GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE *des* CONIQUES

CHAPITRE 2

Utiliser les équations des coniques dans la résolution de problèmes divers.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- l'utilisation du vocabulaire relatif aux coniques dans la description de divers phénomènes;
- l'utilisation des équations des coniques pour la construction d'un modèle algébrique d'un phénomène;
- l'utilisation de l'équation d'une conique pour l'analyse d'un phénomène.

OBJECTIFS

2.1 Utiliser des équations de coniques dans la description et l'analyse de situations diverses.

2.2 Déterminer les paramètres d'une conique pour décrire un phénomène décrit verbalement.

2.3 Décrire symboliquement une situation à l'aide de l'équation d'une conique.

2.4 Utiliser la complétion du carré pour déterminer les paramètres d'une conique à partir de son équation.

2.1 Cercles et paraboles

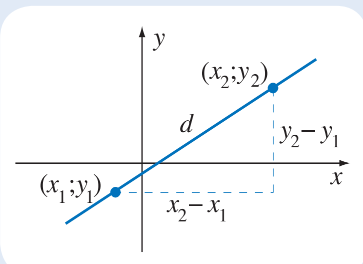
Lieu géométrique

Coniques01

Le **lieu géométrique d'une équation** est la figure formée par l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient cette équation.

Les deux problèmes fondamentaux de la géométrie analytique sont :

- étant donnée une équation, Déterminer le lieu géométrique correspondant;
- étant donné un lieu défini par une propriété géométrique, Déterminer l'équation correspondante.



Distance entre deux points

Soit $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ deux points quelconques du plan cartésien. La **distance** entre ces deux points est donnée par :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

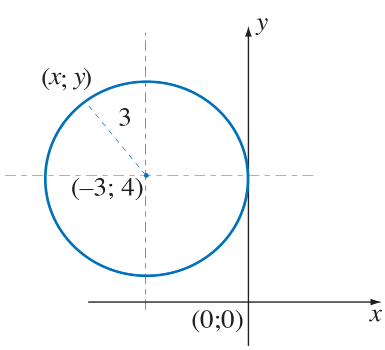
Ce résultat est obtenu en utilisant le théorème de Pythagore.

Cercle

Un **cercle** est le lieu des points équidistants d'un point appelé **centre**, on peut trouver l'équation d'un cercle lorsqu'on connaît son centre et son rayon.

EXEMPLE 2.1.1

Représenter graphiquement le cercle de rayon 3 centré à (–3; 4) et trouver l'équation de ce cercle.



Solution

On cherche l'équation décrivant le lieu des points situés à une distance de trois unités du point (–3; 4). On a donc :

$$d = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = 3$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation, on obtient :

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9;$$

donc, $$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0.$$

Forme générale et complétion du carré

On constate que l'équation se présente sous deux formes, la **forme canonique**

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

et la **forme générale**

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Lorsqu'on veut représenter le cercle graphiquement, il est plus intéressant de connaître la forme canonique

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

Coniques02

car celle-ci nous donne directement le centre et le rayon du cercle, ce qui facilite beaucoup la représentation graphique. Pour obtenir cette forme, il faut procéder par complétion du carré. Rappelons la caractéristique des carrés parfaits. Dans la forme canonique, les termes $(x - h)^2$ et $(y - k)^2$ sont des carrés parfaits. En élevant au carré l'un de ces termes, on peut trouver la caractéristique fondamentale des carrés parfaits. En effet

$$(x - h)^2 = x^2 - 2hx + h^2.$$

On constate que, dans un carré parfait, le troisième terme est obtenu en divisant le coefficient du deuxième terme par 2 et en l'élevant au carré, soit

$$\left(\frac{-2h}{2}\right)^2 = h^2.$$

Cette caractéristique nous indique comment compléter un carré. Il faut ajouter un troisième terme dont la valeur est obtenue en divisant par 2 le coefficient du deuxième terme et en l'élevant au carré. Voyons comment utiliser cette technique pour faciliter la représentation graphique d'un cercle.

Coniques03

EXEMPLE 2.1.2

Trouver le centre et le rayon et représenter graphiquement le cercle d'équation :

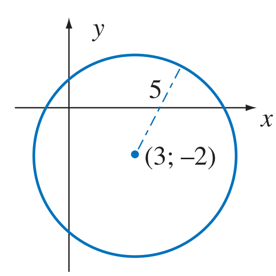
$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0.$$

Solution

Pour trouver le centre et le rayon du cercle, nous allons compléter le carré de l'expression en x et de l'expression en y. Pour conserver l'égalité, il faut donc additionner aux deux membres de l'équation le terme permettant de compléter ces expressions. Ce qui donne :

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 12 + 9 + 4$$
$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5^2$$

Le centre est donc (3; –2) et le rayon est 5.



Un peu d'histoire

LES CONIQUES

Menechme

vers ~380 à ~320

Ménechme fut un élève du philosophe Platon et du mathématicien Eudoxe de Cnide (vers ~408 à ~355). Il fut, avec Aristote, précepteur d'Alexandre la Grand. Il se fit connaître surtout comme astronome et géomètre. Sa plus importante contribution fut la découverte des sections coniques dans la recherche d'une solution au problème de la duplication du cube. Ce problème consistant, en utilisant seulement une règle et un compas, à construire un cube dont le volume était le double de celui d'un cube donné. Dinostrate, frère de Ménechme, fut également mathématicien.

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

Apollonius

(~262 à ~190)

Apollonius de Perge, appelé le « grand géomètre » a eu une influence marquante dans le développement des mathématiques grâce surtout à son ouvrage « *Coniques* » dans lequel il fait l'étude des propriétés géométriques des courbes qui nous sont aujourd'hui familières : la parabole, l'ellipse et l'hyperbole (NH Apollonius).

L'ouvrage d'Apollonius comportait 8 volumes dont seuls les 4 premiers ont été conservés dans le texte grec. Une version arabe des sept premiers volumes a également été conservée. Les volumes 1 à 4 sont une introduction élémentaire aux propriétés fondamentales des coniques qui étaient connues des autres géomètres grecs. Dans les volumes 5 à 7, il présente une étude plus originale s'intéressant, par exemple, à la normale et à la courbure d'une conique.

Parabole

EXEMPLE 2.1.3

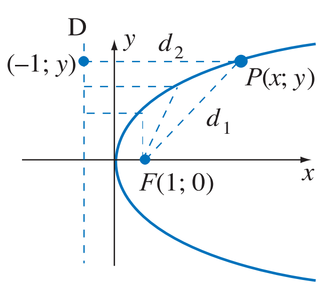
Coniques04

Déterminer le lieu des points dont la distance au point (1; 0) est égale à la distance à la droite $x = -1$.

■ *Solution*

Soit $(x; y)$ un point quelconque du lieu géométrique. Sa distance au point (1; 0) est :

$$d_1 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$



La distance du point $(x; y)$ à la droite $x = -1$ est la longueur de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite. Il faut donc calculer la distance entre le point $(x; y)$ et le point $(-1; y)$, ce qui donne :

$$d_2 = \sqrt{(x-(-1))^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x+1)^2}.$$

Un point $(x; y)$ fait partie du lieu si $d_1 = d_2$, ce qui donne :

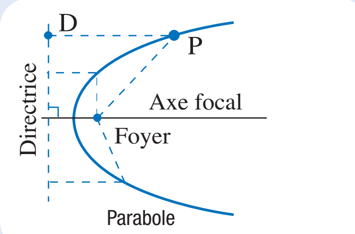
$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2}.$$

En élevant au carré et en regroupant, on obtient :

$$(x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1$$
$$y^2 = 4x.$$

Parabole

Analytiquement, une **parabole** est le lieu des points dont la distance non dirigée à un point fixe appelé **foyer** est égale à la distance non dirigée à une droite fixe appelée **directrice**. La distance d'un point au foyer est appelée **distance focale**. On constate facilement que le point sommet de la parabole est le point milieu entre le foyer et la directrice.



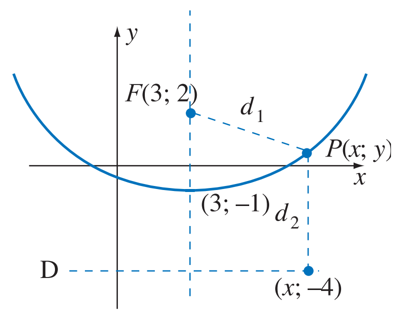
EXEMPLE 2.1.4

Déterminer le sommet et l'équation de la parabole dont le foyer est (3; 2) et dont la directrice est $y = -4$.

