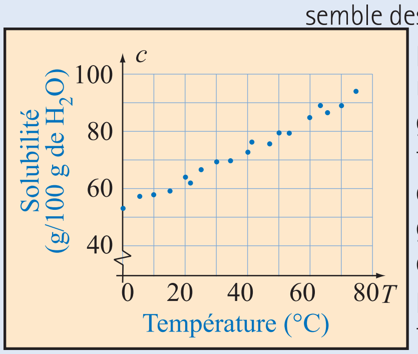
L'échelle logarithmique et la droite de régression sont des moyens simples de déterminer si le lien entre deux variables est un lien exponentiel, un lien de puissance ou un lien logarithmique.

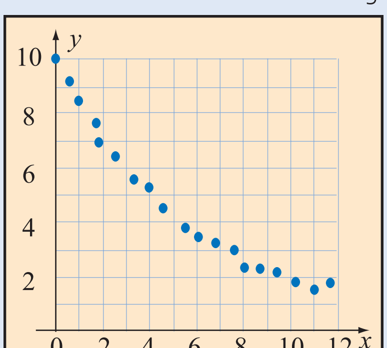
Logarithmes et modélisation



L'ensemble des mesures sur des variables interdépendantes constitue un moyen d'investigation d'un phénomène. La représentation graphique de l'ensemble des mesures forme un « nuage de points ». Dans certains phénomènes, les points semblent alignés. Ils ne le sont jamais parfaitement à cause des erreurs de mesure. Dans l'illustration à gauche, on a la représentation de la solubilité du bromure de potassium en fonction de la température. Dans cette représentation graphique, les points sont assez bien alignés, ce qui permet de supposer l'existence d'un lien affine entre les variables, c'est-à-dire une relation de la forme

$$y = ax + b \text{ ou } c = aT + b$$

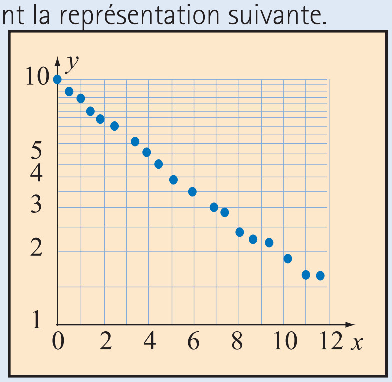
Dans un tel cas, on utilise la méthode de régression (ou des moindres carrés) pour déterminer les paramètres a et b.



Quel type de courbe ?

Lien exponentiel

Visuellement, la forme la plus facile à détecter est la droite. Lorsque le nuage de points forme une courbe, il n'est pas facile de déterminer de quel type de courbe il s'agit. L'utilisation de l'échelle logarithmique peut aider à détecter le type de courbe. Par exemple, en représentant ce nuage de points dans un système d'axes dont l'axe vertical est gradué selon une échelle logarithmique, on obtient la représentation suivante.



Les points du nuage sont alignés, ce qui permet de supposer un lien affine entre la variable x et $\ln y$ (ou $\log y$), c'est-à-dire une relation de la forme :

$$\ln y = ax + b.$$

En appliquant la méthode de régression, on peut calculer les paramètres a et b de cette relation.

En isolant y, on obtient :

