CHAPITRE 4

EXERCICES 4.2

1. a) L'équation différentielle est $\frac{dP}{dt}=0{,}012P$. En séparant les variables, on obtient : $\frac{dP}{P}=0{,}012\ dt$ et, en intégrant les deux membres, on obtient : $\int\frac{dP}{P}=\int 0{,}012\ dt$.

   Ce qui donne $\ln|P| = 0{,}012t + k$, d'où $P(t) = b_0e^{0{,}012t}$ et, puisque $P = 12\,000$ habitants à $t = 0$ année, on a : $P(t) = 12\,000\ e^{0{,}012t}$ habitants.

   b) Le temps de génération est le temps nécessaire pour doubler la population. Dans cette situation, le temps de génération est

   $$12\,000\ e^{0{,}012t} = 24\,000,\ \text{d'où } e^{0{,}012t} = 2 \text{ et } 0{,}012t = \ln 2$$

   On a donc $t = (\ln 2)/0{,}012$, ce qui donne $t = 58$ ans.

2. a) Le taux de variation relatif est constant, l'équation différentielle est donc : $\frac{dQ/dt}{Q}=-0{,}0244$. E n séparant les variables, on obtient : $\frac{dQ}{Q}=-0{,}0244dt$ et, en intégrant les deux membres, on obtient : $\int\frac{dQ}{Q}=\int -0{,}0244\ dt$.

   Ce qui donne $\ln|Q| = -0{,}0244t + k$, d'où $Q(t) = Q_0e^{-0{,}0244t}$, car la quantité initiale est Q_0.

   b) La demi-vie est donnée par

   $$Q_0e^{-0{,}0244t} = 0{,}5Q_0,\ \text{d'où } e^{-0{,}0244t} = 0{,}5 \text{ et } -0{,}0244t = \ln 0{,}5$$

   On a donc $t = (\ln 0{,}5)/(-0{,}0244)$, ce qui donne $t = 28$ ans.

3. a) Le taux de variation de la quantité de fluor par rapport au temps est égal au produit de la concentration de fluor par le débit d'eau fluorée. Représentons par Q la quantité en kilogramme de fluor dans l'eau et t le temps en jours à partir du moment où on a arrêté la fluoration. Le taux de variation est alors :

   $$\frac{dQ}{dt}=\frac{Q}{800\ 000}\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times -24000\frac{\text{m}^3}{\text{jour}}=-0{,}03Q\ \text{ kg/jour}.$$

   L'équation différentielle est donc :

   $$\frac{dQ}{dt}=-0{,}03Q\ \text{ kg/jour}.$$

   En séparant les variables et en intégrant, on a alors :

   $$\ln|Q| = -0{,}03t + k,$$
   $$Q = Q_0e^{-0{,}03t}.$$

   Puisque la quantité initiale est de 600 kg, on a $Q_0 = 600$ et la fonction cherchée est :

   $$Q(t) = 600e^{-0{,}03t} \text{ kg}.$$

   b) La quantité de fluor dans le réservoir au bout de dix jours est :

   $$Q(10) = 600e^{-0{,}03\times 10} = 444{,}5 \text{ kg}.$$

   Après dix jours, il reste toujours 444,5 kg de fluor dans le réservoir.

   c) La quantité aura diminué de moitié lorsque :

   $$Q(t) = 600e^{-0{,}03t} = 300 \text{ kg}$$
   $$e^{-0{,}03t} = 0{,}5$$
   $$t=\frac{\ln 0{,}5}{-0{,}03}=23 \text{ jours}.$$

   Il faudra 23 jours avant que la quantité de fluor dans le réservoir ait diminué de moitié.

   d) La quantité de fluor sera égale à 100 kg lorsque

   $$600e^{-0{,}03t} \text{ kg} = 100 \text{ kg},$$
   $$e^{-0{,}03t} = 0{,}17.$$

   ce qui donne $t = 59{,}07$ jours. Donc, la quantité de fluor sera inférieure à 100 kg après 60 jours.

4. a) Le taux de variation de sel par rapport au temps est égal au produit de la concentration de sel par le débit d'eau salée. Représentons par Q la quantité (en kg) de sel dans l'eau et t le temps en minutes. Le taux de variation est alors :

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{Q}{800}\frac{\text{kg}}{\text{L}}\times -20\frac{\text{L}}{\text{min}}=-0{,}025Q\ \text{kg/min}.$$

L'équation différentielle est donc :

$$\frac{dQ}{dt}=-0{,}025Q\ \text{kg/min}.$$

En séparant les variables et en intégrant, on a alors :

$$\ln|Q| = -0{,}025t + k,$$
$$Q = Q_0e^{-0{,}025t}.$$

Puisque la quantité initiale est de 800 L × 0,250 kg/L = 200 kg, on a $Q_0 = 200$ et la fonction cherchée est :

$$Q(t) = 200e^{-0{,}025t}\ \text{kg}.$$

b) La quantité de sel dans le réservoir au bout de trente minutes est :

$$Q(30) = 200e^{-0{,}025\times 30} = 94{,}5\ \text{kg}.$$

Après trente minutes, il reste 94,5 kg de sel dans le réservoir.

c) La quantité sera le dixième de la quantité initiale lorsque :

$$Q(t) = 200e^{-0{,}025t} = 20\ \text{kg},$$
$$e^{-0{,}025t} = 0{,}1,$$
$$t=\frac{\ln 0{,}1}{-0{,}025}\approx 92{,}1\ \text{min}.$$

Il faudra 92 minutes avant que la quantité de sel dans le réservoir soit le dixième de la quantité initiale.

5. a) L'équation différentielle est :

$$\frac{dP}{dt}=-0{,}15P.$$

En séparant les variables et en intégrant, on a alors :

$$\ln|P| = -0{,}15t + k,$$
$$|P| = e^ke^{-0{,}15t}\text{ et } P = P_0e^{-0{,}15t}.$$

Puisque la population initiale était de 80 000 truites, on a $P_0 = 80\,000$ et la fonction cherchée est :

$$P(t) = 80\,000e^{-0{,}15t}\ \text{truites}$$

b) La population aura diminué de moitié lorsque :

$$P(t) = 80\,000e^{-0{,}15t} = 40\,000,$$
$$e^{-0{,}15t} = 0{,}5,$$
$$t=\frac{\ln 0{,}5}{-0{,}15}=4{,}6.$$

La population aura diminué de moitié au bout de 4,6 mois.