■ *Solution*

L'axe focal étant perpendiculaire à la directrice, il est vertical. De plus, puisque le point sommet est à mi-chemin entre le foyer et la directrice, c'est le point (3; –1). On cherche le lieu des points P(x; y) dont la distance au point (3; 2) est égale à la distance au point (x; –4), alors

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(y+4)^2}$$



En élevant au carré, on obtient :

$$\begin{aligned}(x-3)^2+(y-2)^2 &= (y+4)^2\\ x^2-6x+9+y^2-4y+4 &= y^2+8y+16\\ x^2-6x-3 &= 12y\end{aligned}$$

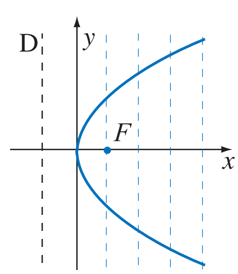
d'où l'on tire :

$$y=\frac{1}{12}(x^2-6x-3)=\frac{x^2}{12}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}.$$

Techniques pour tracer une parabole

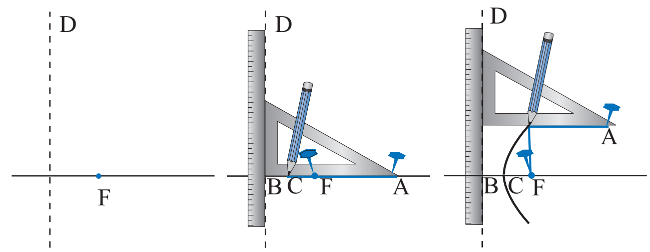
Lorsqu'on connaît le foyer et la directrice d'une parabole, on peut facilement esquisser le graphique en procédant comme suit.

On détermine d'abord le sommet qui, selon la définition de la parabole, est à mi-chemin entre la directrice et le foyer. On trace une famille de droites parallèles à la directrice. Pour chacune de ces droites parallèles et en prenant le foyer comme centre, on trace un arc de cercle dont le rayon est la distance entre la directrice et la droite. Les points d'intersection de l'arc de cercle avec la droite parallèle à la directrice sont alors deux points de la parabole.

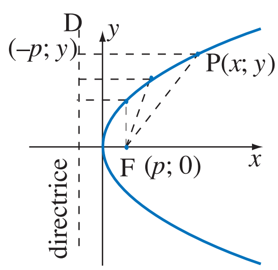


Technique pour tracer une parabole

On peut également tracer une parabole dont la directrice et le foyer sont connus à l'aide d'une règle et d'une équerre. À l'aide de punaises plantées au foyer et à l'extrémité de l'équerre, on fixe un fil dont la longueur est la même que l'équerre. On tend ensuite ce fil à l'aide de la pointe d'un crayon et on glisse l'équerre le long d'une règle placée le long de la directrice.



Technique pour tracer une parabole



ÉQUATION CANONIQUE

Parabole de sommet (0; 0) et de foyer (p; 0)

L'**équation canonique** de la parabole de sommet (0; 0) et de foyer (p; 0) où $p > 0$ est

$$y^2 = 4px.$$

Démonstration

Coniques05

Soit P(x; y), un point de la parabole dont on cherche l'équation. Les segments $\overline{\mathrm{PD}}$ et $\overline{\mathrm{PF}}$ sont alors de même longueur :

$$\overline{\mathrm{PF}} = \sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-p)^2+y^2}$$
$$\overline{\mathrm{PD}} = \sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2} = \sqrt{(x+p)^2}.$$

En égalant ces deux expressions, on a :

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = \sqrt{(x+p)^2}.$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation, on a :

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2.$$

En développant les binômes, on obtient :

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

ce qui donne en regroupant les termes :

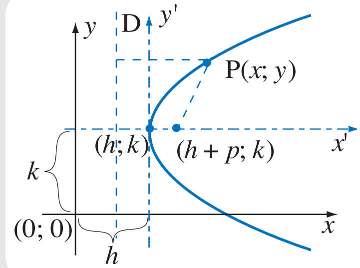
$$y^2 = 4px \text{ où } p > 0$$

ÉQUATION CANONIQUE

Parabole de sommet (h; k) et de foyer (h + p; k)

L'équation de la parabole de sommet (h; k) et de foyer ($h + p$; k) où $p > 0$ est

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$



Démonstration

Considérons un système d'axes $x'y'$ dont l'origine est au point (h; k). L'équation de la parabole dans ce système d'axes est

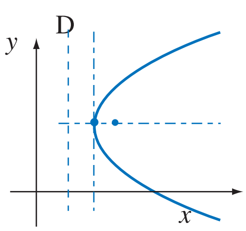
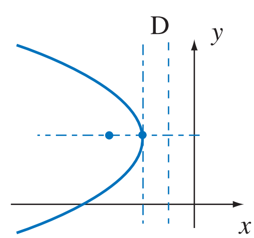
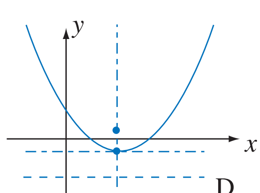
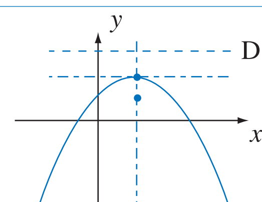
$$y'^2 = 4px'.$$

En substituant à x' et y' leur coordonnées dans le système de référence xy, soit $x' = x - h$ et $y' = y - k$, on obtient

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

REMARQUE

Lorsque le foyer est à gauche de la directrice, on a un signe négatif devant le coefficient $4p$ et la concavité de la courbe est vers la gauche.

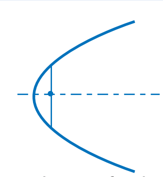
	ÉQUATION CANONIQUE PARABOLE DE SOMMET (h; k)	
Parabole horizontale	 $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ Concave à droite	 $(y - k)^2 = -4p(x - h)$ Concave à gauche
Parabole verticale	 $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ Concave vers le haut	 $(x - h)^2 = -4p(y - k)$ Concave vers le bas

Coniques06

Coniques06

Largeur focale de la parabole

On appelle **largeur focale d'une parabole** la longueur de la corde passant par le foyer et perpendiculaire à l'axe de la parabole.



Largeur focale

On peut montrer assez facilement que la largeur focale de la parabole est égale à $4p$, c'est-à-dire deux fois la distance entre le foyer et la directrice. Il suffit de substituer dans l'équation l'abscisse ou l'ordonnée du foyer, selon que l'axe focal est horizontal ou vertical, afin de trouver les coordonnées des deux points à l'extrémité de la corde focale et de calculer la distance entre ces deux points. Cette largeur focale peut servir à déterminer rapidement deux points de la parabole.

Forme générale de l'équation de la parabole

La forme générale de l'équation d'une parabole diffère selon que l'axe de la parabole est horizontal ou vertical. Lorsque l'axe est horizontal, la forme est

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Lorsque l'axe est vertical, la forme est

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Lorsque l'équation est sous une de ces formes, on peut, par complétion du carré, la ramener sous la forme canonique, afin de déterminer le sommet, le foyer, la directrice, la largeur focale et la concavité et esquisser le graphique.

Fonctions quadratiques

Équations_03

Coniques08

L'équation d'une parabole verticale peut se ramener à une forme définissant une fonction, soit $y = ax^2 + bx + c$ que l'on appelle **fonction quadratique**. Certaines des caractéristique des fonctiosn quadratiquess nous intéressent plus particulièrement. L'**ordonnée à l'origine** qui est l'ordonnée du point d'intersection avec l'axe vertical, s'obtient en posant $x = 0$, ce qui donne $y = c$. Les **zéros** d'une fonction sont les valeurs de la variable indépendante dont l'image est 0 ($y = 0$). Dans le cas de la fonction quadratique, les zéros sont

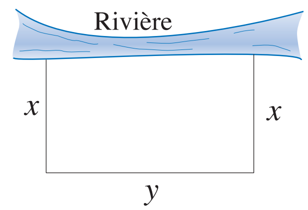
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

L'**axe de symétrie** d'une parabole de la forme $y = ax^2 + bx + c$ est $x = -b/2a$ et l'abscisse du sommet est $-b/2a$ puisque celui-ci est sur l'axe de symétrie.

Dans les situations décrites par une fonction quadratique, le point sommet présente un intérêt particulier car il correspond à la valeur optimale de la variable dépendante. Pour déterminer cette valeur, il suffit donc de calculer l'abscisse du point sommet $x = -b/2a$, puis de substituer la valeur de l'abscisse dans la règle de correspondance pour calculer l'ordonnée du point sommet. Dans les problèmes d'optimisation impliquant une fonction quadratique, nous avons souvent à utiliser cette forme.

EXEMPLE 2.1.5

Vous possédez 200 mètres de treillis à clôture et vous désirez clôturer une partie de terrain rectangulairesur le bord d'une rivière. Ce terrain devant être loué, l'accès à la rivière est un atout. Le terrain ne sera donc clôturé que sur trois côtés. Vous désirez que l'aire de l'enclos soit maximale de façon à vous assurer un meilleur revenu. Déterminer les dimensions qu'il faut donner au terrain.



Solution

La longueur totale de la clôture étant de 200 m, la longueur et la superficie de l'enclos dépendent de sa largeur. En posant x pour la largeur de l'enclos, y pour la longueur et S pour l'aire, la longueur sera décrite en fonction de la largeur par :

$$y + 2x = 200 \text{ ou } y = 200 - 2x.$$

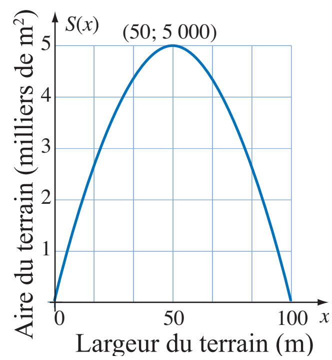
L'aire est décrite par $S = xy$. Cependant, $y = 200 - 2x$. On peut alors exprimer la superficie en fonction de la variable x, ce qui donne :

$$S(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2.$$

L'aire est alors décrite par une fonction quadratique dont la variable indépendante est la largeur du terrain à clôturer. Pour que l'aire soit maximale, il faut que la largeur soit

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-4} = 50.$$

La largeur du terrain est $x = 50$ m, sa longueur $y = 100$ m et son aire est $S(50) = 5\ 000$ m^2.



