CHAPITRE 6

EXPONENTIELLES *et* LOGARITHMES

Appliquer les fonctions exponentielles et les logarithmes.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- l'utilisation du vocabulaire et de la notation des fonctions dans la description de divers phénomènes;
- l'utilisation d'une fonction exponentielle pour construire un modèle d'un phénomène à l'aide de sa description verbale ou d'un critère algébrique;
- l'utilisation d'une fonction logarithmique pour construire un modèle d'un phénomène;
- l'utilisation des logarithmes pour résoudre des équations exponentielles et des équations logarithmiques.

OBJECTIFS

6.1 Construire un modèle exponentiel ou logarithmique à partir de la description verbale d'un phénomène.

6.2 Analyser un phénomène dont le lien entre les variables est exponentiel ou logarithmique.

6.3 Transformer une expression algébrique à l'aide des propriétés des logarithmes.

6.4 Résoudre des équations exponentielles en ayant recours aux propriétés des exposants et des logarithmes.

6.1 Modélisation exponentielle

Le présent chapitre vise à mettre en évidence les caractéristiques qui permettent de reconnaître et de confirmer l'existence d'un lien exponentiel entre les variables d'un phénomène et de décrire algébriquement ce lien.

Mises en situation

Exposants_01

FonctExpo01

On place un capital de 10 000 $ à un taux d'intérêt de 6 % capitalisé annuellement. On veut déterminer la valeur de ce placement à la fin de chacune des trois années suivantes. Soit $C(1)$, le capital accumulé en un an. Ce capital est constitué du placement de 10 000 $ auquel s'ajoute 6 % de cette somme :

$$\begin{aligned} C(1) &= 10\,000 + (6\,\% \times 10\,000) = 10\,000 + (0{,}06 \times 10\,000) \\ &= 10\,000 + 600 = 10\,600\ \$. \end{aligned}$$

À la fin de la deuxième année, le capital $C(2)$ est constitué du capital de 10 600 $ accumulé à la fin de la première année, auquel s'ajoute 6 % de ce montant :

$$\begin{aligned} C(2) &= 10\,600 + (6\,\% \times 10\,600) = 10\,600 + (0{,}06 \times 10\,600) \\ &= 10\,600 + 636 = 11\,236\ \$. \end{aligned}$$

À la fin de la troisième année, le capital $C(3)$ est constitué du capital de 11 236 $ accumulé à la fin de la deuxième année auquel s'ajoute 6 % de ce montant :

$$\begin{aligned} C(3) &= 11\,236 + (6\,\% \times 11\,236) = 11\,236 + (0{,}06 \times 11\,236) \\ &= 11\,236 + 674{,}16 = 11\,910{,}16\ \$. \end{aligned}$$

Pour généraliser ce résultat, on représente d'abord le capital initial par C_0. En ajoutant 6 % à ce capital, on obtient $1{,}06C_0$. On constate que la valeur du capital à la fin de chaque année subséquente s'obtient en multipliant par 1,06 la valeur en début d'année :

$$\begin{aligned} C(1) &= 1{,}06\ C_0, \\ C(2) &= 1{,}06\ C(1), \\ C(3) &= 1{,}06\ C(2), \\ &\ \ \cdots \\ C(n+1) &= 1{,}06\ C(n) = (1 + 0{,}06)\ C(n). \end{aligned}$$

On peut décrire le capital à la fin de chaque année en fonction du capital initial.

Le capital après un an est $C(1) = C_0\,(1{,}06)$;

le capital après deux ans est $C(2) = C(1)\,(1{,}06) = C_0\,(1{,}06)^2$;

le capital après trois ans est $C(3) = C(2)\,(1{,}06) = C_0\,(1{,}06)^3$.

En général,

$$C(n) = C_0\,(1{,}06)^n = C_0\,(1 + 0{,}06)^n.$$

Dans le cas d'un capital initial de 10 000 $, le modèle décrivant le capital accumulé au bout de n années est

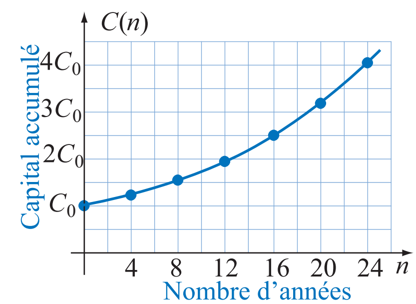
$$C(n) = 10\,000\,(1{,}06)^n.$$

Ce résultat est très intéressant, car il permet de constater la structure sous-jacente du phénomène, à savoir que la croissance du capital suit un modèle dont la variable indépendante est en exposant. Ce modèle sert à déterminer la valeur du placement à n'importe quel moment. Ainsi, pour connaître la valeur du placement après trois ans, on calcule $C(3)$,en substituant 3 à n dans le modèle :

$$C(3) = 10\,000\,(1{,}06)^3 = 11\,910{,}16\ \$.$$

Pour représenter graphiquement le modèle, il n'est pas nécessaire de calculer les correspondances de façon très précise. Il faut simplement respecter la proportionnalité, de sorte qu'on peut exprimer les valeurs du capital. On obtient ainsi le graphique donné ci-contre.

Capital $C(n)$		
n	$C_0(1{,}06)^n$	$10\,000(1{,}06)^n$
0	C_0	10 000,00 $
4	$1{,}26\,C_0$	12 624,77 $
8	$1{,}59\,C_0$	15 938,48 $
12	$2{,}01\,C_0$	20 121,96 $
16	$2{,}54\,C_0$	25 403,52 $
20	$3{,}21\,C_0$	32 071,35 $
24	$4{,}05\,C_0$	40 489,35 $



EXEMPLE 6.1.1

La compagnie qui vous emploie vient d'acquérir un équipement qui perd 15 % de sa valeur à chaque année.

a) On vous demande de décrire la valeur de l'équipement en fonction du nombre d'années.

b) Représenter cette fonction graphiquement.

c) Calculer la valeur dix ans après l'achat si la valeur au moment de l'achat est de 250 000$.

FonctExpo02-ADM

REMARQUE

Il est plus facile de tracer le graphique si on choisit des valeurs numériques des multiples de C_0 ou de V_0.

Solution

a) **Identification des variables**

Les variables sont le nombre n d'années écoulées depuis l'achat et la valeur V de l'équipement. Pour faciliter la description du phénomène, représentons par V_0 la valeur initiale et par $V(n)$ la valeur après n années.

Définition du lien entre les variables

La valeur $V(1)$, un an après l'achat :

$$V(1) = V_0\,(0{,}85).$$

la valeur $V(2)$, deux ans après l'achat :

$$V(2) = V(1)\,(0{,}85) = V_0\,(0{,}85)^2.$$

la valeur $V(3)$, trois ans après l'achat :

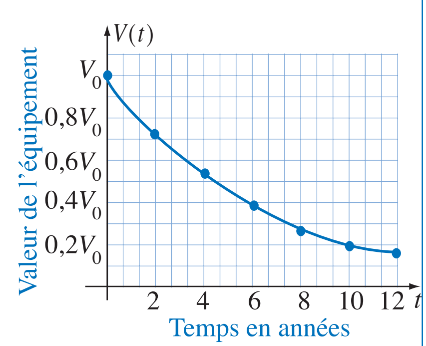
$$V(3) = V(2)\,(0{,}85) = V_0\,(0{,}85)^3.$$

En généralisant ce résultat par induction, on obtient :

$$V(n) = V_0\,(0{,}85)^n = V_0\,(1 - 0{,}15)^n.$$

b) Pour esquisser le graphique, on doit calculer quelques correspondances données dans le tableau ci-contre.

t (an)	$V(t)$ ($)
0	V_0
2	$0{,}72\,V_0$
4	$0{,}52\,V_0$
6	$0{,}38\,V_0$
8	$0{,}27\,V_0$
10	$0{,}20\,V_0$
12	$0{,}14\,V_0$



Utilisation du modèle

c) **Reformulation de la question**

Quelle est l'image de $n = 10$ par la fonction?

Calculs

$$V(10) = 250\,000(0{,}85)^{10} = 49\,218{,}6.$$

Rédaction de la réponse

La valeur, dix ans après l'achat, est d'environ 49 000$.

FonctExpo03

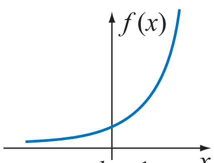
REMARQUE

a et b sont les paramètres de la fonction exponentielle.

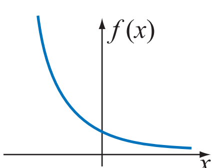
Fonction exponentielle

Soit b, un nombre réel tel que $b > 0$ et $b \neq 1$. On appelle **fonction exponentielle** toute fonction définie par une équation de la forme $y = ab^x$ où b est la **base** de la fonction exponentielle.

Une fonction exponentielle est donc une fonction dont la variable indépendante est en exposant. Le domaine d'une fonction exponentielle est l'ensemble des nombres réels et son codomaine est l'intervalle $]0; \infty[$. Deux fonctions exponentielles sont représentées ci-contre.



