LIMITE, CONTINUITÉ ET INFINI

La notion de continuité n'est pas apparue avec le calcul différentiel et intégral. Les philosophes grecs ont été très tôt confrontés à cette notion en tentant de répondre à la question :

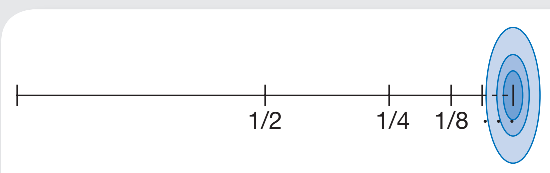
De quoi est constitué l'Univers ?

De grains indivisibles, répond Pythagore.

De grains infiniment divisibles répond Anaxagore.

Aucune de ces réponses soutient Zénon.

Pour appuyer ses dires, Zénon a énoncé divers paradoxes en prenant pour hypothèse les réponses de Pythagore et d'Anaxagore (NH Zénon01, Zénon). Dans le paradoxe de la dichotomie, le javelot lancé par Achille doit, avant d'atteindre la cible, parcourir la moitié de la distance, mais avant il doit en parcourir le quart, et ainsi de suite.



Puisque la distance est infiniment divisible, il y a une infinité de longueurs à parcourir ce qui est impossible en un temps fini (NH Zénon02).

Les paradoxes de Zénon nous sont connus par Aristote qui les cite pour les réfuter. Sa réfutation consiste à dire qu'il y a deux sortes d'infini. L' « infini actuel » ou « infini en acte » qui est une conception de l'esprit, mais qui ne peut exister à cause des paradoxes qu'entraînent l'hypothèse de son existence. L' « l'infini potentiel » qui est un infini vers lequel on tend sans cesse, par addition ou division (NH Aristote02).

Les paradoxes de Zénon ont eu un impact important sur la pensée grecque, on en voit des effets dans la formulation du postulat d'Eudoxe (NH Eudoxe01) qui a donné la méthode d'exhaustion et dans le fait qu'Euclide ne considère pas qu'il y a un nombre infini de nombres premiers, il considère qu'il y en a plus que tout nombre prédéterminé (NH Euclide).

Plusieurs autres paradoxes ont été formulés depuis Zénon. Par exemple, si on considère que l'ensemble des nombres entiers est infini, on peut associer à chaque nombre entier un entier pair et réciproquement. Il y aurait donc une infinité d'entiers pairs, mais il y a moins d'entiers pairs que d'entiers. Il y aurait donc des infinis plus grands que d'autres, ce qui est paradoxal. C'est le **paradoxe de la réflexivité** auquel on se bute en considérant un sous-ensemble infini d'un ensemble infini.

En 1888, Richard Dedekind (1831-1916), au lieu de considérer le paradoxe de la réflexivité comme une raison pour rejeter l'existence de l'infini, en a fait une propriété de l'infini (NH Dedekind). Il a donné d'un ensemble infini la définition suivante : « un ensemble infini est un ensemble qui est équivalent à un de ses sous-ensembles propres ». En d'autres mots, un ensemble infini est un ensemble qui peut être mis en bijection avec un de ses sous-ensembles propres. Cette définition d'un ensemble infini est à l'origine de la théorie des ensembles infinis développée par Georg Cantor (1845-1918) (NH Cantor). L'axiome d'Euclide selon lequel « le tout est plus grand que la partie » ne s'applique pas dans le cas des ensembles infinis, c'est une conséquence de l'adoption de la définition de Dedekind.

Dedekind s'est également intéressé à un autre problème lié aux notions de limite et de continuité. Pour définir la tangente à une courbe, on considère deux points P et Q de cette courbe et la sécante à la courbe passant par ces deux points. En considérant que le point Q s'approche du point P, la sécante pivote autour du point P et à la limite, lorsque P et Q se superposent, la sécante devient la tangente à la courbe. On en conclut qu'en calculant la pente de la sécante sur des intervalles de plus en plus petits, lorsque Q s'approche de P, on obtient comme valeur limite la pente de la tangente. Mais, existe-t-il pour chaque position du point Q des nombres décrivant l'abscisse et l'ordonnée de Q ? Peut-on à chaque point d'un axe associer un nombre réel décrivant la position de ce point ? En d'autres mots, la droite réelle est-elle continue ou discontinue? Si elle est continue, le raisonnement géométrique peut effectivement se traduire algébriquement et la limite des pentes des sécantes est la pente de la tangente. Sinon, tout s'écroule.

Les pythagoriciens avaient déjà rencontré une difficulté analogue. Ils étaient convaincus qu'il est toujours possible de déterminer une commune mesure à deux grandeurs de même nature (NH Pythagore02). Cela signifie qu'il est toujours possible de décrire le rapport de deux longueurs par un rapport de deux nombres entiers. Ce beau rêve s'est écroulé avec la découverte par Hippase de Metaponte de l'impossibilité de décrire le rapport de la diagonale du carré au côté de celui-ci par un rapport de nombres entiers (NH Pythagore06). L'ensemble des nombres entiers se révélait inadéquat pour décrire le rapport de deux grandeurs qui étaient cependant en relation par une figure géométrique et par le théorème de Pythagore. Cette découverte a amené Eudoxe à redéfinir la notion de rapport qui ne pouvait plus se fonder sur le postulat de la commensurabilité (NH Eudoxe02).

L'ensemble des nombres décrivant la droite peut-il réserver ce genre de surprise ?