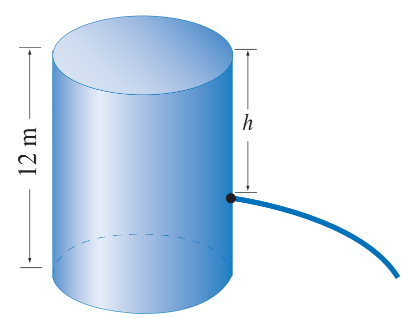
Coniques09

EXEMPLE 2.1.6

Considérons un réservoir de 12 m de hauteur, rempli d'eau. L'équation de Bernouilli régissant le mouvement des liquides incompressibles décrit la vitesse d'éjection de l'eau par une petite ouverture aménagée dans la paroi à une profondeur h de la façon suivante :

$$v = (2gh)^{1/2}.$$

En posant que $g = 9{,}8$ m/s^2, représenter graphiquement ce modèle en précisant son domaine de validité.



Solution

Par l'équation de Bernouilli, la vitesse est décrite en fonction de la profondeur de l'ouverture par :

$$v(h) = (19{,}6\ h)^{1/2} = 4{,}43\ h^{1/2}.$$

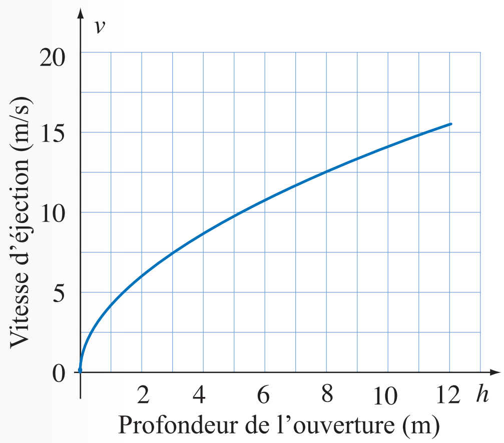
Le domaine de validité est l'intervalle [0; 12] puisque le réservoir a 12 m de hauteur, et que h représente la profondeur à laquelle est pratiquée l'ouverture. Pour représenter graphiquement la fonction, il faut calculer quelques correspondances.

REMARQUE

Les correspondances dont le lieu géométrique est un cercle ou une parabole d'axe horizontal ne définissent pas des fonctions puisque certains éléments du domaine ont plus qu'une image. On peut cependant obtenir des fonctions en considérant seulement un demi-cercle ou une branche de la parabole. Les fonctions ainsi obtenues sont également des modèles utiles pour l'étude de différentes situations.

VITESSE D'ÉJECTION

Profondeur h (m)	Vitesse v (m/s)
0	0
1	4,43
2	6,26
3	7,67
4	8,86
5	9,91
6	10,85
7	11,72
8	12,53
9	13,29
10	14,01
11	14,69
12	15,35



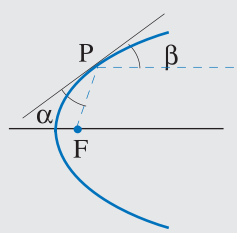
REMARQUE

On se souvient que la pression est directement proportionnelle à la hauteur de la colonne de liquide. C'est cette pression qui est la cause de la variation de la vitesse d'éjection en fonction de la profondeur.

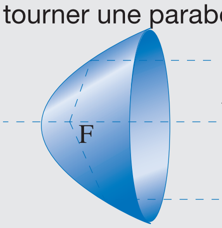
Un peu *d'histoire*

ASPECTS INTÉRESSANTS DE LA PARABOLE

La parabole a une propriété optique fort intéressante. Si on prend un point P quelconque d'une parabole et que l'on trace la tangente à la parabole en ce point, la droite joignant le point P au foyer fait avec la tangente le même angle que la droite partant du point P et parallèle à l'axe de la parabole. C'est-à-dire que l'angle α est égal à l'angle β dans la figure suivante.



Cette propriété signifie qu'un rayon lumineux qui est issu du foyer sera réfléchi parallèlement à l'axe de la parabole. De la même façon, un rayon lumineux parallèle à l'axe de la parabole sera réfléchi au foyer. La paraboloïde qui est la figure obtenue en faisant tourner une parabole autour de son axe a également cette propriété.



Ainsi, si l'on place une source lumineuse au foyer d'une paraboloïde, les rayons lumineux seront réfléchis sur la surface paraboloïdale parallèlement à l'axe de la paraboloïde. Le faisceau lumineux obtenu sera très puissant puisque tous les rayons lumineux seront réfléchis parallèlement à l'axe. Les phares d'automobile et les lampes de poche sont des exemples d'utilisation de cette propriété.

De la même façon, les rayons lumineux qui pénètrent dans une paraboloïde parallèlement à l'axe sont réfléchis au foyer. Cette propriété sert à concentrer les rayons lumineux ou sonores comme dans le radiotélescope, le radar, les capteurs d'énergie solaire.

Signalons de plus que la surface d'un liquide contenu dans un cylindre en rotation forme une paraboloïde et que la trajectoire de certaines comètes est une parabole ayant le soleil comme foyer. La courbe décrite par les câbles d'un pont suspendu (pont Pierre-Laporte) est une parabole, le poids du pont étant réparti également entre chaque point du câble.

NH Parabole

2.2 Exercices

1. Déterminer l'équation du cercle de rayon 4 centré à (3; 2).

2. Déterminer le centre et le rayon et représenter graphiquement le cercle
$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0.$$

3. Déterminer l'équation de la tangente au point (4; 2) du cercle
$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$$

4. Déterminer l'équation du cercle concentrique au cercle $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 44 = 0$ passant par le point (2; 1).

5. Déterminer les deux points de la droite $2x + y = 3$ à une distance 3 du point (1; 4).

6. En ayant recours à l'égalité des distances au foyer et à la directrice, déterminer l'équation de la parabole dont le sommet est à l'origine et dont le foyer est à (3; 0).

7. En ayant recours à l'égalité des distances au foyer et à la directrice, déterminer l'équation de la parabole dont le sommet est à l'origine et dont le foyer est à (0; –4).

8. En utilisant la forme canonique de l'équation d'une parabole, déterminer l'équation de la parabole dont le sommet est à l'origine et dont la directrice est $x = 2$.

9. En utilisant la forme canonique de l'équation d'une parabole, déterminer l'équation de la parabole dont le foyer est à (–2; 1) et dont la directrice est $x = 4$.

10. Déterminer le sommet, le foyer, la directrice, l'axe focal et la concavité et esquisser le graphique de la parabole d'équation $4y^2 - 12y - 16x + 1 = 0$. (Suggestion: ramener l'équation sous la forme canonique $(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$ où p est la distance du sommet au foyer.

11. Déterminer le sommet, le foyer, la directrice et la concavité et esquisser le graphique de la parabole d'équation $3x^2 + 6x + 4y + 7 = 0$.

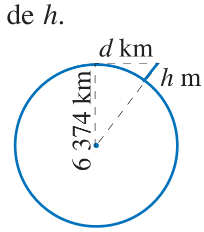
12. On lance un objet perpendiculairement dans les airs. La hauteur de cet objet par rapport au sol est donnée par $h(t) = 35t - 4{,}9t^2$ où t est le temps en secondes et h la hauteur en mètres.
    a) Déterminer la hauteur après 1 s, 2 s, 3 s, 4 s, 5 s.
    b) Combien de temps mettra cet objet pour atteindre sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?

13. Un homme a 12 mètres de clôture et veut s'en servir pour clôturer une portion de terrain devant servir à faire un jardin de superficie maximale. Déterminer les dimensions du jardin si celui-ci est contigu à la maison de façon à ne clôturer que trois côtés.

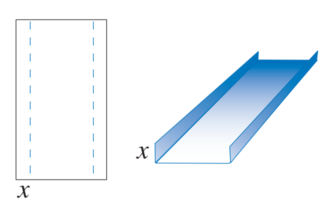
14. Vous devez couper une tige de métal de 160 cm en deux tiges qui seront pliées pour former deux carrés.

    a) Exprimer la somme des aires en fonction de la longueur x de la première tige.
    b) Déterminer la valeur de x pour que la somme des aires soit minimale.

15. Si le rayon de la Terre est de 6 374 kilomètres, h l'altitude d'un observateur au-dessus du niveau de la mer et d la distance de l'horizon visible, exprimer d en fonction de h.



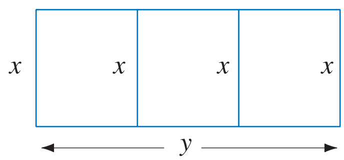
16. Une compagnie désire fabriquer des gouttières à partir de feuilles d'aluminium de 27 cm de largeur en repliant les deux extrémités perpendiculairement à la base.



    a) Exprimer la capacité de la gouttière (aire de la coupe transversale) en fonction de la largeur x de la partie repliée.

b) Quelle largeur doit-on replier pour que la capacité de la gouttière soit maximale?