6. a) L'équation différentielle est :

$$\frac{dV}{dt}=-0{,}3V.$$

En séparant les variables et en intégrant, on a alors

$$\ln|V| = -0{,}3t + k,$$
$$|V| = e^ke^{-0{,}3t}\text{ et } V = V_0e^{-0{,}3t}.$$

Puisque la valeur initiale était de 30 000 \$, on a $V_0 = 30\,000$ et la fonction cherchée est

$$V(t) = 30\,000e^{-0{,}3t}\ \$$$

b) La valeur sera le quart de la valeur initiale lorsque

$$P(t) = 30\,000e^{-0{,}3t} = 7\,500,$$
$$e^{-0{,}3t} = 0{,}25,$$
$$t=\frac{\ln 0{,}25}{-0{,}3}=4{,}6.$$

La compagnie devrait envisager de changer cet équipement après quatre ans et demi d'utilisation.

7. a) La caractéristique de la désintégration des matières radioactives est un taux de variation relatif constant. On a donc:

$$\frac{dQ/dt}{Q}=a,\text{ d'où }\frac{dQ}{Q}=adt,\ \int\frac{dQ}{Q}=\int adt\text{ et }Q(t)=Q_0e^{at}.$$

Puisque la demi-vie est de 5,25 ans, on a donc $Q(5{,}25) = Q_0e^{5{,}25a} = 0{,}5Q_0$ d'où l'on tire $e^{5{,}25a} = 0{,}5$. En prenant le logarithme naturel, on obtient $5{,}25a = \ln 0{,}5$ et $a = (\ln 0{,}5)/5{,}25 = -0{,}132$ et $Q(t) = Q_0e^{-0{,}132t}$.

b) $Q(t) = Q_0e^{-0{,}132t} = 0{,}125Q_0$ et $t = 15{,}75$ ans.

8. a) $Q(t) = Q_0e^{kt}$ où $k = -1{,}54\times10^{-10}$

b) Il y a manifestement la moitié de l'uranium qui a été désintégré puisque la teneur en uranium-238 est égale à la teneur en plomb-206 et on peut estimer à 4,5 milliards d'années.

9. a) L'équation différentielle est

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{-20}{t+1}$$

b) En séparant les variables et en intégrant, on a alors :

$$dQ=\frac{-20}{t+1}dt$$
$$\int dQ=-20\int\left(\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$Q=-20\ln|t+1|+k.$$

Puisque la quantité initiale est de 120 mL, on a

$$-20\ln|0+1|+k=120$$

La fonction est $Q(t) = 120 - 20\ln|t + 1|$.

c) La quantité de médicament éliminée après cinq heures est :

$$Q(5) = 120 - 20\ln|5 + 1| = 84{,}164\ ...$$

Après cinq heures, il reste 120 – 84 = 36 mL dans l'organisme.

d) La quantité de médicament dans l'organisme aura diminué de moitié lorsque :

$$Q(t) = 120 - 20\ln|t + 1| = 60$$
$$-20\ln|t + 1| = -60$$
$$\ln|t + 1| = 3$$
$$e^{\ln|t + 1|} = e^3$$
$$|t + 1| = e^3$$
$$t = e^3 - 1 = 19{,}085...$$

Il faudra 19 heures avant que la quantité de médicament dans l'organisme ait diminué de moitié.

10. a) L'équation différentielle est :

$$\frac{dP}{dt}=-0{,}15P.$$

En séparant les variables et en intégrant, on a alors :

$$\ln|P| = -0{,}15t + k$$
$$|P| = e^ke^{-0{,}15t}\text{ et }P = P_0e^{-0{,}15t}$$

Puisque la population initiale était de 80 000 truites, on a $P_0 = 80\,000$ et la fonction cherchée est :

$$P(t) = 80\,000e^{-0{,}15t}\text{ truites}$$

b) La population aura diminué de moitié lorsque :

$$P(t) = 80\,000e^{-0{,}15t} = 40\,000$$
$$e^{-0{,}15t} = 0{,}5$$
$$t=\frac{\ln 0{,}5}{-0{,}15}=4{,}6.$$

La population aura diminué de moitié au bout de 4,6 mois.

11. a) L'équation différentielle est :

$$\frac{dV}{dt} = -0,2V.$$

En séparant les variables et en intégrant, on a alors

$$\ln |V| = -0,2t + k$$
$$|V| = e^k e^{-0,2t} \text{ et } V = V_0 e^{-0,2t}$$

Puisque la valeur initiale était de 150 000 \$, on a $V_0 = 150\,000$ et la fonction cherchée est

$$V(t) = 150\,000e^{-0,2t} \text{ \$}$$

b) $V(2) = 150\,000e^{-0,2\times 2} = 100\,548$ \$

c) La valeur sera le quart de la valeur initiale lorsque

$$P(t) = 150\,000e^{-0,32t} = 37\,500$$
$$e^{-0,2t} = 0,25$$
$$t = \frac{\ln 0,25}{-0,2} = 6,931\ ...$$

La compagnie devrait envisager de changer cet équipement après sept ans d'utilisation.

12. a) La caractéristique de la désintégration des matières radioactives est un taux de variation relatif constant. On a donc :

$\frac{dQ/dt}{Q} = a$, d'où $\int \frac{dQ}{Q} = \int a\,dt$ et $Q(t) = Q_0$. On a donc $Q(t) = Q_0 e^{at}$

Puisque la demi-vie est de 10,7 ans, on a donc $Q(10,7) = Q_0 e^{10,7a} = 0,5Q_0$ d'où l'on tire $e^{10,7a} = 0,5$. En prenant le logarithme naturel, on obtient $^{10,7}a = \ln 0,5$ et $a = (\ln 0,5)/10,7 = -0,064\,78$ et $Q(t) = Q_0 e^{-0,064\,78t}$

b) $Q(t) = Q_0 e^{-0,064\,78t} = 0,25Q_0$ et $t = 21,4$ ans.

13. a) En séparant les variables de l'équation décrivant le taux de variation du revenu en fonction de la quantité, on obtient

$$dR = \frac{12}{\sqrt{q}}dq = 12q^{-1/2}dq.$$

En appliquant l'opérateur d'intégration,

$$\int dR = 12\int q^{-1/2}\,dq,$$
$$R = 12\frac{q^{1/2}}{1/2} + k_1 = 24\sqrt{q} + k_1.$$

Dans ce problème, la variable dépendante est le revenu et elle est déjà isolée. Si $q = 0$, le revenu est $R = 0$ et en substituant dans la solution générale, on a :

$$0 = 24\sqrt{0} + k_1,$$

d'où $k_1 = 0$ et le revenu est décrit en fonction de la quantité par :

$$R(q) = 24\sqrt{q}.$$

b) En séparant les variables de l'équation décrivant le taux de variation du coût de fabrication en fonction de la quantité fabriquée, on obtient

$$dC = \left(\frac{1}{4}q + \frac{1}{4}\frac{1}{q+1}\right)dq$$

En appliquant l'opérateur d'intégration,

$$\int dC = \int\left(\frac{1}{4}q + \frac{1}{4}\frac{1}{q+1}\right)dq = \frac{1}{4}\int q\,dq + \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{q+1}\right)dq$$
$$= \frac{1}{4}\frac{q^2}{2} + \frac{1}{4}\ln|q+1| + k_2.$$