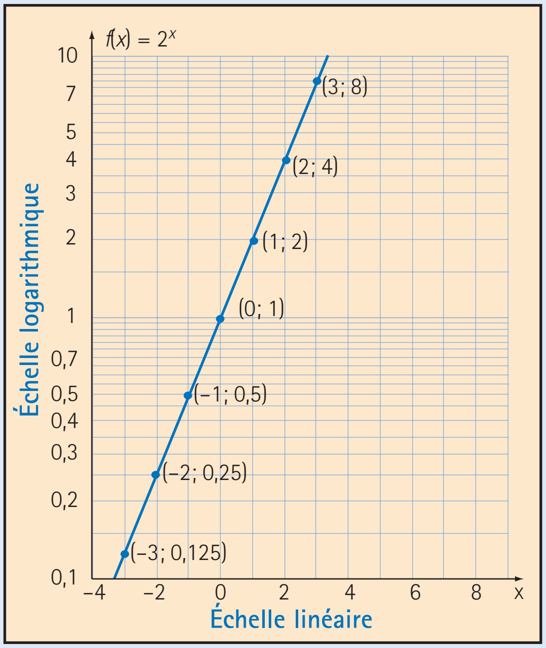
$$y = e^{ax+b} = e^{ax}\,e^{b}$$

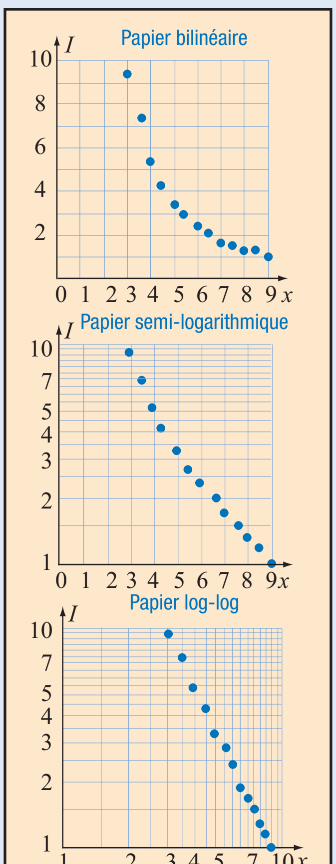
En posant $e^b = k$, on a alors

$$y = ke^{ax}$$

La relation entre les variables est donc une relation exponentielle. L'utilisation de l'échelle logarithmique a permis de constater que les points du nuage étaient suffisamment alignés pour supposer que le lien entre x et $\ln y$ était un lien affine et cela nous a permis de déterminer le lien exponentiel entre les variables.

En représentant une fonction exponentielle dans un système d'axes dont l'axe vertical est gradué selon une échelle logarithmique, le graphique obtenu est une droite. L'illustration suivante est celle de la fonction $f(x) = 2^x$ dans un tel système d'axes.





Diverses représentations des mêmes données

Lien de puissance

Le lien exponentiel n'est pas le seul que l'échelle logarithmique permet de détecter dans un nuage de points.

Si le lien entre les variables x et y est un lien de puissance, c'est-à-dire un lien de la forme :

$$y = kx^a,$$

on peut le détecter à l'aide de l'échelle logarithmique.

En prenant le logarithme des deux membres de l'équation, on obtient :

$\ln y = \ln k + a \ln x$

$\ln y = a \ln x + b$

où $b = \ln k$ est une constante. Donc, il existe un lien affine entre $\ln y$ et $\ln x$.

Dans l'illustration à gauche, les données observées ont été représentées dans trois systèmes d'axes. Le premier est un système dont les deux axes sont linéaires. Dans le second, l'axe vertical est logarithmique. Dans le troisième, les deux axes sont logarithmiques. Dans ce troisième système, le nuage de points forme une droite, ce qui permet de faire l'hypothèse d'un lien affine entre $\ln y$ et $\ln x$. Après avoir déterminé les paramètres de ce lien, on peut exprimer la relation sous forme d'une relation de puissance entre les variables y et x.

Lien logarithmique

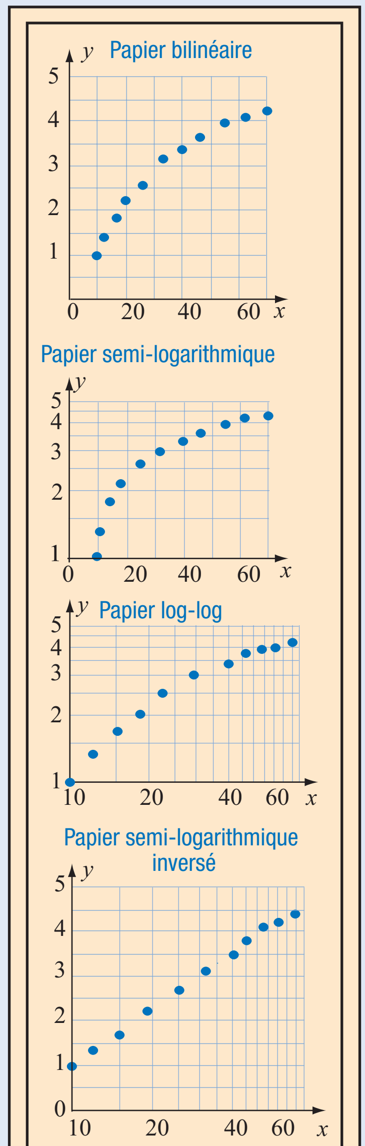
Si le lien entre deux variables x et y est un lien logarithmique, soit :

$$y = a \ln x + b,$$

la représentation graphique dans un système d'axes dont l'axe horizontal est gradué selon une échelle logarithmique donne alors une droite.

Dans l'illustration à droite, les données observées ont été représentées dans quatre systèmes d'axes. Le premier est un système dont les deux axes sont linéaires. Dans le second, l'axe vertical est logarithmique. Dans le troisième, les deux axes sont logarithmiques. Dans le quatrième, seul l'axe horizontal est logarithmique. Dans ce quatrième système, le nuage de points forme une droite, ce qui permet de faire l'hypothèse d'un lien affine entre y et $\ln x$. En déterminant les paramètres de ce lien, on peut obtient directement cette relation.

Dans ses travaux sur les céphéïdes, Henrietta Leavitt (NH Leavitt) a utilisé une représentation dans un système dont l'axe horizontal est gradué selon une échelle logarithmique pour déterminer la relation entre la période d'une céphéide et sa luminosité.



Diverses représentations des mêmes données