17. Une compagnie possède 2 400 m de clôture avec lesquels elle désire faire trois portions de terrain de même superficie pour y placer les matériaux qu'elle utilise.



a) Exprimer la relation entre la longueur et la largeur des enclos.

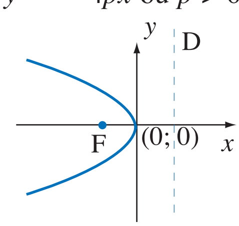
b) Exprimer l'aire totale en fonction de la largeur x des enclos.

c) Déterminer les dimensions de chacun des enclos pour que l'aire totale soit maximale.

18. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole d'équation $y^2 = 4x$ et de la droite d'équation $x + y - 3 = 0$.

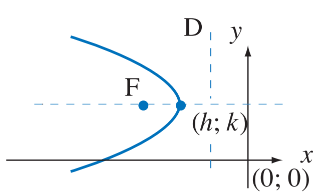
19. En ayant recours à l'égalité des distances au foyer et à la directrice, montrer que l'équation de la parabole dont le sommet est à (0; 0) et dont le foyer est à $(-p; 0)$ et de directrice $x = p$ est

$$y^2 = -4px \text{ où } p > 0.$$



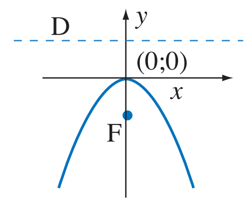
20. En ayant recours à l'égalité des distances au foyer et à la directrice, montrer que l'équation de la parabole dont le sommet est à $(h; k)$ et le foyer est à $(h - p; k)$ et de directrice $x = h + p$ est

$$(y - k)^2 = -4p(x - h) \text{ où } p > 0.$$



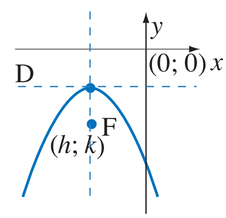
21. En ayant recours à l'égalité des distances au foyer et à la directrice, montrer que l'équation de la parabole dont le sommet est à (0; 0) et dont le foyer est à $(0; -p)$ et de directrice $y = p$ est

$$x^2 = -4py \text{ où } p > 0.$$



22. En ayant recours à l'égalité des distances au foyer et à la directrice, montrer que l'équation de la parabole dont le sommet est à $(h; k)$ et dont le foyer est à $(h; k - p)$ et de directrice $y = k + p$ est

$$(x - h)^2 = -4p(y - k) \text{ où } p > 0.$$



23. Déterminer l'équation du cercle passant par les points (–2; 6) et (7; 7) et dont le centre est sur la droite :

$$3x + y - 11 = 0.$$

24. Déterminer l'équation du cercle dont le centre est (2;4) et qui est tangent à la droite $4x + 3y - 10 = 0$. Déterminer le point de tangence.

25. Lorsque la charge est uniformément répartie, le câble d'un pont suspendu a la forme d'un arc de parabole. Sachant que les piliers d'un pont suspendu s'élèvent à 110 m plus haut que le tablier, que la distance entre les piliers est de 900 m et que le point le plus bas du câble est à 10 m du tablier du pont, Déterminer l'équation de la parabole en prenant le tablier du pont comme axe horizontal et l'axe de symétrie de la parabole comme axe vertical. Déterminer la longueur des tiges de soutien à 100 m et à 200 m du milieu du pont.

2.3 Ellipse et hyperbole

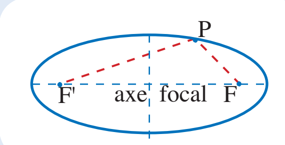
Les ellipses et les hyperboles sont définies respectivement par la somme et la différence des distances à deux points fixes appelés foyers.

Coniques10

Ellipse

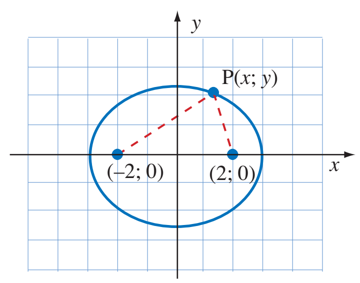
Ellipse

L'**ellipse** est la figure géométrique formée par les points dont la somme des distances à deux points fixes est constante. Les points fixes sont appelés les **foyers**, la droite passant par les deux foyers est appelée **axe focal** et la droite perpendiculaire à l'axe focal et passant par le centre de l'ellipse est appelée **axe conjugué**.



EXEMPLE 2.3.1

Déterminer l'équation décrivant le lieu des points dont la somme des distances aux points (2; 0) et (–2; 0) est égale à 6. Déterminer les points de rencontre de cette ellipse avec les axes.



■ ***Solution***

Soit un point P de coordonnées (x; y) dont la somme des distances aux deux foyers est égale à 6. La somme des distances est

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=6.$$

On transforme l'équation afin d'avoir un radical dans chaque membre

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=6-\sqrt{(x-2)^2+y^2}.$$

On élève au carré chaque membre de l'égalité et on développe les binômes,

$$(x+2)^2+y^2=36-12\sqrt{(x-2)^2+y^2}+(x-2)^2+y^2.$$

$$x^2+4x+4+y^2=36-12\sqrt{(x-2)^2+y^2}+x^2-4x+4+y^2.$$

On isole le terme comportant un radical et on simplifie,

$$8x-36=-12\sqrt{(x-2)^2+y^2},\ \text{d'où}\ 2x-9=-3\sqrt{(x-2)^2+y^2}.$$

On élève au carré chaque membre de l'égalité,

$$4x^2-36x+81=9[(x-2)^2+y^2].$$

On développe le binôme et on applique la distributivité

$$4x^2-36x+81=9[x^2-4x+4+y^2]$$

$$4x^2-36x+81=9x^2-36x+36+9y^2.$$

On regroupe les variables du même côté de l'égalité.

$$-5x^2-9y^2=-45.$$

On divise chaque membre de l'équation par –45,

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$$

Pour déterminer les points d'intersection avec l'axe horizontal, on substitue 0 à y dans l'équation, ce qui donne

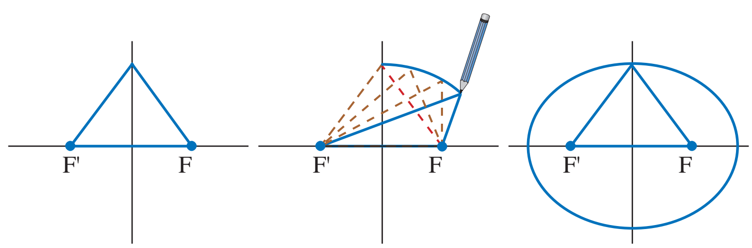
$$x^2 = 9 \text{ et } x = \pm 3.$$

Pour déterminer les points d'intersection avec l'axe vertical, on substitue 0 à x dans l'équation, d'où :

$$y^2 = 5 \text{ et } y = \pm\sqrt{5}.$$

Technique pour tracer une ellipse

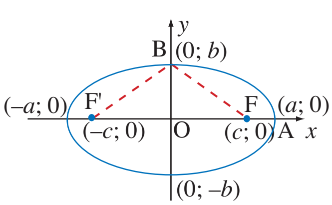
À l'aide de deux clous et d'une corde, on peut tracer une ellipse dont on connaît les foyers et la somme des distances aux foyers. On plante les clous aux foyers et on forme une boucle de corde dont la longueur est égale à la somme des distances aux foyers d'un point de l'ellipse et de la distance entre les foyers. On trace alors l'ellipse en déplaçant le crayon tout en maintenant la corde tendue.



Technique pour tracer une ellipse

Paramètres de l'ellipse

Coniques11



Pour trouver l'équation d'une ellipse, nous aurons à mettre en évidence certains de ses paramètres. Pour ce faire, considérons une ellipse dont l'axe focal est horizontal puis traçons un système d'axes dont l'origine est le point milieu entre les foyers. Représentons par a la demi-longueur de l'axe focal, par b la demi-longueur de l'axe conjugué et par c la distance du centre de l'ellipse à un de ses foyers. Considérons le sommet A de coordonnées (a; 0): sa distance au foyer F est $\overline{AF} = a - c$ et sa distance au foyer F' est $\overline{AF'} = a + c$. La somme des distances est alors :

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = (a - c) + (a + c) = 2a.$$

Considérons maintenant le point B de coordonnées (0; b). La symétrie de l'ellipse permet de conclure que sa distance au foyer F est égale à sa distance au foyer F'. La somme des distances est donc $\overline{BF} + \overline{BF'} = 2a$, d'où $2\,\overline{BF} = 2a$ et $\overline{BF} = a$. Par conséquent, l'hypoténuse du triangle rectangle OBF dont les sommets sont (0; b), (0; 0) et (c; 0) est de longueur a et par le théorème de Pythagore,

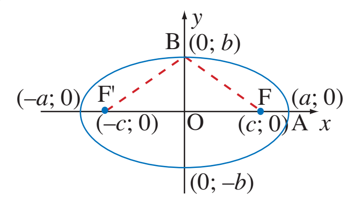
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