Dans ce problème, la variable dépendante est le coût et il est déjà isolé, la solution générale est

$$C(q)=\frac{1}{8}q^2+\frac{1}{4}\ln|q+1|+k_2.$$

Il y a des frais fixes de 16 000 \$, donc si $q = 0$, le coût est $C = 16$ et en substituant dans la solution générale, on a :

$$C(0)=\frac{1}{8}0^2+\frac{1}{4}\ln|0+1|+k_2=16$$

d'où $k_2 = 16$ et la solution particulière est

$$C(q)=\frac{1}{8}q^2+\frac{1}{4}\ln|q+1|+16.$$

c) Pour savoir si le conseil prend une bonne décision, il faut calculer le profit réalisé annuellement. On détermine la fonction profit,

$$\begin{aligned}P(q)=R(q)-C(q)&=24\sqrt{q}-\left(\frac{1}{8}q^2+\frac{1}{4}\ln|q+1|+16\right)\\&=24\sqrt{q}-\frac{1}{8}q^2-\frac{1}{4}\ln|q+1|-16.\end{aligned}$$

L'image de 15 par la fonction profit est :

$$P(13)=24\sqrt{13}-\frac{1}{8}13^2-\frac{1}{4}\ln|14|-16=48{,}748\ \ldots$$

Le profit réalisé en produisant 13 000 sacs est de 48 748 \$. L'image de 32 par la fonction profit est :

$$P(32)=24\sqrt{32}-\frac{1}{8}32^2-\frac{1}{4}\ln|33|-16=-9{,}109\ \ldots$$

En produisant 32 000 sacs, la compagnie essuierait une perte de 9 109 \$. C'est une bonne décision.

14. a) La situation est caractérisée par un taux de variation relatf constant :

$$\frac{dC/dt}{C}=0{,}04.$$

b) En séparant les variables de l'équation et en intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{dC}{C}&=0{,}04dt\\ \int\frac{dC}{C}&=0{,}04\int dt\\ \ln|C|&=0{,}04t+k\\ |C|&=e^{0{,}04t+k}=e^{0{,}04t}e^k.\end{aligned}$$

Puisque le capital initial est de 25 000 \$, la solution particulière est $C(t) = 25\,000e^{0{,}04t}$.
Dans cinq ans, la valeur sera $C(5) = 25\,000e^{0{,}04\times 5} = 30\,535{,}07$ \$.

15. a) La situation est caractérisée par un taux de variation relatf constant :

$$\frac{dV/dt}{V}=0{,}024.$$

b) En séparant les variables de l'équation et en intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{dV}{V}&=0{,}024dt\\ \int\frac{dV}{V}&=0{,}024\int dt\\ \ln|V|&=0{,}024t+k\\ |V|&=e^{0{,}024t+k}=e^{0{,}04t}e^k.\end{aligned}$$

Puisque la valeur initiale est de 265 000 \$, la solution particulière est $C(t) = 265\,000e^{0{,}024t}$.

c) Dans dix ans, la valeur sera $C(10) = 265\,000e^{0{,}024\times 10} = 336\,881$ \$.

EXERCICES 4.4

1. a) L'équation différentielle est $\dfrac{dT}{dt} = -0{,}35(T-20)$.

   b) On a $\dfrac{dT}{(T-20)} = -0{,}35\ dt$ et en posant $u = T - 20$, on a $du = dT$. D'où $\displaystyle\int \frac{dT}{(T-20)} = \int \frac{du}{u} = \int -0{,}5\ dt$ On obtient alors $\ln |u| = -0{,}35t + k$. On a donc $u = T_0\, e^{-0{,}35t}$. On trouve alors $T - 20 = T_0\, e^{-0{,}35t}$ et : $T = 20 + T_0\, e^{-0{,}35t}$. Puisque $T(0) = 100°C$, on a $T_0 = 80$. On trouve donc $T(t) = 20 + 80e^{-0{,}35t}$ °C.

   c) La fonction cherchée est la dérivée en fonction de t, ce qui donne : $T'(t) = 80e^{-0{,}35t} \times -0{,}35 = -28e^{-0{,}35t}$ °C/min ou $T'(t) = -0{,}35(T - 20)$ °C/min.

2. Déterminons d'abord les dérivées de $y = e^x \sin x$. On trouve :
   $$y' = e^x (\sin x + \cos x) \text{ et } y'' = 2e^x \cos x.$$
   En substituant dans l'équation différentielle, on obtient :
   $$y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x - 2e^x (\sin x + \cos x) + 2e^x \sin x = 0.$$
   Par conséquent, la fonction est bien une solution de l'équation différentielle.

3. a) Soit P la population de cerfs. L'équation différentielle est $\dfrac{dP}{dt} = 0{,}12(1\ 500 - P)$.

   En séparant les variables, on a $\dfrac{dP}{(1\ 500-P)} = 0{,}12\ dt$.

   En intégrant, on obtient : $\displaystyle\int \frac{1}{(1\ 500-P)}\ dP = 0{,}12 \int dt$.

   d'où $-\ln |1500 - P| = 0{,}12t + k$ et $\ln |1500 - P| = -0{,}12t - k$.
   Sous forme exponentielle, cette relation s'écrit :
   $|1500 - P| = e^{-k}e^{-0{,}12t}$, $1\ 500 - P = \pm e^{-k}e^{-0{,}12t} = b_0e^{-0{,}12t}$, où $b_0 = \pm e^{-k}$.
   La population initiale étant de 300 têtes, on a $1\ 500 - 300 = b_0e^0$, d'où $b_0 = 1\ 200$.
   En substituant :
   $1\ 500 - P = 1200e^{-0{,}12t}$
   En isolant P, on trouve :
   $-P = -1\ 500 + 1\ 200\ e^{-0{,}12t}$ et $P = 1\ 500 - 1\ 200\ e^{-0{,}12t}$
   Le modèle est donc : $P(t) = 300 + 1\ 200(1 - e^{-0{,}12t})$ cerfs.

   b) On cherche t tel que $P(t) = 300 + 1\ 200(1 - e^{-0{,}12t}) = 1200$, ce qui donne $1\ 200(1 - e^{-0{,}12t}) = 900$.
   En divisant les deux membres de l'équation par 1200 et en simplifiant, $(1 - e^{-0{,}12t}) = 3/4$. Cela donne : $-e^{-0{,}12t} = -1/4$ et $e^{-0{,}12t} = 1/4$.
   En prenant le logarithme des deux membres, on obtient :
   $-0{,}12t = \ln(1/4) = -\ln 4$ et $t = \dfrac{-\ln 4}{-0{,}12} = 11{,}55$.