$b > 1$
Fonction croissante



$0 < b < 1$
Fonction décroissante

Une fonction exponentielle est toujours concave vers le haut. De plus, elle est **croissante** lorsque sa base est plus grande que 1 ($b > 1$) et **décroissante** lorsque sa base est plus petite que 1 ($0 < b < 1$). Dans la modélisation de phénomènes, on rencontre souvent des expressions définies à l'aide d'une exponentielle, par exemple une fonction de la forme $f(x) = B - Ab^x$. Il est alors utile de trouver l'asymptote horizontale de la fonctions pour en esquisser le graphique. Il suffit de se rappeler que :

- b^{-x} tend vers 0 lorsque x tend vers ∞,
- b^x tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$.

Caractéristique du modèle exponentiel

REMARQUE

Dans une fonction exponentielle dont la variable est le temps t, le paramètre a est appelé **valeur initiale de la variable dépendante**. C'est l'image au temps $t = 0$.

Dans un problème écrit, un taux de variation sans unité au numérateur (par exemple, 15% par cm ou double tous les jours) justifie un lien exponentielle entre les variables.

Les modèles établis dans la mise en situation et dans l'exemple 6.1.1 sont de la forme $y = ab^x$. Dans la mise en situation, le capital croît de 6% par année, la base de l'exponentielle est $b = 1 + r = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$ et $a = 10\,000$\$, soit le **capital initial**. Dans l'exemple 6.1.1, la valeur décroît de 15% par année. Dans ce cas, la base de la fonction exponentielle est $b = 1 - r = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$ et la valeur initiale est $a = 250\,000$\$.

Les phénomènes étudiés sont caractérisés par le fait que la variation de la variable dépendante peut s'exprimer en pourcentage (sans unité) de l'unité de la variable indépendante. C'est ainsi que l'on reconnaît une situation descriptible par un modèle exponentiel. Dans les applications, on désigne de préférence les variables par des lettres évocatrices, comme i pour un taux d'intérêt et C pour un capital,

PROCÉDURE

Modélisation d'un phénomène de croissance ou de décroissance

1. Identifier la variable indépendante et la variable dépendante.
2. Identifier la valeur initiale et le taux de croissance ou de décroissance.
3. Déterminer la base k du modèle exponentiel; $b = 1 + r$ ou $b = 1 - r$, où r est le taux, selon le cas.
4. Établir la relation entre les variables.
5. Utiliser le modèle pour analyser le phénomène.

EXEMPLE 6.1.2

Les riverains d'un lac ont ensemencé celui-ci avec 2 000 truites, mais on observe un taux de mortalité de 1,8% par jour à cause de la pollution causée par des installations septiques non conformes.

FonctExpo04

a) Construire un modèle mathématique qui décrit le nombre de truites n jours après l'ensemencement.

b) Combien reste-t-il de truites 24 jours après l'ensemencement ?

c) Esquisser le graphique de la fonction du nombre de truites vivantes sur une période de 72 jours.

Solution

a) **Identification des variables**

Les variables sont n, le nombre de jours écoulés depuis l'ensemencement et V, le nombre de truites vivantes.

Définition du lien entre les variables

Le phénomène est caractérisé par une décroissance exprimée en pourcentage par unité de temps, soit 1,8% par jour. On décrit donc le lien entre les variables par un modèle de la forme

$$V(n) = V_0\,(1 - r)^n$$

où le nombre initial de truites est $V_0 = 2\,000$ et $r = 0{,}018$. Ce modèle est

$$V(n) = 2\,000(1 - 0{,}018)^n = 2\,000\,(0{,}982)^n$$

où n est le temps exprimé en jours.

Utilisation du modèle

b) **Reformulation de la question**

Quelle est l'image de $n = 24$ par la fonction V ?

Calculs

$$V(24) = 2\,000\,(0{,}982)^{24} = 1\,293{,}319$$

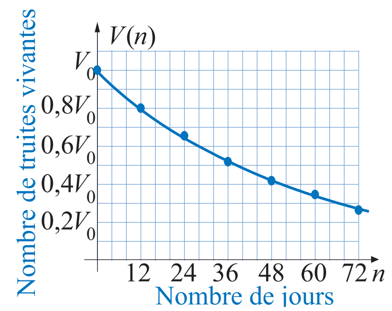
Rédaction de la réponse

Après 24 jours, il devrait y avoir environ 1 290 truites vivantes.

c) On connaît l'allure générale de la courbe mais, pour esquisser le graphique, il faut calculer quelques correspondances. Les valeurs obtenues et leur représentation sont données ci-contre.

Nombre $V(n)$

n jours	$V(n)$
0	V_0
12	$0{,}80\,V_0$
24	$0{,}65\,V_0$
36	$0{,}52\,V_0$
48	$0{,}42\,V_0$
60	$0{,}34\,V_0$
72	$0{,}27\,V_0$



Critère algébrique du modèle

Les phénomènes étudiés nous permettent également de définir un critère grâce auquel on peut confirmer l'existence d'un lien exponentiel à l'aide de données expérimentales. Dans la mise en situation, la croissance de capital a donné les relations suivantes

FonctExpo05

$$\begin{aligned} C(1) &= 1{,}06\ C(0),\\ C(2) &= 1{,}06\ C(1),\\ C(3) &= 1{,}06\ C(2),\\ &\ldots\\ C(n+1) &= 1{,}06\ C(n). \end{aligned}$$

Dans l'exemple de la dépréciation d'un équipement, on a obtenu :

$$\begin{aligned} V(1) &= 0{,}85\ V(0),\\ V(2) &= 0{,}85\ V(1),\\ V(3) &= 0{,}85\ V(2),\\ &\ldots\\ V(n+1) &= 0{,}85\ V(n). \end{aligned}$$

Ainsi, on peut décrire la caractéristique des modèles exponentiels par l'expression

$$f(x+1) = (1+r)f(x).$$

Si $r > 0$, le modèle décrit un phénomène de croissance et, si $r < 0$, il décrit un phénomène de décroissance. En général, lorsque le pas est p, la relation est exponentielle si

$$f(x+p) = (1+r)f(x).$$

On peut reformuler cette condition sous une forme plus simple à utiliser en divisant chaque membre de l'équation par $f(x)$ et on obtient alors :

$$\frac{f(x+p)}{f(x)} = 1+r.$$

REMARQUE
Le critère algébrique est un moyen rapide de vérifier l'existence de certains types de relations. Nous verrons au chapitre 5 qu'il ne constitue cependant pas le meilleur moyen de définir la relation.

CRITÈRE ALGÉBRIQUE

Reconnaissance d'un lien exponentiel

L'existence d'un lien exponentiel entre des données à pas constant est confirmée si le rapport des images consécutives est constant :

$$\frac{f(x+p)}{f(x)} = b^p.$$

Ce critère permet de vérifier rapidement si des données à pas constant peuvent être décrites par un modèle exponentiel. La marche à suivre est la suivante.

PROCÉDURE

Description de données à pas constant par un modèle exponentiel

1. Identifier les variables du problème et les représenter par des symboles appropriés, accompagnés des unités de mesure des variables.
2. Définir en compréhension la relation entre les variables en justifiant le choix du modèle.
   2.1. S'assurer que les données sont à pas constant (c'est-à-dire que les valeurs de la variable indépendante sont à intervalles réguliers).
   2.2. Calculer le rapport $\dfrac{f(x+p)}{f(x)}$ des valeurs consécutives de la variable dépendante et vérifier qu'il est relativement constant, ce qui confirme l'existence d'un lien exponentiel.
   2.3. Calculer la base $b = 1 \pm r$ du modèle en prenant la valeur moyenne des rapports.
   2.4. Écrire le modèle sous la forme $f(x) = a\,(1 \pm r)^x$ où a est l'image de 0 (ou la valeur initiale).
3. Utiliser le modèle pour résoudre le problème.
   3.1. Reformuler la question (ou les questions) en utilisant les variables du problème.
   3.2. Effectuer les calculs et les manipulations algébriques permettant de répondre à la question.
   3.3. Rédiger la réponse à la question posée.

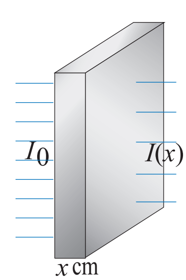
REMARQUE
Lorsqu'on utilise le critère algébrique, il faut bien remarquer qu'il faut faire le rapport entre une image et l'image précédente et non l'inverse.

EXEMPLE 6.1.3

On a soumis un matériau à des tests pour déterminer sa capacité d'absorption des rayons X. Pour ce faire, on a bombardé des plaques de différentes épaisseurs avec un faisceau de rayons X dont l'intensité est de 2,400 unités et on a mesuré l'intensité du faisceau de l'autre côté des plaques. Les mesures sont rassemblées dans le tableau donné ci-contre. L'industrie qui produit les plaques utilisées indique que la précision des épaisseurs est de l'ordre de 1×10^{-3} cm.

a) Construire un modèle mathématique qui décrit le phénomène.
b) À l'aide du modèle, calculer l'intensité du faisceau qui traverse une plaque de 2,6 cm du même matériau.