ÉQUATION CANONIQUE

Ellipse horizontale centrée à l'origine

L'équation de l'ellipse centrée au point (0; 0), d'axe focal horizontal, dont les foyers sont $(-c; 0)$ et $(c; 0)$, dont la demi-longueur de l'axe focal est a et la demi-longueur de l'axe conjugué est b, est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ où } a^2=b^2+c^2.$$



Démonstration

Soit un point P de l'ellipse de coordonnées $(x; y)$. Puisque la somme des distances de ce point aux deux foyers est égale à $2a$,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

On élève au carré les deux membres de l'égalité, on isole le terme comportant un radical et on simplifie,

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$
$$-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

En élève au carré chaque membre de l'égalité et on simplifie,

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$

On regroupe les variables et on factorise,

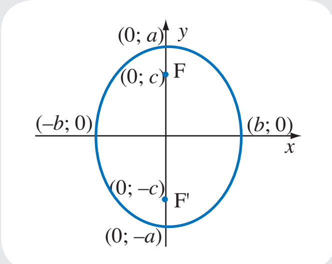
$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

Puisque $a^2=b^2+c^2$, il s'ensuit que $c^2-a^2=-b^2$ et en substituant,

$$-b^2x^2-a^2y^2=-a^2b^2$$
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

En divisant par a^2b^2,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



ÉQUATION CANONIQUE

Ellipse verticale centrée à l'origine

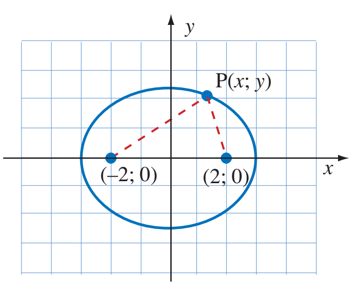
L'équation de l'ellipse centrée au point (0;0), d'axe focal vertical et dont la demi-longueur de l'axe focal est a et la demi-longueur de l'axe focal conjugué est b, est donnée par :

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \text{ où } a^2=b^2+c^2.$$

On procède de la même façon que précédemment pour démontrer ce résultat. Lorsque la forme de l'équation est connue, il suffit de déterminer les valeurs des paramètres pour trouver l'équation d'un lieu particulier. Il n'est pas nécessaire de refaire systématiquement la démarche à partir de la définition de ce lieu. Illustrons cette affirmation à l'aide d'un exemple.

EXEMPLE 2.3.2

Déterminer l'équation décrivant le lieu des points dont la somme des distances aux points (2; 0) et (–2; 0) est égale à 6.



Solution

La description du lieu des points permet de conclure que ce lieu est une ellipse. Les foyers étant sur l'axe horizontal, l'équation est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ .$$

et $a^2 = b^2 + c^2$. Les foyers étant (2; 0) et (–2; 0), il s'ensuit que $c = 2$. De plus $2a = 6$ d'où $a = 3$ et puisque $a^2 = b^2 + c^2$, on trouve par substitution $b^2 = 5$. En substituant les valeurs des paramètres, on trouve obtient

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$$

Forme générale de l'équation de l'ellipse

Par translation d'axes, on peut montrer que l'équation de l'ellipse centrée en $(h; k)$, dont la demi-longueur du grand axe est a et dont la demi-longueur du petit axe est b, est donnée par l'une des expressions suivantes :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1, \quad \text{si l'axe focal est horizontal,}$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1, \quad \text{si l'axe focal est vertical.}$$

Coniques12

Lorsque le centre est à (0; 0), en substituant à $(h; k)$ dans ces expressions, on obtient les formes déjà présentées. Ces équations sont sous **forme canonique** et on obtient la **forme générale** en développant les binômes et en regroupant tous les termes non nuls du même côté de l'égalité.

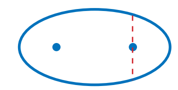
La forme générale de l'ellipse est :

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Lorsque l'axe focal est horizontal, on a $C > A$ et lorsque l'axe focal est vertical, on a $C < A$. Par complétion du carré, on passe de la forme générale à la forme canonique qui permet de préciser les caractéristiques graphiques de l'ellipse : centre, sommets, foyers et largeur focale.

Largeur focale de l'ellipse

La **largeur focale** de l'ellipse est la longueur de la corde passant par le foyer et perpendiculaire au grand axe de l'ellipse.



Coniques13

On peut calculer la largeur focale de l'ellipse en trouvant les points d'intersection de la corde focale et de l'ellipse et en calculant la distance entre ces points d'intersection, on a

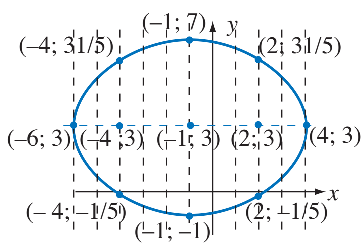
$$2b^2/a.$$

Ce résultat est le même que l'ellipse soit horizontale ou verticale. La largeur focale est utile à connaître pour tracer l'ellipse, car, en connaissant les sommets, les foyers et la largeur focale, on peut tracer l'ellipse à main levée avec une bonne précision.

EXEMPLE 2.3.3

Déterminer le centre, les sommets, les foyers et la largeur focale et esquisser le graphique de l'ellipse d'équation :

$$16x^2 + 25y^2 + 32x - 150y - 159 = 0.$$



Solution

On regroupe les termes,

$16x^2 + 32x + 25y^2 - 150y - 159 = 0$

$16(x^2 + 2x) + 25(y^2 - 6y) = 159.$

On complète les carrés,

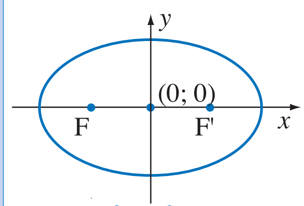
$16(x^2 + 2x + 1) + 25(y^2 - 6y + 9) = 159 + 16 + 225$

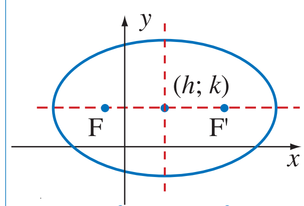
$16(x + 1)^2 + 25(y - 3)^2 = 400.$

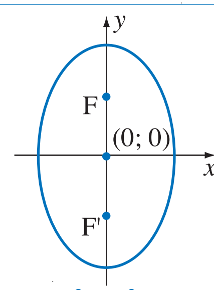
On divise par 400,

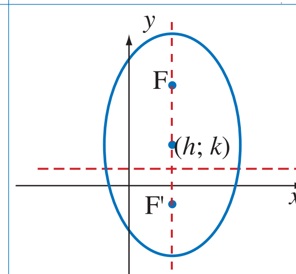
$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1.$$

Le centre est donc $(-1; 3)$, $a = 5$, $b = 4$ et $c = 3$. L'axe focal est horizontal et les sommets sont : $(4; 3)$, $(-6; 3)$, $(-1; -1)$ et $(-1; 7)$. Les foyers sont $(-4; 3)$ et $(2; 3)$ et la largeur focale est $32/5$. On peut donc déterminer quatre autres points de l'ellipse en additionnant et en soustrayant la valeur $16/5$ à l'ordonnée des deux foyers, ce qui donne les points $(2; 31/5)$, $(2; -1/5)$, $(-4; 31/5)$ et $(-4; -1/5)$.

<table>
<tr><th colspan="3">ÉQUATION CANONIQUE
DE L'ELLIPSE</th></tr>
<tr><th></th><th>Centrée à (0; 0)</th><th>Centrée à (h; k)</th></tr>
<tr><td>Ellipse horizontale</td><td>

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td><td>

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td>Ellipse verticale</td><td>

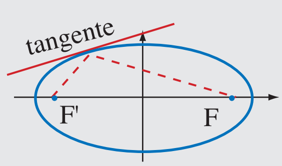
$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$</td><td>

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$</td></tr>
</table>

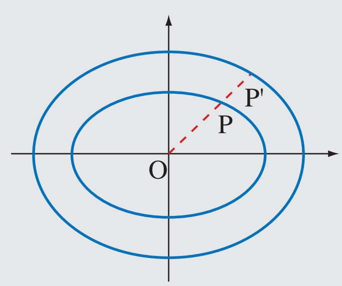
Un peu *d'histoire*

ASPECTS INTÉRESSANTS DE L'ELLIPSE

Les droites joignant un point quelconque d'une ellipse aux foyers forment des angles égaux avec la tangente en ce point. Par conséquent, si une source lumineuse est placée à un des foyers d'un réflecteur dont la surface est engendrée par la rotation d'une ellipse, tous les rayons sont réfléchis à l'autre foyer.



Toutes les ellipses pour lesquelles le rapport *c/a* est égal sont semblables. Si deux ellipses sont tracées concentriquement, comme à la figure suivante, le rapport OP/OP' est constant quelle que soit la position de la droite OPP'.



Les orbites de la Terre et des autres planètes ainsi que celles de leurs lunes sont elliptiques. La comète de Halley a une trajectoire elliptique dont le Soleil est un des foyers. En architecture, les arcs elliptiques sont utilisés pour leur beauté.