   Il faudra environ 12 ans pour que la population atteigne 1 200 têtes.

4. a) L'équation différentielle est $\dfrac{dP/dt}{5\ 400-P} = 0{,}14$ et en séparant les variables, $\dfrac{dP}{5\ 400-P} = 0{,}14\ dt$, d'où :
   $$\ln |5\ 400 - P| = -0{,}14t + k \text{ et } P(t) = 5\ 400(1 - e^{-0{,}14t})$$

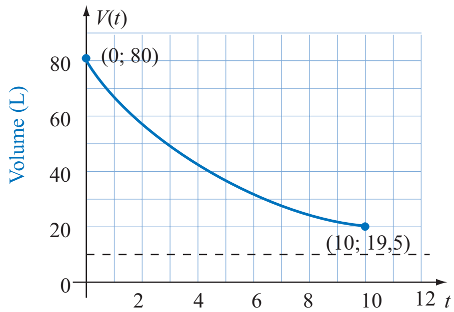
   b) $P(5) = 5\ 400(1 - e^{-0{,}14\times5}) = 2\ 718$ plants.

5. a) L'équation différentielle est : $\dfrac{dV}{dt} = -0{,}2(V-10)$ ou $\dfrac{dV}{dt} = 0{,}2(10-V)$ et $\dfrac{dV}{(V-10)} = -0{,}2dt$.

   b) En intégrant, on obtient : $\ln|V - 10| = -0{,}2t + k$ d'où : $|V - 10| = e^k e^{-0{,}2t}$ et $V - 10 = V_0e^{-0{,}2t}$. Puisque le volume initial est de 80 L, on a $80 - 10 = V_0e^0$ d'où $V_0 = 70$. Le volume est donc décrit en fonction du temps par :

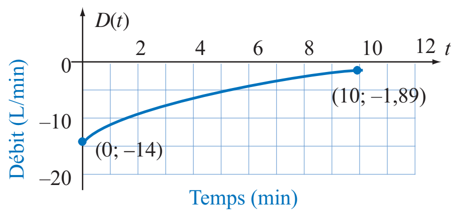
$$V(t) = 10 + 70e^{-0,2t}\ \text{L}.$$

c)



d) Le débit en fonction du temps est donné par la dérivée de la fonction décrivant le volume de liquide, soit :

$$D(t) = \frac{dV}{dt} = -14e^{-0,2t}\ \text{L/min}.$$



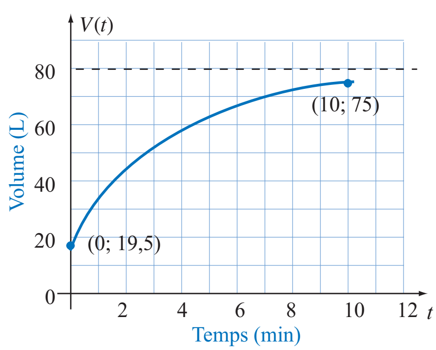
e) $V(10) = 10 + 70e^{-0,2\times 10}\ \text{L} = 19,5\ \text{L}.$

f) $\dfrac{dV}{dt} = 0,25(80 - V)$ et $\dfrac{dV}{80 - V} = 0,25\ dt.$

g) En intégrant, on obtient $\ln|80 - V| = -0,25t + k$ d'où $|80 - V| = e^k e^{-0,25t}$ et $80 - V = V_0 e^{-0,25t}$.
Puisque le volume initial est de 19,5 L, on a $80 - 19,5 = V_0 e^0$ d'où $V_0 = 60,5$. Le volume est donc décrit en fonction du temps par :

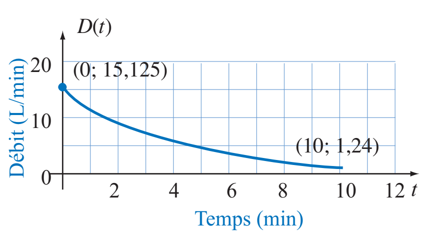
$$V(t) = 80 - 60,5e^{-0,25t}\ \text{L}.$$

h)



i) Le débit en fonction du temps est donné par la dérivée de la fonction décrivant le volume de liquide, soit

$$D(t) = \frac{dV}{dt} = 15,125e^{-0,25t}\ \text{L/min}.$$



j) $V(10) = 80 - 60,5e^{-0,25\times 10}\ \text{L} = 75\text{L}.$

6. a) L'équation différentielle est $\frac{dV}{dt}=0{,}4(400-V)$ et $\frac{dV}{400-V}=0{,}4\ dt$.

b) Le volume pompé est $V(t) = 350(1 - e^{-0{,}4t})$ L et le volume dans le réservoir est :

$$V(t) = 350(1 - e^{-0{,}4t}) + 50 \text{ L}.$$

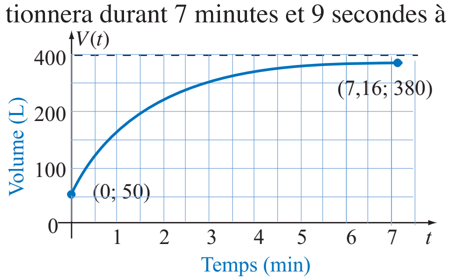
d) Le débit en fonction du temps est donné par la dérivée de la fonction décrivant le volume de liquide, soit

$$D(t)=\frac{dV}{dt}=-14e^{-0{,}2t}\ \text{L/min}.$$

e) On cherche t tel que :

$V(t) = 350(1 - e^{-0{,}4t}) + 50$ L $= 380$ L, ce qui donne $t=\frac{\ln(2/35)}{-0{,}4}=7{,}16$ min. On peut donc dire que la pompe fonctionnera durant 7 minutes et 9 secondes à chaque fois qu'elle se mettra en marche.

c)



7. Déterminons d'abord les dérivées de $y = e^{\sin x}$. On trouve :

$$y' = e^{\sin x}\cos x \text{ et } y'' = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x).$$

En substituant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$y'' = y(\cos^2 x - \sin x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x).$$

Par conséquent, la fonction est bien une solution de l'équation différentielle.

8. Déterminons d'abord les dérivées de $y = \tan x$. On trouve :

$$y' = \sec^2 x \text{ et } y'' = 2\sec^2 x \tan x.$$

En substituant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$y'' = 2yy' = 2\sec^2 x \tan x.$$

Par conséquent, la fonction est bien une solution de l'équation différentielle.

