planifier et prévoir la croissance économique. Leontief a également contribué au développement de la programmation linéaire pour résoudre des problèmes économiques complexes.

En 1975, il se joignit à la *New York University* où il fonda et dirigea le Center for Economic Analysis

PARADOXE DE LEONTIEF

Dans les années 1950, Leontief a entrepris de tester la validité d'un théorème en économie Heckscher-Ohlin-Samuelson, dit HOS) selon lequel un pays devrait exporter les biens dont la production requiert l'utilisation intensive du facteur disponible en abondance dans le pays.

Selon ce théorème, les exportations des États-Unis vers le reste du monde devaient être plus importantes en capital que les importations américaines en provenance du reste du monde. En effet, les États-Unis étaient alors réputés pour la rareté de sa main-d'œuvre et l'abondance relative du capital. Pour vérifier l'hypothèse HOS, Leontief a calculé les valeurs moyennes de capital et de travail nécessaires pour produire respectivement un million de dollars d'exportations et un million de dollars d'importations.

Pour 1947, Leontief a donné le tableau suivant.

Capital et travail moyens nécessaires pour produire 1 millions de $ d'exportations et d'importations en 1947

	Exportations	Importations
Capital ($)	2 550 780	3 091 339
Travail (hommes/année)	182,3	170
Capital/Travail	13 992	18 184

Source : W.W. Leontief, *Domestic Production and Foreign Trade : The American Capital Position Re-examined,* Proceedings of the American Philosophical Society, volume 97, 1953, Tableau 3.

Contrairement à ce qui était attendu, le tableau de 1947 révéla que l'intensité en capital des exportations, de 13 992 $ par travailleur, était inférieure à celle des importations de 18 184 $ par travailleur. Leontief obtint donc le résultat inverse de celui prévu par le théorème HOS, ce qui fut appelé paradoxe de Leontief. Une analyse similaire portant sur l'année 1958 a confirmé ce paradoxe.

Plusieurs économistes ont cherché à déterminer la cause de ce paradoxe. Il semble qu'une des causes est le fait que Leontief n'a pas suffisamment tenu compte de la qualification dans la définition du travail et du capital. L'éducation, le perfectionnement et l'expérience développent un capital humain qui doit être mesuré et additionné au capital physique pour avoir une évaluation correcte. En tenant compte de cette précision, l'économiste Peter Kenen de l'université Princeton a montré que le théorème HOS était vérifié, éliminant ainsi le paradoxe de Leontief.

D'autres facteurs ont été pris en compte dans des analyses plus actuelles, comme les activités de recherche et développement, les barrières tarifaires, le protectionnisme de certains secteurs d'activité économique et la préférence pour certains biens de consommation particuliers.

11.4 Exercices

1. Une entreprise compte trois secteurs d'activité répartis dans trois usines, notées U_1, U_2 et U_3. La fabrication d'une unité des produits de la première usine nécessite 0,1 unité des produits de U_1, 0,1 unité des produits de U_2 et 0,2 unité des produits de U_3. La fabrication d'une unité des produits de la seconde usine nécessite 0,2 unité des produits de U_1, 0,4 unité des produits de U_2 et 0,3 unité des produits de U_3. La fabrication d'une unité des produits de la troisième usine nécessite 0,2 unité des produits de U_1, 0,2 unité des produits de U_2 et 0,1 unité des produits de U_3.
   a) Construire la matrice de consommation interusine (contraintes de production).
   b) La demande externe pour le prochain mois est de 90 unités des produits de U_1, 110 unités des produits de U_2 et 270 unités des produits de U_3. Déterminer la production permettant de répondre aux besoins de la production et à la demande externe.
   c) Les matrices de production des deux derniers mois sont $\begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 200 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 200 \\ 250 \\ 600 \end{pmatrix}$.

   Quelle était la demande externe pour ces deux mois?

2. Trois entreprises C_1, C_2 et C_3 décident de s'associer pour diminuer les coûts en s'approvisionnant entre elles. La matrice des contraintes de production Q donne la production interne nécessaire pour satisfaire aux besoins de chaque entreprise.

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

   a) Quelle est la production nécessaire pour satisfaire à une demande externe de 115 unités de produits de la compagnie C_1, de 109 unités de produits de la compagnie C_2 et de 135 unités de produits de la compagnie C_3?
   b) Quelle est la production nécessaire pour satisfaire à une demande externe de 217 unités de produits de la compagnie C_1, de 129 unités de produits de la compagnie C_2 et de 63 unités de produits de la compagnie C_3?