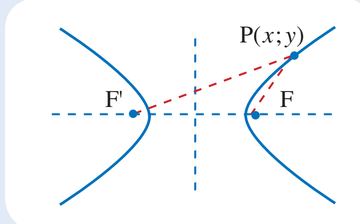
NH Ellipse

Hyperbole

Coniques14

Hyperbole

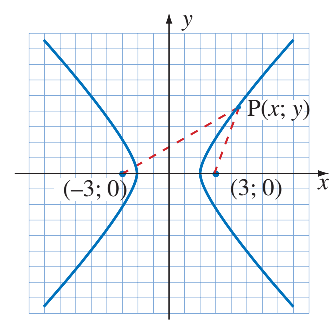
Analytiquement, l'**hyperbole** est la figure géométrique formée par les points dont la différence des distances à deux points fixes est constante. Les points fixes sont appelés les **foyers**, la droite passant par les foyers est appelée l'**axe focal** et la droite perpendiculaire à cet axe passant par le centre de l'hyperbole (point milieu entre les sommets) est appelée l'**axe conjugué.**



EXEMPLE 2.3.4

Représenter graphiquement et trouver l'équation décrivant le lieu des points dont la différence des distances aux points (3;0) et (– 3;0) est égale à 4. Déterminer les points de rencontre de cette hyperbole avec les axes.

Solution



Soit un point P de coordonnées (x; y) dont la différence des distances aux deux foyers est égale à 4, alors

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}-\sqrt{(x-3)^2+y^2}=4.$$

On transforme cette équation afin d'avoir un radical dans chaque membre de l'égalité,

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}=4+\sqrt{(x-3)^2+y^2}.$$

On élève au carré chaque membres de l'égalité et on développe,

$$(x+3)^2+y^2=16+8\sqrt{(x-3)^2+y^2}+(x-3)^2+y^2.$$

$$x^2+6x+9+y^2=16+8\sqrt{(x-3)^2+y^2}+x^2-6x+9+y^2.$$

On isole le terme comportant un radical et on simplifie,

$$12x-16=8\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

$$3x-4=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}.$$

On élève au carré les deux membres de l'égalité,

$$9x^2 - 24x + 16 = 4[(x-3)^2 + y^2].$$

En développant le binôme, on distribue et on regroupe,

$$9x^2 - 24x + 16 = 4[x^2 - 6x + 9 + y^2]$$

$$9x^2 - 24x + 16 = 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2$$

$$5x^2 - 4y^2 = 20$$

On divise par 20,

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1.$$

On détermine les points d'intersection avec l'axe horizontal en substituant 0 à y dans l'équation, ce qui donne

$$x^2 = 4 \text{ d'où } x = \pm 2.$$

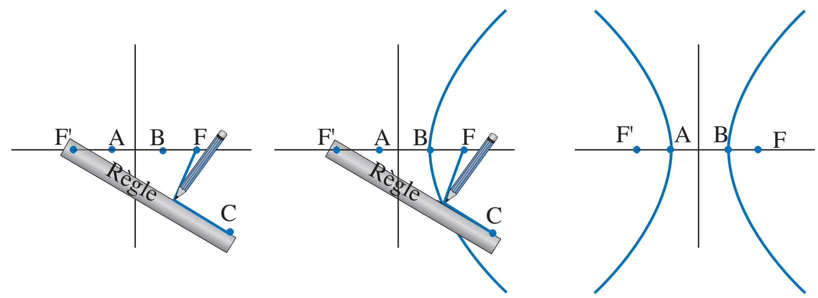
Les points d'intersection sont (–2; 0) et (2; 0). On détermine les points d'intersection avec l'axe vertical en substituant 0 à x dans l'équation,

$$y^2 = -5$$

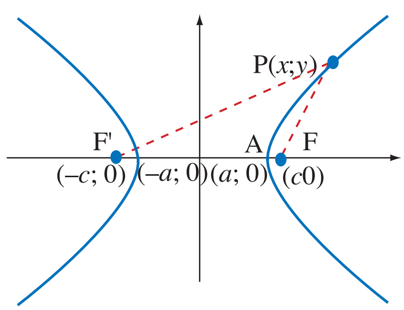
Cette équation n'ayant aucune solution, il n'y a donc pas d'intersection avec l'axe vertical.

Technique pour tracer une hyperbole

On peut produire une hyperbole à l'aide d'un crayon guidé par une corde fixée à l'un des foyers F et à l'extrémité C d'une règle de longueur arbitraire pivotant autour de l'autre foyer F'. La longueur de la corde doit être égale à $\overline{\text{F'C}}$ moins la distances entre les sommets.



Paramètres de l'hyperbole horizontale



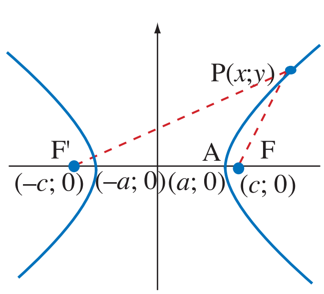
Coniques15

Considérons une hyperbole d'axe horizontal et traçons un système d'axes dont l'origine est à mi-chemin entre les foyers et tel que l'axe horizontal passe par les deux foyers. Représentons par a la distance du centre à un des sommets et par c la distance du centre de l'hyperbole à un de ses foyers. Considérons le sommet A de coordonnées $(a; 0)$, sa distance au foyer F est $\overline{\text{AF}} = c - a$ et sa distance au foyer F' est $\overline{\text{AF'}} = a + c$. La différence des distances est alors :

$$\overline{\text{AF'}} - \overline{\text{AF}} = (a + c) - (c - a) = 2a.$$

ÉQUATION CANONIQUE

Hyperbole horizontale centrée en (0; 0)



L'équation de l'hyperbole horizontale centrée au point (0;0), dont la distance du centre à un des sommets est a et la distance du centre à un des foyers est c, est donnée par :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ où } b^2 = c^2 - a^2.$$

Démonstration

Considérons un point P de l'hyperbole, de coordonnées (x; y). La différence des distances de ce point aux deux foyers étant égale à $2a$,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

On élève au carré chaque membre de l'équation et on regroupe les termes,

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

On élève au carré chaque membre de l'équation et on regroupe les termes à nouveau,

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$

En regroupant les variables et en mettant en évidence, on a :

$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

En posant $c^2-a^2=b^2$ et en substituant dans l'équation précédente, on a

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

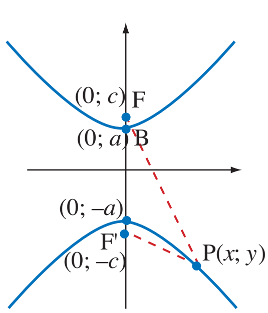
En divisant par a^2b^2, on obtient :

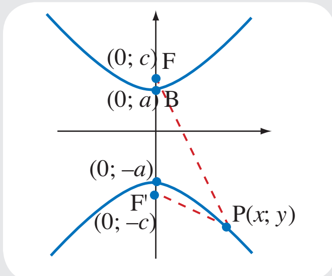
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Paramètres de l'hyperbole verticale

Soit une hyperbole d'axe vertical, un système d'axes dont l'origine est à mi-chemin entre les foyers et dont l'axe vertical passe par les deux foyers. On désigne par a la distance du centre à un des sommets et par c la distance du centre de l'hyperbole à un de ses foyers. La distance du sommet B de coordonnées (0; a) au foyer F est $\overline{\text{BF}}=c-a$ et sa distance au foyer F' est $\overline{\text{BF'}}=c+a$. La différence des distances est alors

$$\overline{\text{BF}}-\overline{\text{BF'}}=(b+a)-(c-a)=2a.$$





ÉQUATION CANONIQUE

Hyperbole verticale centrée en (0; 0)

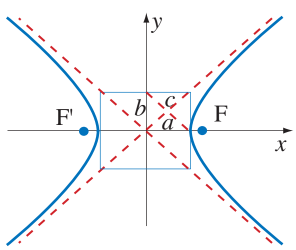
L'équation de l'hyperbole verticale centrée au point (0; 0), dont la distance du centre à un des sommets est a et la distance du centre à un des foyers est c, est donnée par :

$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \text{ où } b^2=c^2-a^2.$$

Asymptotes de l'hyperbole

Coniques16

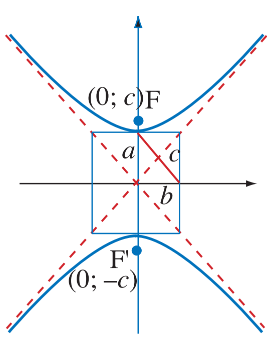
Dans la démonstration de la page précédente, nous avons posé $c^2 – a^2 = b^2$. On peut donner une signification graphique à cette égalité. Puisque $c^2 – a^2$ est une différence de carrés, on peut interpréter c comme une longueur d'hypoténuse et a comme un des côtés de l'angle droit. La longueur du troisième côté est alors représentée par la lettre b. Ce troisième côté est obtenu en déterminant l'intersection avec l'axe vertical d'un arc de cercle de rayon c et dont le centre est un des sommets de l'hyperbole.