9. a) Le taux de croissance de la population est proportionnel à la taille de celle-ci, on a donc

$$\frac{dP}{dt}=0{,}2P.$$

Pour tenir compte du fait que la pêche est permise et que le quota annuel est de 75 prises, l'équation différentielle devient

$$\frac{dP}{dt}=0{,}2P-75=0{,}2\left(P-\frac{75}{0{,}2}\right)=0{,}2(P-375).$$

b) En séparant les variables,

$$\frac{dP}{P-375}=0{,}2dt.$$

On applique l'opérateur d'intégration.

$$\int\frac{dP}{P-375}=0{,}2\int dt.$$

En posant $u = P - 375$, on a $du = dP$ et

$$\int\frac{du}{u}=0{,}2\int dt$$
$$\ln|u|=0{,}2t+k$$
$$|u|=\pm e^k e^{0{,}2t}$$
$$u=b_0 e^{0{,}2t}.$$

On a donc $P - 375 = b_0e^{0,2t}$, d'où $P = 375 + b_0e^{0,2t}$. Au temps 0, la population est de 500 truites, on a donc

$$375 + b_0e^{0,2\times 0} = 500 \text{ qui donne } b_0 = 125.$$

La solution particulière est

$$P(t) = 375 + 125e^{0,2t}.$$

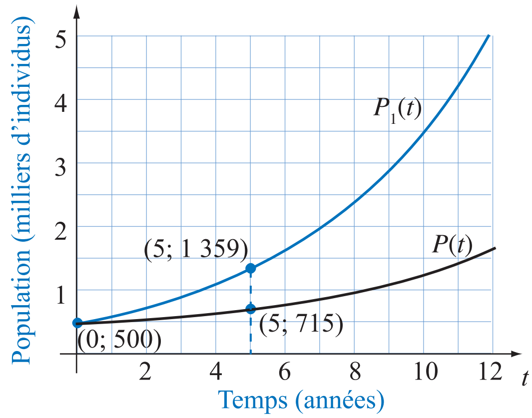
c) L'image au temps $t = 5$ donne $P(5) = 375 + 125e^{0,2\times 5} = 715$. Dans cinq ans, la taille de la population sera de 715 truites si la pêche est permise avec un quota de 75 prises par année.

Si la pêche est interdite, l'équation différentielle est $\frac{dP}{dt} = 0,2P$, dont la solution est $P_1(t) = 500e^{0,2t}$. En calculant l'image de 5 par cette fonction, on obtient :

$P_1(5) = 500e^{0,2\times 5} = 1\,359$.

Dans l'éventualité où la pêche est interdite, la taille de la population dans cinq ans est d'environ 1 359 truites.

d) L'image au temps 0 est 500 pour chacune de ces fonctions et, dans les deux cas, la taille de la population augmente, mais elle est moins rapide si la pêche est permise. L'imposition d'un quota permet d'éviter l'extinction due à la surpêche et limite les contraintes sur les ressources du milieu.



10. a) Le taux de croissance de la population est proportionnel à la taille de celle-ci, on a donc

$$\frac{dP}{dt} = 0,4(10\ 000 - P).$$

b) En séparant les variables, on a :

$$\frac{dP}{(5\ 000 - P)} = 0,4dt.$$

On applique l'opérateur d'intégration,

$$\int \frac{dP}{(5\ 000 - P)} = 0,4\int dt.$$

En posant $u = 5\ 000 - P$, on a $du = -dP$ et

$$\int \frac{du}{u} = -0,4\int dt$$
$$\ln|u| = -0,4t + k$$
$$u = \pm e^k e^{-0,4t} = b_0e^{-0,4t}.$$

On a donc $5\ 000 - P = b_0e^{-0,4t}$ et la solution générale est $P = 5000 - b_0e^{-0,4t}$.

Puisque la population initiale est de 2 000 têtes,

$$5000 - b_0e^{-0,4\times 0} = 2000 \text{ qui donne } b_0 = 3000.$$

La taille de la population est décrite par la solution particulière

$$P(t) = 5000 - 3000e^{-0,4t}.$$

c) Dans cinq ans, la population de cerfs sera

$$P(5) = 5000 - 3000e^{-0,4\times 5} = 4594 \text{ cerfs},$$

d) Pour tenir compte du fait que la chasse est permise et que le quota annuel est de 200 prises, l'équation différentielle devient

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}4(5\ 000 - P) - 500 = 0{,}4\left[(5\ 000 - P) - \frac{500}{0{,}4}\right]$$
$$= 0{,}4[5\ 000 - P - 1\ 250] = 0{,}4[3\ 750 - P].$$

e) En séparant les variables, on a :

$$\frac{dP}{3\ 750 - P} = 0{,}4dt.$$

On applique l'opérateur d'intégration,

$$\int \frac{dP}{3\ 750 - P} = 0{,}4\int dt.$$

En posant $u = 8\ 750 - P$, on a $du = -dP$ et

$$\int \frac{du}{u} = -0{,}4\int dt$$
$$\ln|u| = -0{,}4t + k$$
$$u = \pm e^k e^{-0{,}4t} = b_0 e^{-0{,}4t}.$$

On a donc $3\,750 - P = b_0 e^{-0{,}4t}$ et la solution générale est $P = 3\,750 - b_0 e^{-0{,}4t}$.
Puisque la population initiale est de 2 000 têtes,

$$3\,750 - b_0 e^{-0{,}4 \times 0} = 2\,000 \text{ qui donne } b_0 = 1\,750.$$

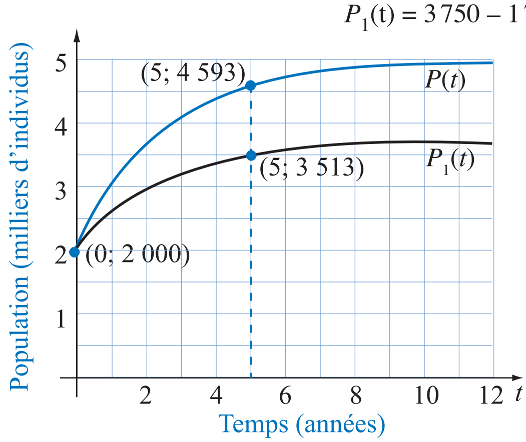
La taille de la population est décrite par la solution particulière

$$P_1(t) = 3\,750 - 1\,750e^{-0{,}4t}.$$

f) Si la chasse est permise avec un quota de 500 têtes, la population de cerfs dans cinq ans sera

$$P_1(\text{t}) = 3\,750 - 1\,750e^{-0{,}4 \times 5} = 3\,513 \text{ cerfs.}$$

g)



