Bonaventura Cavalieri
1598-1647

Cavalieri a appliqué sa méthode pour calculer l'aire de diverses figures. Initialement, les indivisibles étaient des lignes droites, mais dans certaines situations, il fallait rectifier des lignes courbes pour déterminer l'aire de la figure.

Bonaventura Cavalieri

Calcul d'aires

La *méthode des indivisibles* développée par Cavalieri découle d'une conception de la matière et du continu propre à certains philosophes scolastiques qui pensaient que la matière était composée de particules insécables ou atomes dont la nature diffère de celle de la matière. Dans cette conception la décomposition de la matière est limitée puisque celle-ci est constituée de ces particules. La méthode des indivisibles de Cavalieri se fonde sur cette conception de la matière. Pour lui une figure plane est constituée de lignes, un solide est constitué de plans et c'est la somme de ces indivisibles qui donne l'aire de la surface ou le volume du solide.

Dans son *Traité des Indivisibles*, Cavalieri conçoit une surface comme constituée par des droites parallèles équidistantes et un solide comme composé de plans parallèles équidistants.

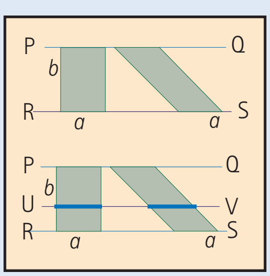
L'illustration ci-contre aide à comprendre les applications simples de sa méthode. Ces deux figures sont incluses entre deux droites parallèles PQ et RS. Si on trace une droite UV quelconque parallèlement aux droites PQ et RS, les segments interceptés par cette droite sont tous deux de longueur a puisque des droites parallèles comprises entre deux parallèles ont même longueur. Ceci étant vrai pour toutes les droites que l'on peut tracer parallèlement à PQ et RS, il s'ensuit que l'aire du parallélogramme est égale à l'aire du rectangle, soit $A = ab$. On conclut :

L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur.

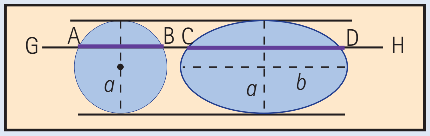
La méthode de Cavalieri peut être généralisée pour trouver l'aire de figures lorsque l'aire des indivisibles est dans un rapport donné :

Si deux figures planes ont même hauteur et si des sections qui sont obtenues par des lignes parallèles aux bases et à égale distance de celles-ci sont toujours dans un rapport donné, alors les aires des deux figures sont aussi dans le même rapport.

Kepler a procédé de cette façon pour déterminer des aires en comparant des figures dont des sections sont toujours dans un rapport donné. En particulier, il a déterminé l'aire d'une ellipse dont la demi-longueur du grand axe est b et dont la demi-longueur du petit axe est a. Il compare les sections de cette ellipse à celles d'un cercle de rayon a.



© 2019, Prodafor



En traçant une ligne GH parallèle aux droites IJ et KL, on détermine des segments AB et CD de telle sorte que :

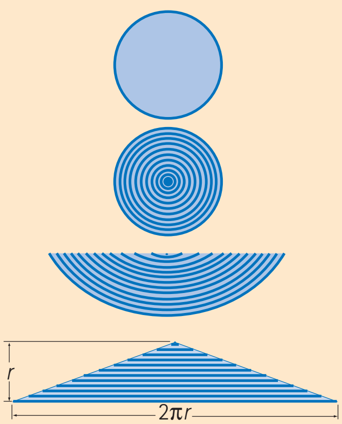
$$\overline{CD} = \frac{b}{a}\overline{AB}$$

Cette caractéristique est vraie pour tous les segments et on conclut :

$$A_{\text{ellipse}} = \frac{b}{a} \times \pi a^2 = \pi ab$$

Il est important lorsqu'on développe une procédure nouvelle de s'assurer que les résultats qu'on obtient avec cette procédure sont les mêmes que ceux déjà connus. Ainsi, l'aire d'un disque est constitué de cercles concentriques.