3. Une entreprise administre trois usines. La matrice de consommation des échanges interusines est :

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}0 \end{pmatrix}$$

   Dans cette matrice, l'entrée q_{ij} indique la valeur en dollars des produits de l'usine U_i nécessaires pour fabriquer chaque dollar de produits de l'usine U_j.
   a) Déterminer la valeur, en millions de dollars, de la production de chaque industrie pour répondre à une demande externe de 160 M$ des produits de l'usine U_1, de 160 M$ des produits de U_2 et de 240 M$ des produits de U_3.
   b) Si la valeur de la production est de 400 M$ pour les produits de l'usine U_1, de 400 M$ pour les produits de U_2 et de 800 M$ pour les produits de U_3, quelle est la valeur, en millions de dollars, de la demande externe?
   c) Comment expliquer le fait que la production des usines U_1 et U_2 est la même en a) et b) alors que la demande externe est plus faible en b) ?

4. Trois usines se fournissent l'une l'autre des biens qu'elles utilisent pour leur production. La matrice des échanges interusines est :

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

   Dans cette matrice, l'entrée q_{ij} indique la valeur en dollars des produits de l'usine U_i nécessaires pour fabriquer chaque dollar de produits de l'usine U_j.
   a) Déterminer la valeur, en millions de dollars, de la production de chaque industrie pour répondre à une demande externe de 203 M$ des produits de l'usine U_1, de 161 M$ des produits de U_2 et de 114 M$ des produits de U_3.
   b) Si la valeur de la production est de 200 M$ pour les produits de l'usine U_1, de 400 M$ pour les produits de U_2 et de 300 M$ pour les produits de U_3, quelle est la valeur, en millions de dollars, de la demande externe?

5. Un économiste a regroupé dans le tableau suivant, les statistiques de la dernière année touchant trois secteurs interdépendants

Statistiques annuelles de production				
		S_1	S_2	S_3
Coût des services reçus (millions de $)	S_1	5	3	8
	S_2	2,5	6	5
	S_3	4	1,2	4
Production annuelle totale (millions de $)		50	24	40

a) Déterminer la matrice des contraintes de production.

b) En supposant que le marché était en équilibre durant l'année écoulée, quelle a été la demande externe pour ces secteurs ?

c) Les gestionnaires de ces secteurs industriels songent à augmenter leur production annuelle à 60 millions de $ pour les produits de S_1, 30 millions de $ pour les produits de S_2 et 50 millions de $ pour les produits de S_3. Calculer l'augmentation de l'offre qui sera faite aux consommateurs si les gestionnaires prennent cette décision. Traduire cette augmentation en pourcentage. Quelle doit être la réaction des consommateurs pour que le marché reste à l'équilibre ?

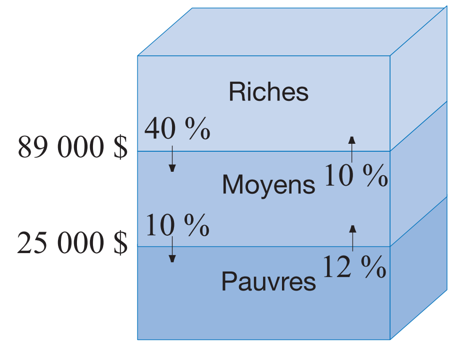
d) Les organismes de prévision économique, en se basant sur la croissance annuelle des salaires, prévoit une augmentation de 5 % de la consommation pour la prochaine année. Si cette prévision s'avère exacte, quelle sera la demande annuelle pour les biens de chacun de ces secteurs ?

e) En supposant que la prévision d'augmentation de la consommation s'avère exacte, comment doit-on procéder pour déterminer quelle devrait être la production annuelle dans ces secteurs ?

Applications diverses

6. On a réalisé une étude portant sur le revenu des ménages d'une région au cours des dix dernières années. Aux fins de cette étude, le seuil de pauvreté a été fixé à 25 000 $ et le seuil de richesse à 89 000 $ et la classe moyenne est formée des ménages ayant un revenu entre ces deux seuils.

On a constaté que l'appartenance à une classe varie d'une année à l'autre et cette information est décrite par le diagramme suivant.



a) Décrire cette information à l'aide d'un diagramme de transition.

b) Représenter cette information à l'aide d'une matrice de transition.

c) En supposant que ces probabilités de transition demeurent stables, déterminer à long terme le pourcentage des ménages dans chacune des classes de revenu.