11. a) Le taux de croissance de la population est proportionnel à la taille de celle-ci, on a donc

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}15P\left(1 - \frac{P}{300}\right).$$

b) En séparant les variables, on a :

$$\frac{300dP}{P(300 - P)} = 0{,}15dt.$$

On applique l'opérateur d'intégration,

$$\int \frac{300dP}{P(300 - P)} = 0{,}15\int dt.$$

En modifiant l'intégrale et en posant $u = 300 - P$, on a $du = -dP$, d'où :

$$\int \frac{dP}{P} - \int \frac{300dP}{300 - P} = 0{,}15\int dt$$
$$\ln|P| - \ln|300 - P| = 0{,}15t + k$$
$$-\ln|P| + \ln|300 - P| = -0{,}15t - k$$
$$\ln\left|\frac{300 - P}{P}\right| = -0{,}15t - k.$$

En exprimant la relation sous forme exponentielle, on a :

$$\left|\frac{300-P}{P}\right| = e^{-0,15t-k} = \pm e^k e^{-0,15t}\text{, d'où } \frac{300-P}{P} = b_0 e^{-0,15t}.$$

Puisque la taille de la population au temps 0 est de 50 chèvres,

$$\frac{300-50}{50} = b_0 e^{-0,15\times 0} \text{ qui donne } b_0 = \frac{250}{50} = 5.$$

On a donc

$$\frac{300-P}{P} = 5e^{-0,15t}\text{, d'où } 300-P = 5Pe^{-0,15t} \text{ et } 300 = P+5Pe^{-0,15t} = P(1+5e^{-0,15t}).$$

En isolant P, on obtient que la taille de la population est décrite par la solution particulière

$$P(t) = \frac{300}{1+5e^{-0,15t}}.$$

c) On calcule l'image de 5 par le modèle,

$$P(5) = \frac{300}{1+5e^{-0,15\times 5}} = 89{,}237\ \ldots$$

Dans cinq ans, la population de chèvres sera de 89 têtes.

d) On cherche la valeur de t pour laquelle $P = 150$,

$$\frac{300}{1+5e^{-0,15t}} = 150\text{, d'où } 1+5e^{-0,15t} = 2.$$

On en tire

$$5e^{-0,15t} = 1 \text{ et } e^{-0,15t} = \frac{1}{5}.$$

En prenant le logarithme des deux membres de l'équation,

$$-0{,}15t = \ln\left(\frac{1}{5}\right) = \ln 1 - \ln 5 = 0 - \ln 5 = -\ln 5.$$

En isolant t,

$$-0{,}15t = -\ln 5\text{, d'où } t = \frac{-\ln 5}{-0{,}15} = 10{,}729\ \ldots$$

La taille de la population sera de 150 têtes dans 11 ans.

EXERCICES SYNTHÈSE

1. $\dfrac{dy}{dx} = 0{,}25x$, d'où $dy = 0{,}25x\,dx$ et en intégrant, on a $y = 0{,}125x^2 + k$.

2. $\dfrac{dy}{dx} = xy$, d'où $\dfrac{dy}{y} = x\,dx$ et, en intégrant, on a $\ln|y| = 0{,}5x^2 + k$ et $y = b_0 e^{0,5x^2}$.

3. $\dfrac{dy}{dx} = y$, d'où $\dfrac{dy}{y} = dx$ et, en intégrant, on a $\ln|y| = x + k$ et $y = b_0 e^x$.

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y}$, d'où $y\,dy = dx$ et, en intégrant, on a $y^2 = 2(x + k)$.

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{xy}$, d'où $y\,dy = \dfrac{dx}{x}$ et, en intégrant, on a $y^2 = 2(\ln|x| + k)$.

6. $\dfrac{dy/dx}{y} = a$, où a est une constante, d'où $\dfrac{dy}{y} = a\,dx$ et, en intégrant, on a $\ln|y| = ax + k$ et $|y| = e^k e^{ax}$, d'où $y = b_0 e^{ax}$.

7. $\dfrac{dy/dx}{y^2} = a$, où a est une constante, d'où $\dfrac{dy}{y^2} = a\,dx$ et, en intégrant, on a $\dfrac{-1}{y} = ax + k$ ou $y = \dfrac{-1}{ax+k}$.

8. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x}$, d'où $dy=\sqrt{x}\ dx$ et, en intégrant, on a $y=\dfrac{x^{3/2}}{3/2}+k=\dfrac{2x\sqrt{x}}{2}+k$.

9. a) $\dfrac{dy}{dx}-2x=0$. En séparant les variables, on obtient $dy = 2x\ dx$.

   En intégrant les deux membres, on obtient $\int dy = \int 2x\ dx$, d'où $y=x^2+k$., d'où $y = x^2 + k$.

   b) $\dfrac{dy}{dx}+3y=0$. En séparant les variables, on obtient $\dfrac{dy}{y}=-3dx$.

   En intégrant les deux membres, on obtient $\int \dfrac{1}{y}\ dy = -3\int dx$, d'où $|y| = -3x + k$ et $y = b_0e^{-3x}$.

   c) $\dfrac{dy}{dx}-3y=0$. En séparant les variables, on obtient $\dfrac{dy}{y}=3dx$.

   En intégrant les deux membres, on obtient $\int \dfrac{1}{y}\ dy = 3\int dx$ d'où $|y| = 3x + k$ et $y = b_0e^{3x}$.

   d) $\dfrac{dy}{dx}-x=e^x$. En séparant les variables, on obtient $dy = (x + e^x)dx$.

   En intégrant les deux membres, on obtient $\int dy=\int\left(x+e^x\right)dx$, d'où $y=\dfrac{x^2}{2}+e^x+k$.

   e) $x\dfrac{dy}{dx}=1$. En séparant les variables, on obtient $dy=\dfrac{1}{x}dx$.

   En intégrant les deux membres, on obtient $\int dy = \int\left(\dfrac{1}{x}\right)dx$, d'où $y = \ln|x| + k$.

   f) $x^2\dfrac{dy}{dx}=4$. En séparant les variables, on obtient $dy=\dfrac{4}{x^2}dx$.

   En intégrant les deux membres, on obtient : $\int dy=\int\left(\dfrac{4}{x^2}\right)dx=4\int x^{-2}\ dx$, d'où $y=\dfrac{-4}{x}+k$.

   g) $x^2\ dy = 5\ dx$. En séparant les variables, on obtient $dy=\dfrac{5}{x^2}dx$.

   En intégrant les deux membres, on obtient $\int dy=\int\left(\dfrac{5}{x^2}\right)dx=5\int x^{-2}\ dx$, d'où $y=\dfrac{-5}{x}+k$.

   h) $3x^2\ dy = 5y\ dx$. En séparant les variables, on obtient $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{5}{3x^2}dx$.