FonctExpo02-ADM



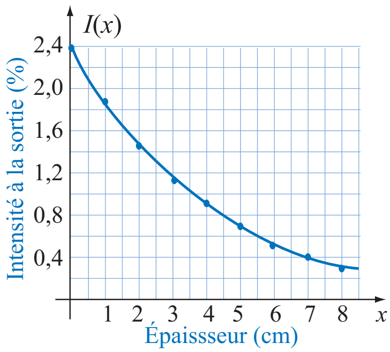
Intensité $I(x)$

x	$I(x)$
0	2,400
1	1,872
2	1,460
3	1,140
4	0,888
5	0,693
6	0,540
7	0,422
8	0,329

Solution

a) **Identification des variables**

La variable indépendante du problème est l'épaisseur x de la plaque et la variable dépendante est l'intensité I du faisceau de rayons X ayant traversé la plaque.



Rapport des images

x	$I(x)$	$\frac{I(x+p)}{I(x)}$
0	2,400	–
1	1,872	0,7800
2	1,460	0,7799
3	1,140	0,7808
4	0,888	0,7789
5	0,693	0,7804
6	0,540	0,7792
7	0,422	0,7815
8	0,329	0,7796

Définition de la relation entre les variables

La représentation graphique des données est une courbe décroissante et concave vers le haut. De plus, la correspondance est définie lorsque la variable indépendante est nulle et la valeur correspondante est non nulle. On peut donc poser l'hypothèse d'un lien exponentiel entre les variables.

Puisque les valeurs de la variable indépendante sont à intervalles constants, on peut confirmer l'existence d'un lien exponentiel en calculant le rapport des valeurs consécutives de la variable dépendante. Les résultats sont regroupés dans le tableau donné ci-contre.

On constate que les rapports sont relativement constants et que la moyenne est 0,7801. En utilisant cette valeur comme base de l'exponentielle et la valeur initiale 2,400, on obtient le modèle

$$I(x) = 2{,}400 \times (0{,}7801)^x.$$

Utilisation du modèle

b) **Reformulation de la question**

On doit déterminer l'image de 2,6 par le modèle.

Calculs

$$I(2{,}6) = 2{,}400 \times 0{,}7801^{2{,}6} = 1{,}2583...$$

Rédaction de la réponse

En tenant compte de la précision des données, on considère que l'intensité du faisceau ayant traversé une plaque de 2,6 cm d'épaisseur est de 1,258 unités.

EXEMPLE 6.1.4

FonctExpo06

Sachant qu'une population croît de façon exponentielle, construire un modèle décrivant la population d'une petite ville à l'aide des valeurs regroupées dans le tableau donné ci-contre.

a) Décrire algébriquement la correspondance entre les variables.

b) À l'aide du modèle, estimer la population en l'an 2030.

Population

Année	Milliers d'habitants
1960	15,0
1965	16,0
1970	17,5
1975	18,8
1980	20,3

■ ***Solution***

a) **Identification des variables**

La population ayant été dénombrée aux cinq ans, on prend comme variable indépendante le nombre n de périodes de cinq années écoulées depuis 1960. La variable dépendante est la population P en milliers d'habitants.

Définition de la relation entre les variables

L'énoncé du problème indique que le modèle est exponentiel. Pour déterminer la base du lien exponentiel, on calcule le rapport des valeurs consécutives. Les résultats sont rassemblés dans le tableau donné ci-contre. La moyenne des rapports est 1,0786. Si on utilise cette valeur comme base du modèle exponentiel, la description algébrique est :

$$P(n) = P_0\,(1{,}078\,6)^n = 15{,}0 \times (1{,}078\,6)^n.$$

Rapport des images

n	P	$\frac{P(n+p)}{P(n)}$
0	15,0	–
1	16,0	1,0667
2	17,5	1,0938
3	18,8	1,0743
4	20,3	1,0798

b) **Utilisation du modèle**

Reformulation de la question et calculs

En l'an 2030, il se sera écoulé 14 périodes de cinq ans depuis 1960. On cherche donc la valeur de P pour $n = 14$

$$P(14) = 15{,}0 \times (1{,}0786)^{14} = 43{,}265...$$

Rédaction de la réponse

On estime donc la population en 2030 à environ 43 000 habitants.

On peut exprimer le modèle exponentiel de manière que la variable indépendante soit le nombre d'années. Pour ce faire, on détermine une base a telle que $a^5 = 1{,}0786$.

En résolvant cette équation, on obtient

$$a = (1{,}0786)^{1/5} = 1{,}015\,24...$$

Le modèle est donc

$$P(t) = 15{,}0 \times (1 + 0{,}078\,6)^{t/5} = 15{,}0 \times (1{,}015\,24)^t$$

où t est le temps en années.

Calcul de la valeur initiale

EXEMPLE 6.1.5

Un agent prétend que, grâce à la flambée des prix dans l'immobilier, on peut tripler un capital tous les cinq ans. Si cette affirmation est exacte, combien faut-il investir pour accumuler 1 200 000 $ en vingt ans ?

■ *Solution*

a) **Identification des variables**

La variable indépendante est t, la durée du placement, et la variable dépendante est C, le capital accumulé.

Définition du lien entre les variables

Le phénomène est caractérisé par une croissance exprimée sous la forme d'un taux dont le numérateur n'a pas d'unités. Comme le montant investi triple tous les cinq ans, on peut décrire le lien entre les variables par un modèle de la forme

$$C(t) = C_0\, b^t.$$

On sait que $b = 3^{1/5}$, donc,

$$C(t) = C_0(3^{1/5})^t.$$

On peut également écrire cette relation sous la forme :

$$C(t) = C_0\, 3^{t/5}.$$

où t est le temps exprimé en années.

Utilisation du modèle

b) **Reformulation de la question**

Calculer la valeur C_0 pour laquelle $C = C_0\, 3^{t/5} = 1{,}2 \times 10^6$ si $t = 20$.

Calculs

En posant $t = 20$, on a $C_0\, 3^{20/5} = 1{,}2 \times 10^6$ donc $C_0\, 3^4 = 1{,}2 \times 10^6$.
En isolant C_0 dans cette équation, on obtient

$$C_0 = \frac{1{,}2 \times 10^6}{3^4} = 14814{,}81\ldots$$

Rédaction de la réponse

Il faut investir environ 15 000 $ pour accumuler 1 200 000 $ en 20 ans.

Calcul du taux

EXEMPLE 6.1.6

À quel taux faut-il placer un montant de 4 500 $ pour accumuler 9 000 $ en 8 ans si les intérêts sont capitalisés annuellement ?

■ ***Solution***

Identification des variables

La variable indépendante est i, le taux d'intérêt, et la variable dépendante est C, le capital accumulé.

Définition du lien entre les variables

Le phénomène est caractérisé par une croissance exprimée sous la forme d'un pourcentage par unité de temps. On peut donc décrire le lien entre les variables par un modèle de la forme

$$C = C_0(1 + i)^8.$$

Puisque $C_0 = 4\,500$, alors $C = 4\,500(1 + i)^8$.

Utilisation du modèle

Reformulation de la question

On cherche le taux i pour lequel $C = 9\,000$. On cherche donc i tel que :

$$4\,500(1 + i)^8 = 9\,000.$$

Calculs

En divisant chaque membre de la dernière équation par 4 500, on obtient

$$(1 + i)^8 = 2$$

et, en extrayant la racine huitième, on a $1 + i = \pm\, 1{,}090\,5$.

Puisque i est un taux d'intérêt, la valeur négative est à rejeter et on retient :

$$1 + i = 1{,}090\,5;\ \text{donc}\ \ i = 0{,}0905.$$

Rédaction de la réponse

Pour doubler le capital en 8 ans, il faut le placer à un taux de 9,05 %, les intérêts étant capitalisés annuellement.

6.2 Exercices

1. Construire le modèle exponentiel donnant la valeur d'un capital de 7 500 $ placé à 6,5 % les intérêts capitalisés annuellement.
   a) Quelle est la valeur du capital après 5 ans?
   b) Esquisser le graphique du modèle ($0 \le n \le 10$).

2. Une automobile se déprécie de 15 % par année.
   a) Trouver le modèle mathématique décrivant la valeur de l'automobile en fonction du temps n.
   b) Esquisser le graphique de ce modèle ($0 \le n \le 10$).
   c) Si la valeur initiale de la voiture était de 10 000 $, combien vaudra-t-elle 8 ans après l'achat ? 10 ans après l'achat ?

3. Une compagnie renouvelle sa machinerie au coût de 300 000 $. Ce type de machines se déprécie au taux de 1,7 % par mois.
   a) Trouver la règle de correspondance donnant la valeur de la machinerie en fonction du temps.
   b) Calculer la valeur de la machinerie deux ans après l'achat, trois ans après l'achat, cinq ans après l'achat.
   c) Représenter graphiquement le modèle.