7. On a réalisé une étude d'une année portant sur le statut marital de la population d'une grande ville. On a constaté que parmi les personnes mariées qui en début d'année se déclaraient heureuses en couple, six sur dix le sont encore à la fin de l'année mais, deux personnes sur dix déclarent éprouver des difficultés conjugales et les autres sont divorcées à la fin de l'année. Parmi les personnes qui disaient éprouver des difficultés dans leur couple en début d'année, deux personnes sur dix disent avoir à nouveau retrouvé le bonheur dans leur couple, quatre personnes sur dix éprouvent encore des difficultés, les autres sont divorcées. Par ailleurs, le quart des personnes qui étaient divorcées en début d'année se sont remariées en cours d'année et les autres sont encore divorcées.

a) Décrire l'information obtenue lors de cette étude à l'aide d'un diagramme de transition.

b) Décrire l'information à l'aide d'une matrice de transition.

c) L'étude portait sur un échantillon de 10 000 personnes. À long terme, quelle sera le nombre de personnes heureuses en couple.

d) À long terme, une personne de cet échantillon a-t-elle plus de chances d'être heureuse en couple, d'éprouver des difficultés dans son couple ou d'être divorcée ?

8. Le bureau de crédit d'un grand magasin a établi le profil de ses clients selon trois catégories A, B et C. Le groupe A représente les consommateurs qui paient le montant dû à la réception de leur facture, le groupe B est constitué de ceux qui acquittent leur facture dans un intervalle de 0 à 90 jours après réception de la facture et le groupe C est formé des autres clients classés sous « mauvaises créances ». De plus, en analysant l'historique des comptes, on a les probabilités qu'un client passe d'un de ces groupes à un autre sur une période d'un mois. Ces probabilités sont notées dans le tableau suivant.

Profil des consommateurs

	A	*B*	*C*
A	0,5	0,5	0
B	0,5	0,3	0,2
C	0	0,6	0,4

a) Présentement, 5 000 clients sont dans la catégorie A, 10 000 dans la catégorie B et 2 000 dans la catégorie C. Quelle sera la répartition dans un mois ? Dans deux mois ?
b) Quelle sera la répartition des clients entre ces trois catégories à long terme ?

9. On a réalisé une étude portant sur les transitions d'une tranche de revenu à l'autre en comparant le revenu de l'aîné d'une famille au revenu du père. Les tranches de revenu ont été désignées par A, revenu supérieur, B revenu moyen supérieur, C revenu moyen inférieur et D revenu faible. Cette étude a permis d'établir le tableau de transitions suivant.

Transitions en une génération

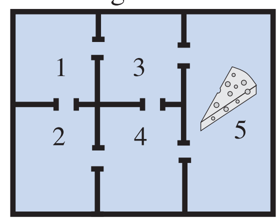
	A	*B*	*C*	*D*
A	0,35	0,40	0,20	0,05
B	0,15	0,45	0,35	0,05
C	0,10	0,35	0,45	0,10
D	0,05	0,15	0,30	0,50

a) Dans un échantillon de 2 000 personnes, la répartition est donnée par le vecteur d'état suivant

$$(240 \quad 840 \quad 720 \quad 200).$$

Quel sera le vecteur d'état à la prochaine génération ?
b) À long terme, quelle sera la répartition des aînés de famille entre ces tranches de revenu ?

10. On place une souris dans le compartiment 1 du labyrinthe illustré ci-dessous. Chaque fois qu'elle entend une sonnerie, effarouchée, elle change de compartiment en choisissant au hasard une des portes du compartiment où elle se trouve, sauf si elle trouve le fromage.



a) Représenter le processus par une matrice de transition.
b) Après trois sonneries, quelle est la probabilité que la souris se retrouve à nouveau dans le compartiment de départ ?
c) Lorsqu'elle atteint le compartiment 5, la souris n'en bouge plus car, comme chacun sait, « ventre affamé n'a point d'oreilles » Déterminer la probabilité que le système soit dans un état absorbant après trois changements d'état.

11. Le concessionnaire de la cafétéria du Cégep gère trois points de production et de vente, soit A, la cafétéria principale, B le comptoir des crudités et des salades et C le casse-croûte. Chacune des composantes produit de la nourriture qui peut être consommée dans les autres. Par exemple, à la cafétéria principale on prépare les viandes qui seront incorporées dans les salades et à la cafétéria principale, on incorpore de la salade au plat principal. Le tableau de la demande interne est le suivant.

Tableau des échanges

	A	*B*	*C*
A	0,4	0,1	0,0
B	0,1	0,2	0,2
C	0,1	0,1	0,2

a) Si la production totale au cours de la semaine écoulée a été respectivement de 500 unités, de 300 unités et de 200 unités, déterminer la demande externe pour cette période.
b) La semaine prochaine est la semaine de lecture et on prévoit que la demande externe sera respectivement de 46, 96 et 0 unités. Déterminer la matrice de production. Faut-il fermer complètement le casse-croûte ?