   En intégrant les deux membres, on obtient $\int\dfrac{dy}{y}=\int\dfrac{5}{3x^2}dx=\dfrac{5}{3}\int x^{-2}\ dx$, d'où $\ln|y|=\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{x^{-1}}{-1}\right)+k=\dfrac{-5}{3x}+k$.

   En isolant y, on obtient alors : $y = b_0e^{-5/3x}$.

10. a) $\dfrac{dy}{dx}-4x=0$. En séparant les variables, on obtient $dy = 4x\ dx$.

   En intégrant les deux membres, on obtient $\int dy = \int 4x\ dx$, d'où $y = 2x^2 + k$.

   En posant $x = 1$ et $y = 2$, on obtient : $2 = 2 + k$, d'où $k = 0$. La solution particulière est donc : $y = 2x^2$.

   b) $\dfrac{dy}{dx}-2y=0$. En séparant les variables, on obtient $\dfrac{dy}{y}=2dx$.

En intégrant les deux membres, on obtient $\int \frac{dy}{y} = 2\int dx$, d'où $\ln|y| = 2x + k$ et $y = b_0e^{2x}$.

En posant $x = 1$ et $y = 3$, on obtient $3 = b_0e^2$, d'où $b_0 = 3/e^2$. La solution particulière est donc : $y = \frac{3}{e^2}e^{2x} = 3e^{2x-2}$.

c) $x\frac{dy}{dx} = 4$. En séparant les variables, on obtient $dy = \frac{4}{x}dx$.

En intégrant les deux membres, on obtient $\int dy = \int \frac{4}{x}dx$, d'où $y = 4\ln|x| + k$.

En posant $x = 1$ et $y = 2$, on obtient : $2 = 4\ln 1 + k$, d'où $k = 2$. La solution particulière est donc : $y = 4\ln|x| + 2$.

d) $x^2\frac{dy}{dx} = 8$. En séparant les variables, on obtient $dy = \frac{8}{x^2}dx$.

En intégrant les deux membres, on obtient $\int dy = \int \frac{8}{x^2}\,dx = 8\int x^{-2}dx$, d'où $y = \frac{-8}{x} + k$.

En posant $x = 2$ et $y = 4$, on obtient : $4 = \frac{-8}{2} + k$ d'où $k = 8$. La solution particulière est donc $y = \frac{-8}{x} + 8$.

e) $x^2dx = 4ydy$. En séparant les variables, on obtient $y\,dy = \frac{x^2}{4}dx$.

En intégrant les deux membres, on obtient $\int y\,dy = \frac{1}{4}\int x^2\,dx$, d'où $\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{12} + k$ et $y^2 = \frac{x^3}{6} + 2k$.

En posant $x = 1$ et $y = 5$, on obtient $25 = \frac{1}{6} + 2k$, d'où $2k = \frac{149}{6}$. La solution particulière est donc $y^2 = \frac{x^3}{6} + \frac{149}{6}$.

f) $x^2dx = 4ydy$. En séparant les variables, on obtient $y\,dy = \frac{x^2}{4}dx$.

En intégrant les deux membres, on obtient $\int y\,dy = \frac{1}{4}\int x^2\,dx$, d'où $\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{12} + k$ et $y^2 = \frac{x^3}{6} + k$.

En posant $x = 0$ et $y = 4$, on obtient : $16 = k$. La solution particulière est donc $y^2 = \frac{x^3}{6} + 16$.

11. a) En séparant les variables de l'équation $e^xdx - \cos y\,dy = 0$, on obtient :

$$e^xdx = \cos y\,dy.$$

En appliquant l'opérateur d'intégration, on obtient :

$$e^x = \sin y + k.$$

Au point $(0; \pi/2)$, on obtient :

$$e^0 = \sin(\pi/2) + k.$$

Puisque $e^0 = 1$ et $\sin(\pi/2) = 1$, on a $k = 0$. Cela donne :

$$\sin y = e^x,$$
$$y = \arcsin(e^x).$$

Pour faire la vérification, on peut exprimer l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\cos y}.$$

Puisque $y = \arcsin(e^x)$, sa dérivée est $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. Puisque $\sin y = e^x$, on a $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-e^{2x}}$, d'où :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\frac{e^x}{\cos y}.$$

La fonction $y = \arcsin(e^x)$ est donc bien une solution de l'équation différentielle $e^x dx - \cos y\ dy = 0$.

b) En séparant les variables de l'équation $y\ dy - (y^2 + 1) \tan x\ dx = 0$, on obtient :

$$\frac{y}{y^2+1}dy=\tan x\ dx.$$

En appliquant l'opérateur d'intégration, on obtient :

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2+1\right|=\ln|\sec x|+k.$$

Au point (0; 0), on obtient :

$$\frac{1}{2}\ln\left|0^2+1\right|=\ln|\sec 0|+k.$$

Puisque $\ln 1 = 0$ et $\ln|\sec(0)| = \ln 1 = 0$, on a $k = 0$. Cela donne :

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2+1\right|=\ln|\sec x|.$$

En exprimant sous forme exponentielle, on obtient :

$$\sqrt{y^2+1}=\sec x \quad \text{et} \quad y^2+1=\sec^2 x.$$

En isolant y, on trouve :

$$y^2 = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x.$$

Puisque $\tan x$ varie de $-\infty$ à ∞, cela donne $y = \tan x$.

Pour faire la vérification, on peut exprimer l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(y^2+1)\tan x}{y}.$$

Si $y = \tan x$, sa dérivée doit être $\sec^2 x$. Par substitution, on obtient :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{((\tan x)^2+1)\tan x}{\tan x}=\tan^2 x+1=\sec^2 x.$$

La fonction $y = \tan x$ est donc bien une solution de l'équation différentielle $y\ dy - (y^2 + 1) \tan x\ dx = 0$.

12. a) L'accélération étant constante, on a :

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-9{,}8\ \text{m/s}^2.$$

b) En intégrant, on obtient

$$\frac{dy}{dt}=-9{,}8t+k\ \text{m/s}.$$

Puisque la vitesse initiale est de 30 m/s, on obtient :

$$\frac{dy}{dt}=-9{,}8t+30\ \text{m/s}.$$

En intégrant à nouveau, on obtient :

$$y = -4{,}9t^2 + 30t + k\ \text{m}$$

Puisque la hauteur initiale est de 60 m, la solution de l'équation différentielle est :

$$y = -4{,}9t^2 + 30t + 60\ \text{m}$$

c) On doit trouver t lorsque $y = 0$. Cela donne :

$$-4{,}9t^2 + 30t + 60 = 0$$

qui donne :

$$t=\frac{-30\pm\sqrt{30^2-4\times -4{,}9\times 60}}{-9{,}8}.$$

D'où: $t_1 = -1{,}59$ s et $t_2 = 7{,}71$ s. Le corps touchera le sol à 7,71 s.