4. Un sel radioactif se désintègre de telle sorte qu'à la fin de chaque année il reste les 49/50 de la quantité présente en début d'année.
   a) Construire un modèle mathématique donnant la quantité restante de sel après t années si la quantité initiale est Q_0.
   b) Représenter graphiquement le modèle.
   c) Sachant que la quantité initiale est $Q_0 = 100$ unités, calculer la quantité restante après cinq ans, après dix ans.

5. Le radium A se désintègre à une vitesse telle qu'à la fin de chaque minute il ne reste que les 8/10 de la quantité initiale.
   a) Établir un modèle décrivant la quantité de radium en fonction du temps t, mesuré en minutes.
   b) Esquisser le graphique de la fonction.

6. Au cours d'une panne d'électricité à la mi-janvier, vous avez noté la température à l'intérieur de la maison à chaque heure à partir du début de la panne et vous avez obtenu les valeurs du tableau donné ci-contre.

Température	
Durée (h)	T (°C)
1	19
2	16
3	14
4	12
5	10
6	9

   a) Sachant que la température intérieure est normalement maintenue à 22 °C, construire un modèle mathématique décrivant la correspondance entre les variables en cause.
   b) Représenter graphiquement la fonction.
   c) Quel est le pourcentage de perte par unité de la variable indépendante?
   d) Quelle devrait être la température après dix heures de panne?

7. L'ancien comptable d'une compagnie avait effectué un placement au nom de celle-ci. Vous ne trouvez dans le dossier que deux relevés de ce placement. L'un d'eux est daté de 1977 et indique 35 000 $ comme valeur acquise par le placement. L'autre relevé, daté de 1982, indique 56 800 $ comme valeur du placement.
   a) Déterminer le modèle mathématique décrivant la valeur du placement en fonction du nombre d'années.
   b) Quelle était la valeur du placement en 1994 ?

8. Le maire de la municipalité qui vous emploie vous demande de faire une étude sur la croissance de la population de façon à prévoir les services qu'il faudra offrir pour assurer le développement harmonieux de la municipalité. Vous trouvez dans les registres municipaux les résultats de quatre recensements effectués à des intervalles de quatre ans.

Population	
Année	Milliers d'habitants
1992	27
1996	29
2000	32
2004	35

   a) Établir un modèle décrivant la population n périodes de quatre ans après 1992.
   b) Exprimer le modèle en fonction du temps t, en années depuis 1992.
   c) Par mesure de précaution, vérifier la concordance des résultats statistiques et des valeurs fournies par le modèle.
   d) Quelle est la population en l'an 2020 ?

6.3 Logarithmes

Les logarithmes constituent un outil indispensable pour la résolution des équations exponentielles, où l'inconnue est en exposant. Dans la présente section, nous abordons la notion de logarithme et nous l'appliquons à la résolution d'équations exponentielles.

Logarithme_01

REMARQUE
Le problème consiste à déterminer le temps nécessaire pour doubler le capital. Sa valeur est indépendante du capital initial : elle dépend seulement du taux d'intérêt.

Dans le cas de phénomènes descriptibles par un modèle exponentiel croissant, le temps nécessaire pour doubler une grandeur est une donnée physique intéressante. Le temps de dédoublement d'une population de bactéries en est un exemple.

Dans le cas de phénomènes descriptibles par un modèle exponentiel décroissant, le temps nécessaire pour réduire de moitié la quantité initiale est également une donnée physique intéressante. Le cas de demi-réaction d'une réaction chimique et la demi-vie d'un élément radioactif en sont des exemples.

Dans le cas d'une loterie dont le retour au consommateur est de 89% (une perte de 11% à chaque fois), on peut également calculer le nombre de fois qu'un consommateur doit jouer pour dilapider la moitié de sa fortune. Même s'il lui arrive de gagner, ses pertes seront à long terme supérieures à ses gains.

Équation exponentielle

Dans la mise en situation en début de chapitre, nous avons vu que si on place un capital de 10 000 \$ à un taux d'intérêt de 6 %, les intérêts étant capitalisés annuellement, le capital accumulé au cours des années peut être décrit par le modèle exponentiel

$$C(n) = 10\,000\,(1{,}06)^n.$$

Si on désire savoir combien de temps on doit placer le capital pour doubler sa valeur, on cherche n tel que

$$10\,000\,(1{,}06)^n = 20\,000.$$

En divisant chaque membre de l'équation par 10 000, on obtient

$$(1{,}06)^n = 2.$$

Une équation de cette forme est une **équation exponentielle** et, pour la résoudre, il faut déterminer la valeur de l'exposant n. Les procédures de résolution fondées sur les propriétés de l'égalité et utilisées jusqu'à maintenant ne sont d'aucune utilité. Il faut élaborer un outil adapté à la résolution de ce type d'équations, soit les **logarithmes**.

Équation exponentielle

Une **équation exponentielle** est une équation comportant une seule inconnue qui se trouve en exposant. La forme la plus simple d'une telle équation est la forme :

$$b^x = N,$$

où $b > 0$ et $b \neq 1$. Dans cette équation, x est une **inconnue**, N et b sont des nombres réels positifs et b est la **base de l'exponentielle.**

REMARQUE
Pour résoudre une équation dont l'inconnue est en exposant, il faut la ramener sous sa forme la plus simple.

Pour résoudre une équation exponentielle de la forme $b^x = N$, il faut déterminer à quel exposant on doit élever la base b pour obtenir le nombre N. Ainsi, l'équation

$$2^x = 32$$

est une équation exponentielle et, pour la résoudre on doit déterminer à quel exposant il faut élever 2 pour obtenir 32. Dans ce cas, on peut exprimer le membre de droite de l'équation en base 2,

$$2^x = 2^5$$

Les deux membres de l'équation étant exprimés dans une même base, les exposants sont nécessairement égaux : on en conclut que $x = 5$.

La résolution d'une équation exponentielle n'est pas toujours aussi simple. Cependant, il faut toujours pouvoir exprimer un nombre donné dans une base donnée, élevée à un exposant qui est un nombre réel. Cet exposant est appelé **logarithme**.

Logarithme en base *b* d'un nombre *N*

Soit b et N, deux nombres réels positifs et $b \neq 1$. Il existe un et un seul nombre réel n tel que $b^n = N$. L'exposant n est appelé **logarithme de base *b* du nombre** N, ce qui s'écrit

$$n = \log_b N.$$

REMARQUE

Le logarithme est un exposant. C'est l'exposant qu'il faut donner à la base b pour obtenir le nombre N. Cette formulation est très importante pour la compréhension des logarithmes et de leurs propriétés.

EXEMPLE 6.3.1

Déterminer le logarithme de base 3 de 81.

Solution

On cherche $\log_3 81$, c'est-à-dire l'exposant auquel il faut élever le nombre 3 pour obtenir 81. On doit donc résoudre l'équation exponentielle

$$3^x = 81.$$

En exprimant 81 en base 3, on obtient

$$3^x = 3^4.$$

Ainsi $x = 4$ et le logarithme de base 3 de 81 est 4,

$$\log_3 81 = 4.$$

Bases de calcul

Pour pouvoir effectuer des calculs logarithmiques, on doit connaître les logarithmes d'une base donnée. La calculatrice se révèle alors un outil précieux. Même si, théoriquement, tout nombre positif et différent de 1 peut servir de base d'un système de logarithmes, en pratique on utilise seulement deux bases pour effectuer des calculs logarithmiques : la base 10 et la base $e = 2{,}718\,28...$ Les calculatrices scientifiques effectuent directement les calculs dans ces bases.

Logarithme_02

Pour simplifier l'écriture, on note $\log N$ le logarithme en base 10 d'un nombre N, et $\ln N$ le logarithme en base e d'un nombre N. Ainsi, $\log 3$ désigne le logarithme de base 10 du nombre 3, c'est-à-dire l'exposant auquel il faut élever 10 pour obtenir 3, et $\ln 3$ est le logarithme de base e du nombre 3.

EXEMPLE 6.3.2

Exprimer le nombre 2,8 en base 10.

Solution

Si on veut exprimer 2,8 en base 10, on doit déterminer l'exposant auquel il faut élever 10 pour obtenir 2,8. On cherche un nombre x tel que

$$10^x = 2{,}8.$$

La définition de logarithme permet d'écrire cette équation sous forme logarithmique. L'exposant à déterminer étant le logarithme en base 10 de 2,8, on cherche x tel que

$$x = \log 2{,}8.$$

On résout cette équation à l'aide d'une calculatrice

$$x = \log 2{,}8 = 0{,}447\,158...$$

On peut maintenant exprimer 2,8 en base 10

$$2{,}8 = 10^{0{,}447\,158...}.$$

EXEMPLE 6.3.3

Logarithme_03

Exprimer le nombre 7,3 en base e.

■ ***Solution***

Pour exprimer 7,3 en base e, on cherche l'exposant auquel il faut élever e pour obtenir 7,3, c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle $e^x = 7{,}3$. On a

$e^x = 7{,}3 \Leftrightarrow x = \ln 7{,}3$, forme logarithmique de l'équation.