On peut alors former un rectangle de longueur $2a$ et de hauteur $2b$ ayant même centre que l'hyperbole. Ce rectangle est fort intéressant pour esquisser le graphique de l'hyperbole, en effet les droites :

$$y=\frac{b}{a}x \text{ et } y=-\frac{b}{a}x.$$

qui sont les prolongements des diagonales de ce rectangle sont les asymptotes obliques de l'hyperbole dont l'axe focal est horizontal. Il n'est pas pertinent de démontrer ici cette affirmation, mais nous utiliserons les asymptotes pour esquisser rapidement les hyperboles.



Lorsque l'hyperbole est verticale, les asymptotes sont les droites :

$$y=\frac{a}{b}x \text{ et } y=-\frac{a}{b}x.$$

EXEMPLE 2.3.5

Déterminer les foyers, les sommets et les asymptotes de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

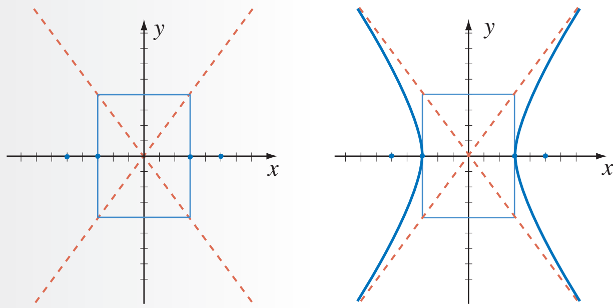
Utiliser ces renseignements pour représenter graphiquement l'hyperbole.

Solution

Le centre est (0; 0) et l'axe focal est horizontal puisque c'est le terme en y qui est affecté du signe négatif. Les sommets sont (–3; 0) et (3; 0) puisque $a^2 = 9$, d'où $a = 3$. De plus, $b^2 = 16$, d'où $b = 4$ et en substituant ces valeurs dans $a^2 + b^2 = c^2$, on trouve $c^2 = 25$, d'où $c = 5$. Les foyers sont donc les points (–5; 0) et (5; 0). Les asymptotes sont les droites :

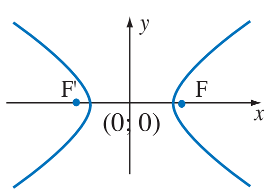
$$y = -\frac{4}{3}x \text{ et } y = \frac{4}{3}x.$$

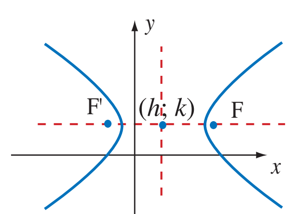
Représentons d'abord le rectangle de base $2a = 6$ et de hauteur $2b = 8$ centré à l'origine et traçons les asymptotes qui sont les prolongements des diagonales de ce rectangle.

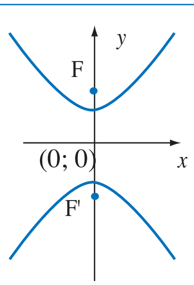


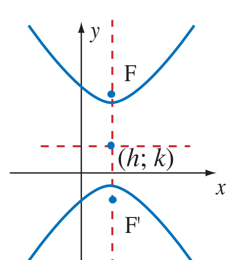
Pour esquisser le graphique de l'hyperbole, il suffit dès lors de tracer la courbe passant par le sommet et qui se rapproche de plus en plus des asymptotes.

ÉQUATION CANONIQUE DE L'HYPERBOLE

<table>
<tr><th></th><th>Centrée à (0; 0)</th><th>Centrée à (h; k)</th></tr>
<tr><td>Hyperbole horizontale</td><td>

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
asymptotes $y = \pm\frac{b}{a}x$</td><td>

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
asymptotes $y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$</td></tr>
<tr><td>Hyperbole verticale</td><td>

$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
asymptotes $y = \pm\frac{a}{b}x$</td><td>

$-\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
asymptotes $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$</td></tr>
</table>

Forme générale de l'équation de l'hyperbole

La forme générale de l'équation de l'hyperbole est :

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

avec $AC < 0$. En complétant le carré et en regroupant les termes non nuls à gauche de l'égalité, on obtient la forme canonique de l'hyperbole.

Dans cette présentation, nous avons procédé à une généralisation par translation d'axes. On peut procéder à une généralisation par rotation d'axes pour obtenir la forme générale des coniques qui est :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

On peut alors montrer que l'équation $xy = a$ qui décrit une variation inversement proportionnelle est également une hyperbole. Une translation de cette équation en $(h; k)$ donne $(x - h)(y - k) = a$. En isolant y et en renommant les paramètres, on a la famille de fonctions rationnelles de la forme :

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Un peu *d'histoire*

ASPECTS INTÉRESSANTS DE L'HYPERBOLE

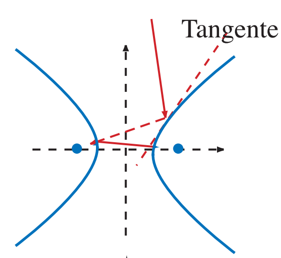
L'hyperbole a également une propriété optique intéressante, les droites qui joignent un point quelconque de l'hyperbole aux foyers forment des angles égaux avec la tangente en ce point. Par conséquent, si la surface d'un réflecteur est engendrée par la révolution d'une hyperbole autour de son axe conjugué, tous les rayons lumineux convergents vers un foyer, quelle que soit leur provenance, sont réfléchis à l'autre foyer. Cette propriété est utilisée dans certains télescopes en combinaison avec un réflecteur parabolique.

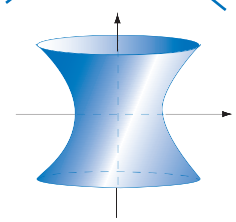
La surface engendrée par la révolution d'une hyperbole autour de son axe conjugué est appelée *hyperboloïde à une nappe*. C'est la forme des colonnes de refroidissement que l'on retrouve dans les centrales nucléaires. La surface engendrée par la révolution d'une hyperbole autour de son axe focal est appelée *hyperboloïde à deux nappes.*

La loi de Boyle $pv = c$ est une relation hyperbolique impliquant la pression et le volume d'un gaz.

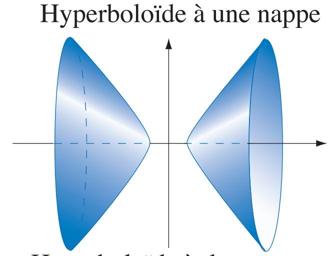
La différence de temps pour qu'un son parvienne en deux points distincts est proportionnelle à la différence des distances entre ces points et la source sonore. Cette source est donc sur une hyperbole dont les points sont les foyers. En utilisant un troisième point d'écoute avec l'un des deux premiers, on obtient une deuxième hyperbole et la source sonore est l'intersection des deux hyperboles. Cette propriété est utilisée pour détecter l'emplacement des batteries de canon par exemple.

NH hyperbole





Hyperboloïde à une nappe



Hyperboloïde à deux nappes

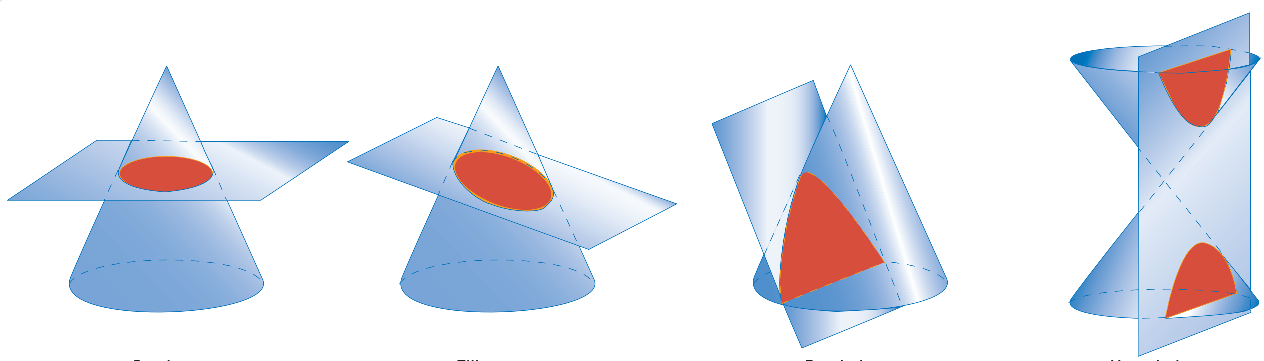
Un peu *d'histoire*

SECTIONS CONIQUES

Le cercle, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole ont une caractéristique commune: ce sont toutes des figures obtenues en sectionnant un cône à l'aide d'un plan. C'est pourquoi on les appelle *sections coniques.* NH Apollonius

Le cercle est obtenu en sectionnant le cône à l'aide d'un plan parallèle à la base du cône tandis que l'ellipse est obtenue en sectionnant le cône à l'aide d'un plan qui n'est pas parallèle à la base mais dont l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale est plus petit que l'angle à la base du cône. En sectionnant un cône à l'aide d'un plan dont l'angle avec l'horizontale est le même que l'angle à la base du cône, on obtient une parabole. L'hyperbole est la figure géométrique obtenue en sectionnant un cône à l'aide d'un plan dont l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale est plus grand que l'angle à la base du cône.