13. a) Le taux de variation de sel par rapport au temps est égal au produit de la concentration de sel par le débit d'eau. Représentons par Q la quantité en kilogramme de sel dans l'eau et t le temps en minutes à partir du moment où débute le procédé. La concentration de sel dans l'eau est alors :

$$\frac{Q}{2\,000}\frac{\text{kg}}{\text{L}}$$

et le débit de saumure est –5 L/min. Le taux de variation est alors :

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{Q}{2\,000}\frac{\text{kg}}{\text{L}}\times -5\frac{\text{L}}{\text{min}}=-0{,}0025\ Q\ \text{kg/min}.$$

L'équation différentielle est donc :

$$\frac{dQ}{dt}=-0{,}0025\ Q\ \text{kg/min}.$$

En séparant les variables et en intégrant, on a alors :

$$\frac{dQ}{Q}=-0{,}0025\ dt$$

$$\int\frac{dQ}{Q}=-0{,}0025\int dt$$

$$\ln|Q| = -0{,}025t + k$$

$$Q = \pm e^k e^{-0{,}0025t} = b_0 e^{-0{,}0025t}$$

Puisque la quantité initiale est de 15 kg, on a $b_0 = 15$ et la fonction cherchée est :

$$Q(t) = 15e^{-0{,}0025t}\ \text{kg}$$

b) La quantité de sel dans le réservoir au bout de 60 minutes est :

$$Q(10) = 15e^{-0{,}0025\times 60} = 12{,}9\ \text{kg}$$

Après soixante minutes, il reste encore 12,9 kg de sel dans le réservoir.

c) La quantité aura diminué de moitié lorsque :

$$Q(t) = 15e^{-0{,}0025t} = 7{,}5\ \text{kg}$$

$$e^{-0{,}0025t} = 0{,}5$$

$$-0{,}0025t=\ln 0{,}5 \text{ et } t=\frac{\ln 0{,}5}{-0{,}0025}=277{,}25...$$

Il faudra environ 277 jours avant que la quantité de sel dans la citerne ait diminué de moitié.

14. a) Le taux de variation est donnée en pourcentage de la population P, l'équation différentielle est donc :

$$\frac{dP}{dt}=-0{,}08P.$$

b) En séparant les variables et en intégrant, on obtient :

$$\frac{dP}{P}=-0{,}08dt,$$

$$\int\frac{dP}{P}=-0{,}08\int dt,$$

$$\ln|P|=-0{,}08t+k,$$

$$|P|=e^{-0{,}08t+k}=e^k e^{-0{,}08t}.$$

Le modèle est $P(t) = P_0e^{-0{,}08t}$. Puisque la population actuelle est de 5 000 têtes, on a $P(0) = P_0e^0 = 5\,000$, d'où $P_0 = 5\,000$. On a donc : $P(t) = 5\,000\ e^{-0{,}08t}$ cerfs.

c) Le troupeau aura perdu 3 000 têtes lorsqu'il n'y aura plus que 2 000 têtes. On cherche donc t tel que :

$$P(t) = 5\,000\ e^{-0{,}08t} = 2\,000.$$

Cela donne :

$$e^{-0{,}08t} = 0{,}4,$$

$$-0{,}08t = \ln 0{,}4,$$

et :

$$t=\frac{\ln 0{,}4}{-0{,}08}=11{,}45.$$

La population aura chuté de 3 000 cerfs dans environ 11 ans.

15. a) La caractéristique de la désintégration des matières radioactives est un taux de variation relatif constant. On a donc :

$$\frac{dQ/dt}{Q}=a, \text{ d'où } \frac{dQ}{Q}=adt, \int\frac{dQ}{Q}=\int adt \text{ et } Q(t)=Q_0e^{at}.$$

Puisque la demi-vie est de 5730 ans, on a $Q(5730) = Q_0e^{5730a} = 0{,}5Q_0$ d'où l'on tire $e^{5730a} = 0{,}5$. En prenant le logarithme naturel, on obtient $5730a = \ln 0{,}5$ et $a = (\ln 0{,}5)/5730 = -0{,}00012$ et $Q(t) = Q_0e^{-0{,}00012t}$.

b) $Q(t) = Q_0e^{-0{,}00012t} = 0{,}1Q_0$ d'où l'on tire $e^{-0{,}00012t} = 0{,}1$. en prenant le logarithme naturel, on obtient $-0{,}00012t = \ln 0{,}1$ et $t = (\ln 0{,}1)/(-0{,}00012) = 19\,188$ ans. On peut dater à environ 19 200 ans.

16. a) Le taux de croissance de la population est proportionnel à sa taille et le taux d'émigration est constant, l'équation différentielle est

$$\frac{dP}{dt}=aP-m=a\left(P-\frac{m}{a}\right).$$

b) En séparant les variables,

$$\frac{dP}{P-m/a}=adt.$$

On applique l'opérateur d'intégration.

$$\int\frac{dP}{P-m/a}=a\int dt.$$

En posant $u = P - m/a$, on a $du = dP$ et

$$\int\frac{du}{u}=a\int dt, \text{ d'où } \ln|u|=at+k \text{ et } u=b_0e^{at}.$$

En considérant P_0 la poputalion initiale, on a $P_0 - m/a = b_0e^{0,2t}$, d'où $b_0 = P_0 - m/a$ et

$$P-\frac{m}{a}=\left(P_0-\frac{m}{a}\right)e^{at}, \text{ d'où } P=\frac{m}{a}+\left(P_0-\frac{m}{a}\right)e^{at}.$$

Le modèle est $P(t)=\frac{m}{a}+\left(P_0-\frac{m}{a}\right)e^{at}$.

c) Pour que la taille de la population ait une croissance exponentielle, il faut que le facteur de e^{at} soit positif, on doit donc avoir

$$P_0-\frac{m}{a}>0, \text{ d'où } \frac{m}{a}<P_0 \text{ et } m<aP_0.$$

d) Pour que la taille de la population soit stable, il faut que le facteur de e^{at} soit nul, on doit donc avoir

$$P_0-\frac{m}{a}=0, \text{ d'où } \frac{m}{a}=P_0 \text{ et } m=aP_0.$$

e) Pour que la taille de la population ait une décroissance exponentielle, il faut que le facteur de e^{at} soit négatif, on doit donc avoir

$$P_0-\frac{m}{a}<0, \text{ d'où } \frac{m}{a}>P_0 \text{ et } m>aP_0.$$