$\Leftrightarrow x = 1{,}987\,87...$ valeur obtenue par la calculatrice.

$\Leftrightarrow e^{1{,}98787...} = 7{,}3$, l'équation sous forme exponentielle

En exprimant 7,3 en base e, on obtient $e^{1{,}987\,87...} = 7{,}3$.

EXEMPLE 6.3.4

Soit N, un nombre réel tel que $\log_b N = 3$, calculer $\log_b N^2$.

■ ***Solution***

Par hypothèse, $\log_b N = 3$. On a

$\log_b N = 3 \Leftrightarrow N = b^3$, l'équation sous forme exponentielle.

$\Leftrightarrow N^2 = (b^3)^2$, en élevant chaque membre au carré.

$\Leftrightarrow N^2 = b^6$, en appliquant les règles des exposants.

$\Leftrightarrow \log_b N^2 = 6$, l'équation sous forme logarithmique.

On obtient $\log_b N^2 = 6$.

Propriétés des logarithmes

On peut généraliser le résultat de l'exemple précédent de la façon suivante. Considérons un nombre N dont le logarithme en base b est n. On a alors :

$\log_b N = n \Leftrightarrow N = b^n$	On exprime l'équation sous forme exponentielle.
$\Leftrightarrow N^p = (b^n)^p = b^{np}$	On élevant chaque membre à l'exposant p.
$\Leftrightarrow N^p = b^{pn}$	On applique la commutativité de la multiplication.
$\Leftrightarrow \log_b N^p = pn,$	On exprime l'équation sous forme logarithmique.

On obtient donc la propriété suivante $\log_b N^p = p \log_b \mathrm{N}$, que nous considérons comme un théorème.

THÉORÈME

Logarithme d'une expression algébrique affectée d'un exposant

Si N est un nombre réel (ou une expression algébrique) tel que $\log_b N = n$, alors $\log_b N^p = pn$, c'est-à-dire

$$\log_b N^p = p \log_b N .$$

Lorsque l'inconnue d'une équation est en exposant, on obtient une seconde équation en prenant le logarithme de chaque membres de l'équation initiale. Les propriétés des logarithmes et de l'égalité permettent de transformer la nouvelle équation de manière à isoler la variable.

EXEMPLE 6.3.5

Résoudre l'équation exponentielle

$$3^x = 24.$$

Solution

Pour résoudre l'équation, il faut choisir une base de calcul. En utilisant la base 10, on a

$$\begin{aligned} 3^x = 24 \quad &\Leftrightarrow \log 3^x = \log 24 \\ &\Leftrightarrow x \log 3 = \log 24 \quad \text{Puisque } \log_b N^p = p \log_b N. \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\log 24}{\log 3} \quad \text{On divise chaque membre par } \log 3. \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\log 24}{\log 3} = \frac{1{,}380\ 2...}{0{,}477\ 1...} = 2{,}892\ 7... \end{aligned}$$

Logarithme_04

REMARQUE

On parvient au même résultat en utilisant la base e. En prenant le logarithme de base e de chaque membre de l'équation exponentielle,

$$\ln 3^x = \ln 24, \text{ d'où } x \ln 3 = \ln 24.$$

En divisant chaque membre de la dernière équation par $\ln 3$, on obtient :

$$x = \frac{\ln 24}{\ln 3} = \frac{3{,}178\ 0...}{1{,}098\ 6...} = 2{,}892\ 7...$$

En généralisant la démarche de résolution employée dans le dernier exemple, on démontre la **propriété de changement de base** afin de l'utiliser directement dans nos calculs.

Soit n tel que $a^n = N$. Par définition du logarithme,

$$a^n = N \Leftrightarrow n = \log_a N.$$

De plus,

$$\begin{aligned} a^n = N &\Leftrightarrow \log_b a^n = \log_b N \quad \text{On prend le logarithme en base } b. \\ &\Leftrightarrow n \log_b a = \log_b N \quad \text{En vertu de la propriété } \log_b N^p = p \log_b N. \\ &\Leftrightarrow n = \frac{\log_b N}{\log_b a} \quad \text{On isole } n \text{ dans l'équation.} \\ &\Leftrightarrow \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \quad \text{Puisque } n = \log_a N. \end{aligned}$$

Cette généralisation démontre le théorème suivant.

Logarithme_04

REMARQUE
Le changement de base permet d'écrire l'expression logarithmique dans l'une ou l'autre des bases usuelles lorsqu'on doit calculer la valeur de la variable indépendante.

THÉORÈME

Changement de base

Soit a et b, deux nombres réels positifs et différents de 1, et N, un nombre réel positif (ou une expression algébrique), alors

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

EXEMPLE 6.3.6

On place un montant de 5 000 $ à un taux d'intérêt de 9 %, les intérêts étant capitalisés annuellement. Déterminer le temps requis pour doubler le capital.

Solution

Le modèle est $C(n) = 5\,000\,(1{,}09)^n$. Le temps nécessaire pour doubler le capital est le temps n pour lequel

$$5\,000\,(1{,}09)^n = 10\,000.$$

En divisant chaque membre de l'équation par 5 000,

$$(1{,}09)^n = 2, \text{ donc } n = \log_{1{,}09} 2 = \frac{\log 2}{\log 1{,}09} = 8{,}04.$$

À ce taux, le capital aura doublé dans huit ans.

PROPRIÉTÉS

Exposants et logarithmes

Pour tout m, n et $p \in \mathbb{N}$ et pour tout b et $a \in \mathbb{R}$ tel que :
$M = b^m$ et $N = b^n$, alors

Logarithme_015

Propriétés des exposants	Équivalent logarithmique
$MN = b^m b^n = b^{m+n}$	$\log_b MN = m + n = \log_b M + \log_b N$
$\dfrac{M}{N} = \dfrac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$	$\log_b \dfrac{M}{N} = m - n = \log_b M - \log_b N$
$N^p = (b^n)^p = b^{np} = b^{pn}$	$\log_b N^p = pn = p \log_b N$
$b^0 = 1$	$\log_b 1 = 0$
$b^1 = b$	$\log_b b = 1$

REMARQUE
L'équation exponentielle $N = b^x$ est équivalente à l'équation logarithmique

$$x = \log_b N,$$

Autrement dit,

$$N = b^x \text{ si et seulement si } x = \log_b N.$$

Cette équivalence sert à exprimer une équation exponentielle sous forme logarithmique, et inversement.

Équation logarithmique

Une **équation logarithmique** est une équation qui comporte le logarithme d'une inconnue. Pour résoudre une telle équation, on se sert de l'équivalence

$$\log_b N = n \quad \text{si et seulement si } b^n = N.$$

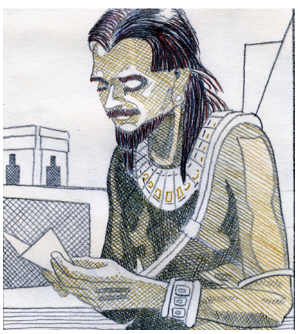
Un peu *d'histoire*

SYSTÈME DE NUMÉRATION INDO-ARABE

Aryabatha,

476-550

Le système décimal que nous utilisons a été développé initialement en Inde. Le mathématicien Aryabatha, premier grand mathématicien de l'Inde, utilise ce système dans un ouvrage rédigé en sanscrit, la langue des brahmanes, et intitulé *Aryabhatiya.* Dans cet ouvrage, il affirme la rotation de la Terre, contrairement à la théorie développée par Ptolémée à partir des enseignements d'Aristote. Aryabatha développe également des algorithmes d'extraction de racines carrées et de racine cubiques et résout des équations diophantiennes.



Brahmagupta

598-660

La première description de l'utilisation du zéro a été faite par le mathématicien Indien Brahmagupta (NH Bramagupta) en ayant recours aux notions de gain et de dette. C'est dans un ouvrage intitulé *Brahma Shupta Siddhanta*, datant de 628, qu'il présente cette définition et son ouvrage a permis la diffusion et l'implantation de ce symbole ainsi que des nombres négatifs dans les calculs commerciaux. L'apparition de ce symbole constitue un développement majeur dans les systèmes de numération et un pas important vers le développement de l'algèbre.

Al-Khawarizmi

780-850

Durant le règne d'Al-Mansur à Bagdad, les textes de Brahmagupta sont traduits en arabe. Le système est repris par les mathématiciens arabes, en particulier Al-Khawarizmi (NH Al-Khawarizmi) dont l'ouvrage *Kitâb al jami wa'l tafriq bi hisab al hind* (*Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*). La notoriété de cet auteur vient beaucoup de son ouvrage *Kitab Al jabr w'al mouqabala* qui contient ses travaux en algèbre.

Le livre d'Al-Khawarizmi sur le calcul des indiens a été traduit en latin par Gerbert d'Aurillac (938-1003), mais ce livre ne fut pas très diffusé et il fut l'objet d'une forte opposition. L'incompréhension du système entretenait chez les marchands la crainte d'être lésé dans les échanges. De plus, tout ce qui venait du monde musulman était suspect dans le monde chrétien.