Ces figures ont été étudiées pour la première fois par Menechme, astronome et géomètre grec. Celui-ci a certainement démontré plusieurs propriétés des coniques. Cependant, aucun document n'atteste sa paternité. Les quatre livres qu'Euclide a écrit sur les coniques ne nous sont pas parvenus non plus. C'est Pappus qui nous apprend qu'Euclide a rédigé de tels ouvrages. Apollonius est certainement le plus chanceux des trois, car quatre des huit livres de son traité sur les sections coniques nous sont parvenus. Il a désigné les sections coniques en leur donnant les noms de *parabole*, d'*ellipse* et d'*hyperbole*. Dans les huit livres de son traité, il démontre quelques 400 propriétés.



Cercle | Ellipse | Parabole | Hyperbole

BONAVENTURA CAVALIERI

1598-1647

Dans son *Traité des indivisibles* paru en 1635, le mathématicien italien Bonaventura Cavalieri, qui fut élève de Galilée, élabore une méthode pour calculer les aires et les volumes. Le fondement de sa méthode pour le calcul des aires s'énonce comme suit :

Si deux figures sont comprises entre deux parallèles (ont même hauteur) et si des sections qui sont obtenues par des lignes parallèles aux deux autres sont toujours dans un rapport donné, alors les aires des deux figures sont aussi dans le même rapport.

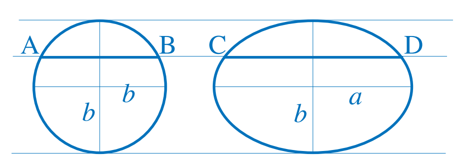
En appliquant la démarche à un cercle de rayon b et une ellipse dont les demi-longueurs des axes sont a et b, il obtient que les segments CD et AB sont toujours dans le rapport a/b, c'est-à-dire :

$$\overline{CD} = \frac{a}{b}\overline{AB}$$

NH Cavalieri 01, 02 et 03

Cette caractéristique étant vraie pour tous les segments, il en conclut que l'aire de l'ellipse et l'aire du cercle sont dans le même rapport. Puisque l'aire du cercle est πb^2, il obtient que l'aire de l'ellipse est πab puisque :

$$A = \frac{a}{b} \times \pi b^2 = \pi ab.$$



Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

2.4 Exercices

1. En utilisant la somme des distances aux foyers, déterminer et représenter graphiquement l'équation décrivant le lieu des points dont la somme des distances aux points (2; 0) et (–2; 0) est égale à 8. Déterminer les points de rencontre de cette ellipse avec les axes.

2. En utilisant la forme canonique, déterminer et représenter graphiquement l'équation décrivant le lieu des points dont la somme des distances aux points (3; 0) et (–3; 0) est égale à 10.

3. En utilisant la forme canonique, déterminer et représenter graphiquement l'équation décrivant le lieu des points dont la somme des distances à (0; –4) et (0; 4) est égale à 10.

4. En utilisant la forme canonique, déterminer et représenter graphiquement l'équation décrivant le lieu des points dont la somme des distances à (0; –2) et (0; 2) est égale à 6.

5. En utilisant la forme canonique, déterminer l'équation de l'ellipse dont les foyers sont (±4; 0) et qui a des sommets à (±5; 0).

6. Représenter graphiquement l'ellipse centrée à l'origine dont l'axe focal est vertical, dont la demi-longueur de l'axe focal est 5 et la demi-longueur de l'axe conjugué est 4.

7. En utilisant la somme des distances aux foyers, déterminer le lieu des points dont la somme des distances aux points (–1; 2) et (–1; –1) est égale à 6.

8. Trouver les sommets et les foyers et esquisser le graphique des ellipses d'équation suivantes.
   a) $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$
   b) $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$
   c) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 32y + 37 = 0$
   d) $4x^2 + 9y^2 - 12x + 6y - 26 = 0$

9. Trouver l'équation de l'ellipse passant par les points (–2; 6) et (4; –3) et centrée à l'origine. Donner sa largeur focale.

10. Trouver et représenter graphiquement les points d'intersection de l'ellipse d'équation $3x^2 + y^2 = 12$ et de la parabole d'équation $y^2 - 9x = 0$.

11. Trouver le lieu des points $P(x; y)$ dont le produit des pentes à (–2; 4) et (3; –1) est égal à –4.

12. Trouver le lieu des points dont la somme des distances aux points (2; 3) et (5; 3) est égale à 8.

13. Trouver le lieu des points dont la distance au point (2; 4) est les 4/3 de la distance à la droite :

$$4y - 9 = 0.$$

14. Trouver le lieu des points dont la distance au point (2; 4) est les 2/3 de la distance à la droite :

$$2x - 9 = 0.$$

15. Trouver le lieu des points dont la différence des distances aux points (–2; –2) et (–2; 6) est toujours égale à 6.

16. Trouver le lieu des points $P(x; y)$ dont le produit des pentes à (–2; 4) et (3; –1) est égal à 4.

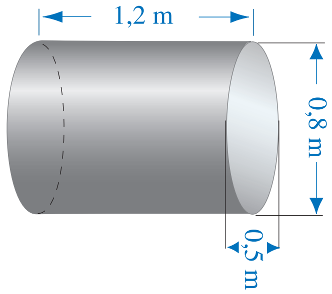
17. Trouver et représenter graphiquement l'équation décrivant le lieu des points dont la différence des distances aux points (0; 4) et (0; –4) est égale à 6. Déterminer les points de rencontre de cette hyperbole avec les axes. Quelle différence constatez-vous dans l'équation lorsque les foyers sont sur l'axe vertical ?

18. Trouver les points d'intersection de l'ellipse d'équation $4x^2 + 9y^2 = 180$ et de la droite d'équation $2x + 3y + 6 = 0$. Représenter graphiquement.

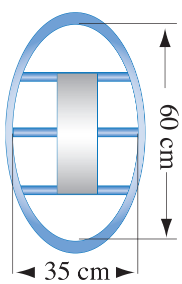
19. Trouver les points d'intersection de l'ellipse d'équation $x^2 + 3y^2 = 48$ et du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 40$. Représenter graphiquement.

20. Trouver les points d'intersection de l'ellipse d'équation $x^2 + 3y^2 = 12$ et de la parabole d'équation $x^2 - 9y = 0$. Représenter graphiquement.

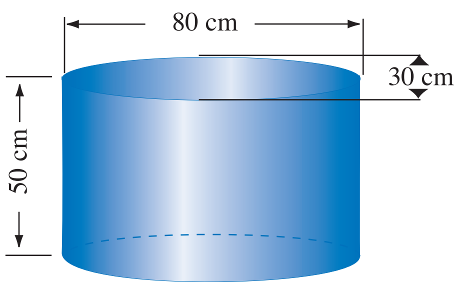
21. Une entreprise fabrique des réservoirs de forme ellipsoïdale dont les dimensions sont données à la figure ci-contre. Calculer la capacité en litres de ces réservoirs.



22. Une entreprise veut fabriquer des raquettes de forme elliptique et à cadre d'aluminium. La largeur du support du pied doit être les deux cinquièmes de la largeur interne du cadre elliptique et les tiges transversales divisent le grand axe en quatre parties de même longueur. On vous demande de calculer la longueur des tiges transversales et les dimensions de la plaque centrale.



23. Une entreprise fabrique des aquariums de forme ellipsoïdale.



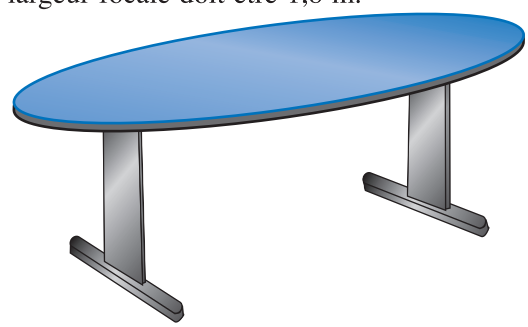
a) On vous demande de calculer le nombre de litres d'eau qu'il faut mettre dans l'aquarium s'il est recommandé de ne pas dépasser 80 % de sa capacité totale.

b) L'entreprise songe à préparer des sachets de granules pour mettre dans le fond de ses aquariums. Vous avez été chargé de calculer le volume de chaque sachet pour que l'on puisse tapisser le fond des aquariums d'une épaisseur de 4 cm avec le contenu d'un sachet.

c) Quelle quantité d'eau faut-il mettre dans l'aquarium pour ne pas excéder le maximum de 80 % de la capacité lorsque le fond est tapissé de granules ?

d) Le fournisseur achemine les granules en contenants de 0,4 m^3 qu'il vend 150 $ l'unité. De plus, l'ensachage et la manutention sont au prix de 0,24 $ du sachet. Quel devrait être le prix de vente des sachets pour que l'entreprise réalise un profit de 3,50 $ du sachet ?

24. Une entreprise doit fabriquer des tables de réunion de forme ellipsoïdale de 3,2 m de longueur et dont la largeur focale doit être 1,8 m.



a) Déterminer la valeur des paramètres a, b et c d'une table.

b) En considérant un système d'axes dont l'origine est au centre de l'ellipse, déterminer l'équation canonique du l'ellipse formant le dessus d'une table.