Aire du cercle



En déroulant ces cercles, on obtient un triangle dont la base est $2\pi r$ et la hauteur est r. L'aire est donc égale à πr^2.

La spirale d'Archimède est obtenue en déplaçant un point sur un segment de droite selon un mouvement uniforme tandis que la droite tourne autour de son extrémité selon un mouvement uniforme. Archimède a démontré que l'aire de la spirale est égale au tiers de l'aire du disque qui la contient.

Pour parvenir au même résultat, Cavalieri utilise comme indivisibles des arcs de cercle qu'il redresse en segments. Le principe de construction de la spirale d'Archimède permet de dire que si l'arc de cercle a pour angle au centre θ (exprimé en radian), son rayon est

$$r\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)$$

La longueur de l'arc de cercle est donc

$$r\theta\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right) = r\left(\theta-\frac{\theta^2}{2\pi}\right)$$

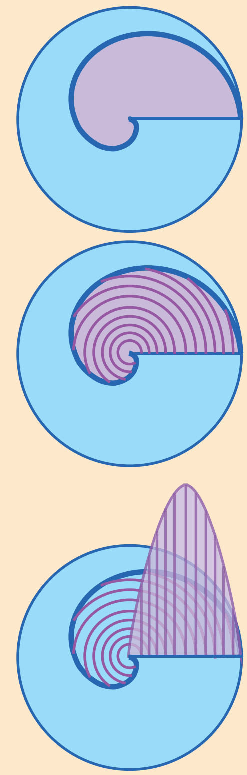
où θ est un angle variant de 0 à 2π.

Les segments redressés sont donc les indivisibles d'une parabole de base r et de hauteur $\pi r/2$. Depuis Archimède, on sait que l'aire d'une telle surface est égale au 2/3 du rectangle qui la contient.

La parabole et la spirale sont constituées d'indivisibles de même longueur. Leurs aires sont égales. L'aire de la spirale est :

$$A = \frac{2}{3}r \times \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi r^2}{3}$$

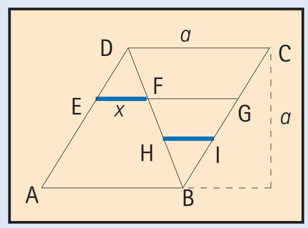
Aire de la spirale



Puissance des lignes

Cavalieri a utilisé sa méthode des indivisibles pour déterminer ce qu'il appelle les **puissances de lignes** dans un parallélogramme. En utilisant l'écriture moderne, sa conjecture est :

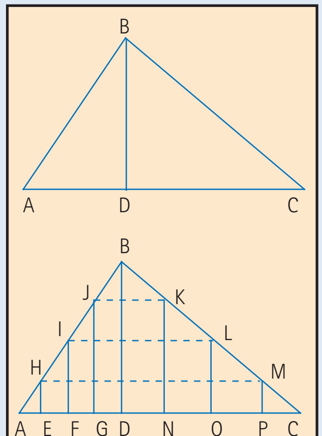
$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} + k$$



Il a « démontré » ce résultat pour $n \leq 9$.

La méthode des indivisibles a fait l'objet de plusieurs critiques du fait que les indivisibles ne sont jamais clairement définis. Le suisse Paul Guldin (1577-1642) a présenté les plus sévères critiques, imaginant même un exemple illustrant que la méthode des indivisibles donne parfois des résultats erronés. Il montre que la méthode des indivisibles permet de conclure que dans un triangle ABC dont les côtés AB et BC sont inégaux, la hauteur BD divise le triangle en deux triangles de même aire. En effet, des coupes horizontales comme JK, IL et HM déterminent des segments indivisibles verticaux égaux deux à deux, les triangles ABD et BCD ont donc même aire.

Cavalieri réplique en disant que dans cette construction, les indivisibles ne sont pas également distribués dans les deux sous-triangles. Cette réponse ne règle rien. Pour réponde correctement, il faut découper la surface en rectangles et l'aire est la limite lorsque la largeur de ces rectangles vers 0.



Critique de Guldin

© 2019, Prodafor