En Europe, le système décimal était alors confiné à la partie de l'Espagne qui avait été conquise par les Arabes.

Pour implanter ce système de numération en Europe, il fallait démontrer aux marchands que la manipulation des nombres dans ce système était beaucoup plus simple que dans le système romain. Dans le *Liber Abaci* (Livre des calculs), le mathématicien Léonard de Pise, surnommé Fibonacci (NH Fibonacci01) s'est attaqué à cette tâche. Initié au calcul indo-arabe dès son jeune âge, il a voulu montrer à quel point l'utilisation de ce système facilitait le commerce tant local qu'international, les échanges commerciaux avec les pays musulmans devenant de plus en plus importants.

Fibonacci

780-850

Une profession nouvelle s'est alors implantée en Italie, celle de spécialiste du calcul indo-arabe. Ces spécialistes étaient à la fois professeurs et consultants pour tout problème nécessitant des calculs. Fibonacci fut le premier de ces spécialistes et parmi ses successeurs, on compte Jérôme Cardan (NH Cardan01) et Niccolo Tartaglia (NH Tartaglia01) qui ont joué un rôle majeur dans la résolution des équations du troisième degré.

Jérôme Cardan

1501-1576

Le système décimal s'est graduellement implanté dans les autres pays européens grâce à des mathématiciens comme François Viète (NH Viète) en France et Simon Stevin (NH Stevin01) aux Pays-Bas. À partir du XIV^{e} siècle, les traités d'arithmétique commerciale se sont répandus rapidement avec l'invention de l'imprimerie par Gutenberg (Johannes, 1400-1468). Les derniers vétos ecclésiastiques sur l'utilisation du système indo-arabe ont été levés au XV^{e} siècle.

Numération05

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

Logarithme_06

REMARQUE
Pour utiliser l'équivalence qui permet d'écrire une équation logarithmique sous forme exponentielle, il faut que l'équation ne comporte qu'une seule expression logarithmique. L'équivalence ne s'applique donc pas à une somme ou une différence d'expressions logarithmiques. Il faut parfois employer les propriétés des logarithmes pour regrouper les termes, ce qui peut avoir pour effet d'introduire des solutions étrangères. Il faut donc, après avoir résolu l'équation, vérifier si les valeurs obtenues sont bien des solutions de l'équation de départ.

REMARQUE
L'**intégrité des nombres réels** signifie que le produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

EXEMPLE 6.3.7

Trouver un nombre x tel que $\log_2(x-2)+\log_2(x+6)=7$.

Solution

En vertu de la propriété $\log_b M+\log_b N=\log_b MN$, on peut écrire

$$\log_2[(x-2)(x+6)]=7$$

et selon l'équivalence $\log_b N=n$ si et seulement si $b^n=N$, on a

$$(x-2)(x+6)=2^7$$
$$x^2+4x-12=128$$
$$x^2+4x-140=0.$$

En décomposant le trinôme en facteurs, on obtient

$$(x+14)(x-10)=0.$$

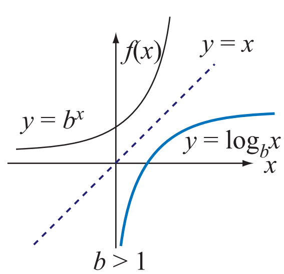
En vertu de l'intégrité des nombres réels, ce produit s'annule si $x=-14$ ou $x=10$. En substituant -14 à x dans l'équation initiale, on a

$$\log_2(-16)+\log_2(-8)=7.$$

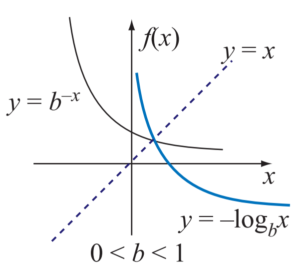
Or, le logarithme d'un nombre négatif n'est pas défini de sorte que -14 n'est pas une solution. En substituant 10 à x dans l'équation initiale, on obtient

$$\log_2(8)+\log_2(16)=7.$$

Or, $\log_2(8)=3$ et $\log_2(16)=4$. Ainsi, l'égalité est vérifiée et 10 est la solution recherchée.



Fonction inverse de $y=b^x$



Fonction inverse de $y=b^{-x}$

Relations_05

FonctionLog_01

Fonction logarithmique

On obtient la fonction inverse d'une fonction exponentielle de la forme $f(x)=b^x$ en isolant la variable indépendante. Puisque $f(x)$ représente la valeur de la variable dépendante y, on a

$$y=b^x.$$

Par définition, $x=\log_b y$. En interchangeant les symboles des variables, on obtient $y=\log_b x$. Ainsi, la fonction inverse de $f(x)=b^x$ est

$$f(x)=\log_b x.$$

Pour tracer le graphique de la fonction inverse, on applique la propriété de symétrie par rapport à la droite d'équation $y=x$.

La fonction logarithmique de base 10 est simplement notée

$$f(x)=\log x$$

et la fonction logarithmique de base e est notée $f(x)=\ln x$.

Fonction logarithmique

Soit b, un nombre réel tel que $b>0$ et $b\neq 1$. On appelle **fonction logarithmique de base** b toute fonction définie par une équation de la forme :

$$f(x)=a\log_b x+c,$$

où b est la **base** de la fonction logarithmique, et a et c sont des constantes.

EXEMPLE 6.3.8

Une entreprise fabrique des plaques dans un matériau dont le coefficient d'absorption des rayons X est de 2, c'est-à-dire que

$$I(x) = I_0\, e^{-2x}$$

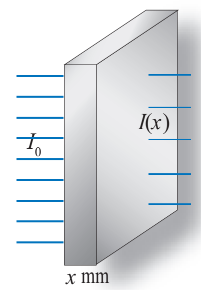
où l'épaisseur x est mesuré en millimètres.

a) On désire mesurer avec précision l'épaisseur des plaques en se servant de rayons X. Déterminer la fonction permettant de calculer l'épaisseur d'une plaque quand on connaît l'intensité du faisceau de rayons X ayant traversé la plaque.

b) Si l'intensité du faisceau incident est de 10 unités, quelle est l'épaisseur d'une plaque qui laisse filtrer un faisceau de 3 unités.

c) Construire un tableau de valeurs permettant de déterminer l'épaisseur d'une plaque en fonction de l'intensité du faisceau de rayons X à la sortie, en supposant toujours que $I_0 = 10$.

FonctionLog_02



Solution

a) On obtient la fonction recherchée en isolant x dans $I = I_0\, e^{-2x}$. En prenant le logarithme de chaque membre de l'équation, on a :

$\ln I = \ln I_0\, e^{-2x}$

$\ln I = \ln I_0 + \ln e^{-2x}$ Propriété du logarithme d'un produit.

$\ln I = \ln I_0 - 2x$ Définition de logarithme.

$2x = \ln I_0 - \ln I$

$x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{I_0}{I}\right)$ Propriété du logarithme d'un quotient.

La fonction recherchée est donc $x(I) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{I_0}{I}\right)$.

b) L'intensité du faisceau incident étant de 10 unités, l'épaisseur d'une plaque qui laisse filtrer un faisceau de 3 unités est

$$x(3) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{10}{3}\right) = 0{,}60 \text{ mm.}$$

c) Un tableau de valeurs correspondantes est donné ci-contre.

Absorption de rayons X

Intensité à la sortie	Épaisseur en millimètres
10	0
9	0,05
8	0,11
7	0,18
6	0,26
5	0,35
4	0,46
3	0,60
2	0,80
1	1,15

Paramètres d'une fonction exponentielle

Lorsqu'on sait qu'une situation est descriptible par une fonction exponentielle, mais que l'on ne connaît pas les paramètres, il faut les calculer en se servant de la forme du modèle et des données du problème. Les paramètres d'une fonction exponentielle de la forme $f(x) = ab^x$ sont a, l'image de 0 (soit la valeur initiale lorsque la variable indépendante est le temps), et la base b de la fonction. Ainsi, on peut représenter un phénomène démographique par :

$$P(n) = P_0(1 + i)^n.$$

La valeur initiale est alors la population initiale et la base est $b = 1 + r$. Les paramètres à déterminer pour obtenir la fonction sont donc la population initiale P_0 et le taux d'augmentation ou de diminution r.

EXEMPLE 6.3.9

La municipalité de banlieue pour laquelle vous travaillez est en pleine expansion. La population, qui est actuellement de 17 500 personnes a un taux de croissance de 5,2 % par année.

a) Le service d'urbanisme de la municipalité doit prévoir la population au cours des cinq prochaines années. Quelle fonction permet ces prévisions et quelle sera la population dans cinq ans? Exprimer la fonction en base e.

b) Durant la présentation des résultats de l'étude, l'économiste de la municipalité a contesté les conclusions en alléguant que le ralentissement économique influera sur l'expansion de la municipalité. Il prétend que le taux de croissance annuel sera plutôt de 2,4 % par année au cours des cinq prochaines années. Si on tient compte de cette information, quelle fonction décrit la population pour les prochaines années et quelle sera la population dans cinq ans?

