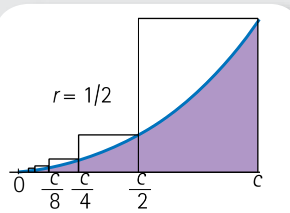
AIRES ET LONGUEURS, DIVERSES APPROCHES

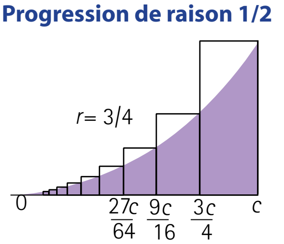
Le recours à des valeurs discrètes pour calculer une estimation d'une grandeur continue s'est implanté au XVIe siècle. Selon toute vraisemblance, c'est ainsi que Gérard Mercator (1512-1594) (NH Mercator01, Mercator01-02) a procédé pour tracer ses cartes de navigation en appliquant une démarche discrète de rectification d'une courbe. C'est également durant ce siècle que les traductions des œuvres d'Archimède ont commencé à être traduites. Les mathématiciens ont alors cherché à résoudre des problèmes de quadrature de figures planes et de cubature de solides en adaptant la démarche d'Archimède au meilleur de leur compréhension car, le texte *La Méthode* d'Archimède qui permet de comprendre comment il établissait les résultats à démontrer ne fut découvert, à Constantinople, qu'en 1906. Il s'agit d'un palimpseste, c'est-à-dire un document dont le premier texte a été gratté pour écrire un autre texte.

Inspiré par Archimède, Cavalieri a développé sa *méthode des indivisibles* sans se soucier toutefois de démontrer de façon rigoureuse les résultats auxquels il est parvenu. Torricelli a repris le bâton du pèlerin et utilisé la méthode imaginée par Cavalieri en apportant des preuves selon la tradition des géomètres grecs. Ces procédures géométriques furent graduellement traduites en termes arithmétiques par des mathématiciens comme Fermat, Pascal et Roberval.

Dans ses travaux sur le calcul d'aires, Pierre de Fermat a développé une approche personnelle en cherchant à déterminer l'aire sous une courbe de la forme $y = x^n$ où n est un entier positif. Plutôt que de considérer des rectangles d'égale largeur comme le faisaient Cavalieri, Torricelli et Roberval, Fermat construit des rectangles dont les largeurs sont en progression géométrique décroissant à partir de la frontière droite de l'intervalle, comme dans les illustrations ci-contre pour un intervalle $[0; c]$. Pour obtenir une plus grande précision, il doit augmenter le nombre de rectangles (NH Fermat04), ce qui signifie prendre une valeur plus proche de 1 comme raison de la progression.



Progression de raison 1/2



Progression de raison 3/4

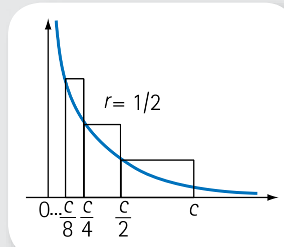
Dans cette approche, l'aire sous la courbe est approximée par la somme infinie des termes d'une progression géométrique, ce qui est simple à effectuer et en considérant la limite lorsque la raison tend vers 1, Fermat obtient que cette somme est égale à

$$A = \frac{c^n}{n+1}$$

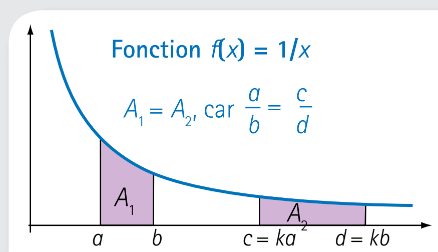
En écriture moderne, il obtient donc

$$\int_0^c x^n\,dx = \frac{c^{n+1}}{n+1}.$$

En modifiant sa procédure, Fermat a également montré que le résultat est valide si n est un entier négatif. Ce qui est « surprenant » puisque le comportement des fonctions est très différent lorsque n est négatif. Il restait cependant un cas particulier irritant, celui où $n = -1$. En effet, dans ce cas, le dénominateur de $c^n/(n+1)$ est égal à 0 et rien ne va plus. Fermat détermine donc un résultat remarquable. Ce n'est pas simplement l'aire sous une courbe, mais l'aire sous une famille de courbes de la forme $f(x) = x^n$, où n est un entier différent de –1. Il est donc parvenu à déterminer l'aire sous la courbe d'une fonction puissance environ trente ans avant que Newton et Leibniz ne parviennent au même résultat.



Le jésuite Grégoire de Saint-Vincent (NH Saint-Vincent), qui s'intéressait beaucoup au calcul d'aires, a étudié le cas de l'hyperbole équilatère $y = 1/x$. En utilisant des subdivisions de l'axe horizontal formant une progression géométrique, il a montré que si la longueur des intervalles croît géométriquement, l'aire sous la courbe croît arithmétiquement.



Alfonso Anton de Sarasa (1618-1667), un des étudiants de Saint-Vincent, a exprimé algébriquement cette caractéristique géométrique. En termes modernes, si $A(t)$ représente l'aire sous l'hyperbole dans l'intervalle $[1; x]$, alors $A(t) = \log_b t$. À l'époque, la base b établissant le lien entre l'aire et l'abscisse de la frontière droite de l'intervalle, mais on savait qu'entre une progression arithmétique et une progression géométrique, il existait un lien logarithmique. La base fut connue avec les travaux d'Euler, c'est la base e, et on écrit maintenant $A(t) = \ln t$ ou plus précisément

$$A(t) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x + k.$$