

Daniel Bernoulli

1700-1782

Daniel Bernoulli a été dix fois récipiendaire du prix de l'Académie de Paris. L'ensemble de ses travaux est surtout en physique mais il a également apporté des contributions en mathématiques, en économie et en médecine.

Daniel Bernoulli

Équations de Riccati

C'est en 1720 que Francesco Riccati (1676-1754) présente à un ami deux équations différentielles qu'il cherche à résoudre

$$y' = ay^2 + bx + cx^2$$

$$y' = ay^2 + bx^m$$

où a , b , c et m des constantes réelles.

De nos jours, une équation de Riccati est une équation différentielle ordinaire de la forme

$$y' = q_0 y^2 + q_1 x + q_2 x^2$$

où q_0 , q_1 et q_2 sont trois fonctions, souvent choisies continues sur un intervalle commun à valeurs réelles ou complexes.

On rencontre des équations de Riccati en physique quantique dans des problèmes portant sur l'équation de Schrödinger.

Le deuxième fils de Jean Bernoulli, Daniel, est né en 1700 à Groningue. Il est âgé de 5 ans lorsque la famille retourne à Bâle pour permettre à sa mère de se rapprocher de son père malade. Peu de temps auparavant, Jean avait fait application pour être professeur de mathématiques à l'université de Bâle, mais son frère Jacques avait obtenu le poste. Durant le voyage de retour à Bâle, il apprend que Jacques vient de décéder de la tuberculose. Dès son arrivée, il entreprend les démarches pour occuper le poste laissé vacant et y parvient.

Quand vient le temps pour Daniel de choisir une carrière, Jean tente de le forcer à faire carrière dans le commerce. Mais, à l'âge de onze ans, Daniel a été initié aux mathématiques par son frère aîné Nicolas II et il refuse de se consacrer au commerce, comme son père l'a fait avant lui. Il entreprend des études de médecine à l'université de Bâle et complète son doctorat en 1720, tout en se familiarisant avec les travaux de son père sur l'énergie cinétique.

Daniel veut entreprendre une carrière académique à Bâle, mais est déçu dans ses attentes. La décision finale pour choisir la candidature retenue est le tirage au sort et Daniel n'est favorisé par aucun des tirages au sort pour les trois chaires sur lesquelles il a appliqué. Il décide alors d'aller à Venise approfondir ses

connaissances en médecine. Pendant ce séjour, il produit son premier ouvrage en mathématiques et, avec l'appui de Christian Goldbach (1690-1764), il édite *Exercitationes*, un recueil comprenant quatre parties. La première porte sur un jeu pratiqué à Venise, ce qui indique que Daniel s'intéressait déjà aux probabilités à cette époque. La seconde partie porte sur l'écoulement de l'eau par un orifice dans un réservoir et sur les théories erronées de Newton sur ce phénomène. La troisième partie porte sur les équations de Riccati et la dernière traite de problèmes géométriques sur des figures délimitées par deux arcs de cercle.

Pendant ce séjour, Daniel conçoit, pour les bateaux, un sablier dont l'écoulement de sable est constant même par gros temps en mer. Il soumet cette invention à l'Académie de Paris qui lui décerne le prix de l'Académie. Ces réalisations assurent sa réputation et de retour à Bâle, il reçoit une invitation de l'impératrice Catherine de Russie qui lui offre une chaire de mathématiques à St-Petersbourg. Il n'est pas tenté d'aller s'installer seul aussi loin de la Suisse. Son frère Nicolas II est prêt à le suivre, Catherine accepte et offre également une chaire de mathématiques à Nicolas. Quelques mois après leur arrivée en Russie, Nicolas meurt et Daniel songe à retourner à Bâle. Son père fait alors les démarches pour que son meilleur élève, Leonhard Euler, aille tra-

vailler avec Daniel. Les deux collaborent jusqu'au départ de Daniel de Russie en 1733 et entretiennent une correspondance par la suite.

À St-Petersbourg, Daniel fait une de ses plus grandes découvertes en définissant les nœuds et la fréquence d'oscillation d'un système. Il a montré que les mouvements des cordes d'un instrument de musique est composé d'un nombre infini de vibrations harmoniques de la corde. C'est à cette époque qu'il réalise la majeure partie de ses travaux en hydrodynamique et qu'il rédige la première version de son traité *Hydrodynamica* publié en 1738.

En 1741, il entreprend des études sur l'élasticité à l'aide d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles. Ces travaux s'échelonnent jusqu'en 1751. Ses dernières années furent consacrées à des travaux sur les probabilités appliquées à des domaines comme l'économie.

Pression et vitesse

Daniel Bernoulli étudie la relation entre la vitesse du flux sanguin et la pression. Pour cette étude, il réalise une expérience consistant à perforer la paroi d'un tube pour y insérer une fine paille et mesurer à quelle hauteur monte le liquide dans la paille en modifiant la vitesse d'écoulement dans le tube. Le détail de cette expérience est illustré par les figures à droite.

Bernoulli constate que la hauteur à laquelle le liquide s'élève dans la paille est en relation avec la pression du liquide dans le tube¹. Poussant plus loin ses recherches, Daniel veut voir s'il existe un lien avec la conservation de l'énergie. On savait que l'énergie cinétique d'un projectile se transforme en énergie poten-

tielle à mesure que le projectile s'élève et réciproquement lorsqu'il retombe. Daniel constate que, de façon analogue pour un fluide en mouvement, l'énergie cinétique se transforme en pression et réciproquement. Mathématiquement, il établit une équation différentielle pour décrire la relation entre la variation de la pression et la variation d'énergie cinétique, soit

$$-dp = \rho v dv$$

qui donne par intégration

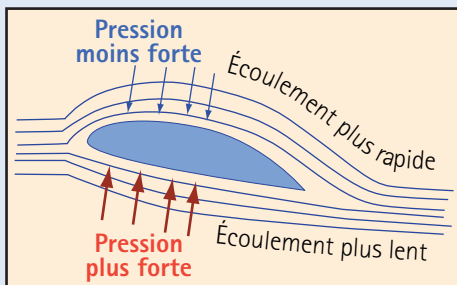
$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}$$

où p est la pression, ρ (rho) est la densité du fluide et v est la vitesse. Cette loi signifie que si la vitesse augmente la pression diminue et si la vitesse diminue, la pression augmente.

La généralisation de cette loi pour tenir compte de l'altitude s'énonce :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{constante}$$

Elle est appliquée dans la configuration des ailes d'un avion. L'aile fend l'air et si la vitesse de l'air est supérieure au-dessus de l'aile, la pression est moindre au-dessus, et l'aile est alors « aspirée » vers le haut.



On peut expérimenter ce phénomène en tenant une feuille de papier par deux coins d'un même côté. En soufflant au-dessus de la feuille, l'air se déplace alors plus rapidement au-dessus de la feuille et la pression de l'air exercée sous la feuille est plus grande que celle exercée au-dessus de la feuille qui tend à s'élever.

1. Dans un ouvrage publié en 1733, le naturaliste anglais Stephen Hales (1676-1761) relate avoir mesuré la pression sanguine d'une jument couchée et attachée en introduisant un tube dans une de ses artères et constaté que le sang montait dans le tube à une hauteur de 9 m.