Solution

a) Soit P la population de la municipalité. La fonction recherchée est de la forme :

$$P(t) = P_0\,(1{,}052)^t$$

où t est le nombre d'années et P_0 est la population initiale. On a

$$P(t) = 17\,500\,(1{,}052)^t$$

et

$$P(5) = 17\,500\,(1{,}052)^5 = 22\,548.$$

Puisque $1{,}052 = e^{\ln 1{,}052} = e^{0{,}050\,693}$, on peut écrire :

$$P(t) = 17\,500\,e^{0{,}050\,7t}$$

b) Dans ces conditions, la fonction est :

$$P(t) = 17\,500\,(1{,}024)^t = 17\,500\,e^{0{,}023\,7t}$$

et

$$P(5) = 17\,500\,e^{0{,}023\,7 \times 5} \approx 19\,702.$$

Décibel

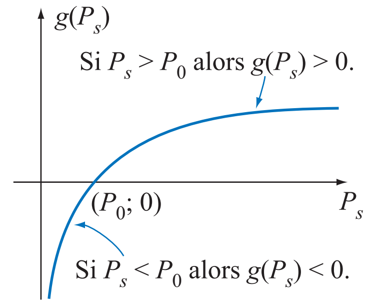
On a réalisé de nombreuses recherches pour tenter de déterminer les effets de la variation et de l'intensité d'un stimulus sonore sur les sens. On a constaté que si l'on double l'intensité d'un son, par exemple, le son perçu ne double pas, c'est-à-dire que la réponse n'est pas proportionnelle au stimulus. On s'est en fait rendu compte que la sensation acoustique est approximativement proportionnelle au logarithme de l'intensité du son. Il a donc fallu déterminer une unité de mesure de l'intensité des sons basée sur le logarithme. On a d'abord choisi le « bel », ainsi nommé en l'honneur de Graham Bell, mais cette unité est trop petite et, dans la majorité des cas, le nombre de bels est un nombre fractionnaire. C'est pourquoi on utilise plutôt le « décibel ».

Le décibel sert également à mesurer le rapport entre la puissance à l'entrée et la puissance à la sortie d'une composante électronique. Ce rapport, appelé **gain** est défini par

$$g(P_s) = 10 \log (P_s/P_0) \text{ décibels,}$$

où P_s est la puissance à la sortie, P_0 la puissance à l'entrée ou puissance initiale (c'est la puissance servant de référence) et log le logarithme de base 10.

La représentation graphique de la fonction g permet de voir certaines caractéristiques du gain. Si la puissance à la sortie est plus grande que la puissance à l'entrée, le gain est positif; dans le cas contraire le gain est négatif. Le graphique d'un gain en décibels est généralement tracé dans un repère dont l'un des axes est gradué à l'aide d'une échelle logarithmique.



EXEMPLE 6.3.10

Une puissance de 5 mW est nécessaire pour alimenter un amplificateur dont la puissance à la sortie est de 40 mW.

a) Quel est le gain exprimé en décibels ?

b) Quel serait le gain si la puissance à la sortie était de 20 mW ?

■ ***Solution***

a) La puissance à l'entrée est $P_0 = 5$ mW et la puissance à la sortie est $P_s = 40$ mW. Par conséquent, la fonction est :

$$g(P_s) = 10 \log(P_s/5).$$

Donc

$$g(40) = 10 \log (40/5) = 10 \log 8 = 10 \times 0{,}903 = 9{,}03 \text{ dB}.$$

b) $g(20) = 10 \log (20/5) = 10 \log 4 = 10 \times 0{,}602 = 6{,}02$ dB.

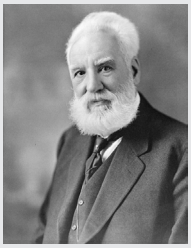
REMARQUE

Il est important de préciser que le décibel n'est pas une quantité absolue. Il représente essentiellement une variation de la puissance relativement à une puissance de référence. Si on modifie la puissance de référence, le nombre de décibels change aussi. Donner la puissance à la sortie en nombre de décibels n'a aucun sens si on ne précise pas la puissance à l'entrée. Il y a des puissances de référence standard dans l'industrie. La puissance de référence pour l'oreille humaine est 10^{-16} W.

Un peu *d'histoire*

ALEXANDER GRAHAM BELL

1847-1922



Alexander Graham Bell naquit à Édimbourgh, en Écosse, et étudia aux universités d'Édimbourg et de Londres. Il était le fils d'un éducateur écossais, Alexander Melville Bell qui créa un langage pour les sourds-muets, appelé « parole visible », dans lequel on utilise les lèvres, la langue et la gorge pour l'articulation du son. D'abord attiré par la musique, Bell s'en détourna, probablement touché par les problèmes de surdité dont souffrait sa mère, pour s'initier à la phonétique, suivant ainsi les traces de son père. Après ses études à Londres, il s'établit au Canada en 1870, puis aux États-Unis d'Amérique un an plus tard, où il fonda en 1872 une école pour malentendants, qui fut par la suite rattachée à l'université de Boston. Il y enseigna avec succès la méthode élaborée par son père.

À la même époque, il entreprit des travaux qui devaient le mener à l'invention du téléphone. Dès 1874, il avait acquis la conviction qu'il est possible de transformer les ondes sonores en impulsions électriques. Avec l'aide de son assistant, Thomas Watson, il y parvint en 1876. Lors des tests effectués en laboratoire, la première phrase, en anglais, transmise par téléphone fut « Watson, venez ici, j'ai besoin de vous !», À croire qu'il s'agissait de Sherlock Holmes !

L'invention connut rapidement un succès retentissant qui aboutit, en 1877, à la création de la compagnie de téléphone Bell.

La fortune aidant, Bell se tourna alors vers d'autres champs d'expérimentation, jetant les bases du gramophone et s'intéressant à l'aviation et aux transports nautiques. Il participa, avec son beau-père à la création de la « National Geographic Society », dont il fut le président de 1897 à 1903.

6.4 Exercices

1. Trouver le logarithme en base 2 du nombre 64.

2. Trouver le logarithme en base 0,5 du nombre 0,125.

3. Trouver le logarithme en base 3 de 1/243.

4. Trouver le logarithme en base 1/3 de 81.

5. Trouver $\log_b x$ sachant que $\log_b(1/x) = 1/4$.

6. Écrire l'équation $\log_b(a - x) = c$ sous forme exponentielle et isoler x.

7. Trouver N, sachant que $\log_2 N = 3$.

8. Trouver N, sachant que $\log_3 N = -1$.

9. Trouver N, sachant que $2 \log_5 N = -4$.

10. Trouver $\log_b \sqrt{b}$.

11. Trouver $\log_{10} 0{,}1$.

12. Trouver N, sachant que $\log_6 N = 0$.

13. Trouver N, sachant que $\log_4 N = 1{,}5$.

14. Trouver N, sachant que $\log_8 N = -1/3$.

15. Trouver b, sachant que $\log_b 8 = 3/4$.

16. Trouver b, sachant que $\log_b 32 = 5/2$.

17. Trouver b, sachant que $\log_b \sqrt{3} = 1/4$.

18. Trouver b, sachant que $\log_b 81 = 4$.

19. Trouver b, sachant que $\log_b 1/4 = -2/3$.

20. Trouver b, sachant que $\log_b 0{,}125 = -3$.

21. Trouver N, sachant que $\log_b (\log_b N) = 0$.

22. Trouver N, sachant que $\log_2 [\log_2 (\log_2 N)] = 0$.

23. Trouver les logarithmes demandés.
   a) $\log_2 32$ b) $\log_4 16$
   c) $\log_3 243$ d) $\log_2 (1/32)$
   e) $\log_8 2$ f) $\log_9 27$
   g) $\log_5 625$ h) $\log_{25} 5$

24. Exprimer les nombres suivants sous forme exponentielle de base 10.
   a) 3 b) 54,5
   c) 0,22 d) 1,2
   e) 3,7 f) 0,37
   g) 8,32 h) 81,34

25. Trouver x tel que:
   a) $10^x = 8$ b) $10^x = 0{,}65$
   c) $\log x = 1{,}5$ d) $\log x = -0{,}27$
   e) $10^{2x} = 0{,}7$ f) $2 (\log x) - 5 = 0$
   g) $10^{-x}(10^{-x} - 8) = 0$ h) $10^{3x} = 25$

26. Exprimer les nombres suivants en base e.
   a) 3 b) 27,23
   c) 0,78 d) 1,09
   e) 3,7 f) 0,41
   g) 8,32 h) 0,9

27. Déterminer x avec cinq chiffres significatifs.
   a) $e^x = 7$ b) $e^x = 0{,}65$
   c) $\ln x = 1{,}5$ d) $\ln x = -0{,}27$
   e) $e^{2x} = 0{,}7$ f) $2 \ln x - 3 = 0$
   g) $e^{-x} (e^{-x} - 2) = 0$ h) $e^{3x} = 19$

28. Résoudre et conserver cinq chiffres significatifs.
   a) $4^x = 22$ b) $5^x = 34$
   c) $2^x = 100$ d) $1{,}5^x = 42$
   e) $0{,}78^x = 0{,}4$ f) $3^x = 0{,}15$

99. Résoudre et conserver cinq chiffres significatifs.
   a) $6^{2-3x} = 4^{2x+1}$ b) $8^{3-x} = 5^{2x+3}$

30. Si $\log_b x = 6$, trouver $\log_b x^2$.

31. Si $\log_b bx = 7$, trouver $\log_b x$.

32. Si $\log_b bx = 5$, trouver $\log_b x^2$.

33. Trouver la valeur de x en écrivant les équations logarithmiques sous forme exponentielle.
   a) $\log_2 (x - 5) = 3$ b) $\log_5 (2x + 1) = 2$
   c) $\log_{1/2} (3x - 1) = -3$ d) $\log_4 (3x - 5) = 3$
   e) $\log_3\left(\dfrac{x^2+2}{x+4}\right)=1$

34. La population d'une ville est de 20 000 habitants. En tenant compte des taux de mortalité et de natalité, on a établi que la population est décrite en fonction du temps t en années par le modèle

$$P(t) = 20\ 000\ e^{0,05t}.$$

Dans combien de temps la population aura-t-elle doublé ?

35. Une compagnie renouvelle sa machinerie au coût de 300 000 \$. Sachant que cette machinerie se déprécie au taux de 20 % par année, on a établi que la valeur, n années après l'achat, est donnée par

$$V(n) = 300\ 000\ (0,8)^n.$$

Dans combien de temps la machinerie vaudra la moitié de sa valeur d'achat ? le tiers ? le quart ? le cinquième ?

36. Un sel radioactif se désintègre de telle sorte qu'à la fin de chaque année il reste les 49/50 de la quantité du début de l'année. À partir de ces données, on a établi que la quantité de ce sel après t années était décrite par le modèle

$$Q(t) = Q_0(0,98)^t.$$

a) Dans combien de temps la quantité initiale aura-t-elle diminué du quart ? de la moitié ? des trois quarts ?
b) Sachant que la période (ou demi-vie) d'un élément radioactif est le temps nécessaire à la désintégration de la moitié de la quantité initiale, quelle est la période de ce sel radioactif ?

37. Trouver le modèle exponentiel donnant la valeur d'un capital de 8 500 \$ placé à 8,5 % d'intérêt capitalisé annuellement. Dans combien de temps le capital aura-t-il doublé ?

38. Le radium A se désintègre à une vitesse telle qu'à la fin de chaque minute il ne reste que les 8/10 de la quantité initiale. Trouver la période du radium A, sachant que la période d'un élément radioactif est le temps nécessaire pour que la moitié de la quantité initiale soit désintégrée.

39. Trouver x sachant que

$$\log_a x = \log_a\left(\frac{5}{8}\right) + \log_a\left(\frac{7}{10}\right) - \log_a\left(\frac{2}{7}\right).$$

40. Simplifier l'expression $\log_a x^3 - \log_a x$.

41. Simplifier l'expression $\log_a x^3 - \log_a 2x$.

42. Simplifier l'expression $\log_a(x^2-1) - \log_a(x+1)$.

43. Simplifier l'expression $\log_a(a^2\sqrt{x}\,) + \log_a x^2$.

44. Trouver la valeur de x à l'aide des propriétés des logarithmes.
a) $\log_2 x + \log_2 (x-3) = 2$
b) $\log_3 (x+2) - \log_3 (x-2) = 2$
c) $2 \log_5 x - \log_5 8x = 0$
d) $\log_5 (x+3)^4 = 4$
e) $\log_2 (3x+4) = 2 + \log_2 (2x-2)$
f) $\log_2 (12-2x) - \log_2 (2+x) = 2$
g) $2 \log_2 x - \log_2 (x-2) = 3$

45. Démontrer les propriétés suivantes en vous servant de la définition de logarithme.
a) $\ln e^a = a$ b) $e^{\ln b} = b$
c) $\ln MN = \ln M + \ln N$
d) $\ln\left(\dfrac{M}{N}\right) = \ln M - \ln N$
e) $\ln M^p = p \ln M$
f) $\log_b M = \dfrac{\ln M}{\ln b}$

EXERCICES RÉCAPITULATIFS

1. Dans un examen, à la question « Résoudre l'équation $2^x = 12$. », un étudiant a donné la solution suivante :

$$2^x = 12$$
$$\log 2^x = \log 12$$
$$x \log 2 = \log 12$$
$$x = \frac{\log 12}{\log 2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Dire pourquoi cette réponse n'est pas plausible, relever l'erreur commise par cet étudiant et donner la bonne solution.

2. Dans un examen, à la question « Écrire l'expression $\log x + \log 4x = 2$ sous forme exponentielle. », un étudiant a donné la solution suivante:

$$\log x + \log 4x = 2$$
$$\log 5x = 2$$
$$5x = 10^2$$
$$5x = 100$$
$$x = 20$$

Dire pourquoi cette réponse n'est pas plausible, relever l'erreur commise par cet étudiant et donner la bonne solution.

3. Dans un examen, à la question « Résoudre l'équation $\log x = 3 \log 2$. », un étudiant a donné la solution suivante:

$$\log x = 3 \log 2$$
$$x = 6$$

Dire pourquoi cette réponse n'est pas plausible, relever l'erreur commise par cet étudiant et donner la bonne solution.

4. Dans un examen, à la question « Résoudre l'équation $\log x - \log 2 = 1$. », un étudiant a donné la solution suivante:

$$\log x - \log 2 = 1$$
$$\log(x - 2) = 1$$
$$x - 2 = 10^1$$
$$x = 12$$

Dire pourquoi cette réponse n'est pas plausible, relever l'erreur commise par cet étudiant et donner la bonne solution.

5. Quel critère permet de s'assurer que des données expérimentales peuvent être décrites par un modèle exponentiel et à quelle condition ?

6. Soit une fonction satisfaisant les conditions suivantes :
   - $f(0) = 5$;
   - $f(t + 1) - f(t) = 0{,}2f(t)$.

   a) Montrer que $f(t + 1) = (1{,}2)\, f(t)$

   b) Montrer que la fonction f est une exponentielle de base (1,2), c'est-à-dire
   $$f(t) = 5(1{,}2)^t.$$

7. Soit une fonction satisfaisant les conditions suivantes :
   - $f(0) = 10$;
   - $f(t + 1) - f(t) = -\,0{,}2f(t)$.

   a) Montrer que $f(t + 1) = (0{,}8)\, f(t)$

   b) Montrer que la fonction f est une exponentielle de base (0,8), c'est-à-dire
   $$f(t) = 10(0{,}8)^t.$$

8. Soit une fonction satisfaisant les conditions suivantes :
   - $f(0) = a$ où $a > 0$;
   - $f(t + 1) - f(t) = kf(t)$ où k est une constante telle que $k > 0$

   a) Montrer que $f(t + 1) = (1 + k)\, f(t)$

   b) Montrer que cette fonction est une exponentielle de base $(1 + k)$, c'est-à-dire
   $$f(t) = a(1 + k)^t.$$

9. Soit une fonction satisfaisant les conditions suivantes:
   - $f(0) = a$ où $a > 0$;
   - $f(t + 1) - f(t) = -\,kf(t)$ où k est une constante telle que $k > 0$

   a) Montrer que $f(t + 1) = (1 - k)\, f(t)$

   b) Montrer que cette fonction est une exponentielle de base $(1 - k)$, c'est-à-dire
   $$f(t) = a(1 - k)^t.$$

10. Vous recevez une lettre ainsi libellée:

    Cher chanceux ou chère chanceuse,

    Tu as la possibilité de recevoir 190 \$ à ne rien faire, ou presque, de la façon suivante:
    – expédie 10 \$ à la personne qui t'envoie cette lettre;
    – fais vingt copies de la lettre et expédie-la à vingt personnes différentes qui, en retour, t'expédieront chacune 10 \$.

    Tu réaliseras donc un profit de 190 \$.

    Une personne qui veut ton bien.

    En supposant qu'une seule personne est à l'origine de cette lettre et que toutes les personnes qui reçoivent la lettre sont distinctes et suivent les directives :

    a) Combien de lettres auront été expédiées à la cinquième génération ? à la dixième génération ?

    b) Pouvez-vous expliquer pourquoi les chaînes de lettres finissent toujours par casser ?

11. Une compagnie de construction achète une rétrocaveuse ayant deux ans d'usage au coût de 84 700 \$. La dépréciation sur une telle machinerie est de 17 % par année.

    a) Construire un modèle mathématique décrivant la valeur de l'équipement depuis l'achat par le premier propriétaire.

    b) Calculer la valeur de revente cinq ans plus tard.