CHAPITRE 12

IMPÉDANCE

Déterminer l'impédance d'un circuit à partir de ses composantes et de la fréquence du courant.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- Le calcul de l'impédance d'un circuit à partir de l'impédance de ses composantes selon que celle-ci sont montées en série ou en parallèle.
- Le calcul de la résistance et de la réactance d'un circuit série équivalent à un circuit parallèle.
- Le calcul de la résistance et de la réactance d'un circuit parallèle équivalent à un circuit série.
- Le calcul de la réactance d'un circuiten fonction de la fréquence du courant sinusoïdal.

OBJECTIFS

12.1 Utiliser les nombres complexes pour calculer la résistance et de la réactance d'un circuit série équivalent à un circuit parallèle.

12.2 Utiliser les nombres complexes pour calculer la résistance et de la réactance d'un circuit parallèle équivalent à un circuit série.

12.1 Impédance d'un circuit

L'impédance d'un circuit est une caractéristique du circuit représentée par un vecteur complexe qui, comme tout vecteur dans le plan, peut s'exprimer comme la somme de deux vecteurs dont l'un est sur l'axe horizontal et l'autre sur l'axe vertical. Dans cette somme, la composante horizontale est la résistance R du circuit et elle est mesurée en ohms. La composante verticale de la somme représente la réactance X du circuit et elle est également mesurée en ohms. La réactance peut être inductive ou capacitive.

La réactance inductive est notée X_L et la réactance capacitive est notée X_C. Chacune des composantes d'un circuit, résistance, bobine et condensateur a une impédance. L'impédance totale du circuit dépend de l'impédance de chacune des composantes et de la façon dont elles sont reliées entre elles. On peut déterminer l'impédance d'un circuit en représentant vectoriellement l'impédance de chacune de ses composantes et en effectuant les opérations vectorielles appropriées.

Impédance des composantes

Nous allons présenter les caractéristiques de l'impédance des composantes d'un circuit lorsque leur valeur ohmique est connue. L'objectif poursuivi est de calculer l'impédance d'un circuit à partir de l'impédance de ses composantes.

Impédance d'une composante résistive

Dans une composante purement résistive, la tension et le courant sont en phase et sont décrits par les modèles sinusoïdaux

$e(t) = E \sin \omega t$

$i(t) = I \sin \omega t$

où E et I sont les valeurs de crête.

Ce sont les projections verticales des vecteurs

$E(t) = E\angle\omega t$

$I(t) = I\angle\omega t$

dont les vecteurs de phase sont

$E_0 = E\angle 0$

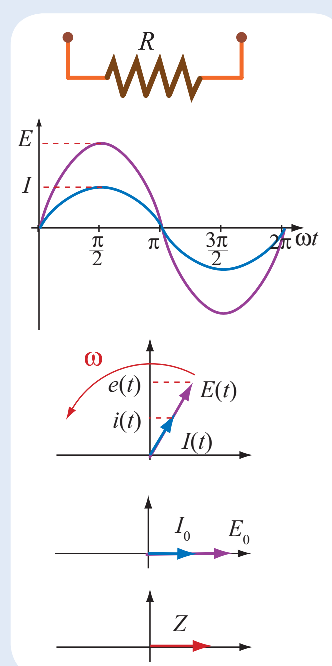
$I_0 = I\angle 0$

et l'impédance est

$$Z = \frac{E\angle 0}{I\angle 0} = \frac{E}{I}\angle 0$$

$= R\angle 0$ (forme polaire

$= R + j0$ (forme rectangulaire).



REMARQUE

Dans les caractéristiques de la résistance, le rapport E_m/I_m est la valeur en ohms de la résistance. L'argument nul signifie que la tension et le courant sont en phase.

L'impédance d'une composante, comme tout nombre complexe, peut s'écrire sous forme polaire et sous forme rectangulaire. La forme polaire est utilisée pour les produits et quotients, et la forme rectangulaire pour les sommes.

Impédance d'une composante purement inductive

Dans une composante purement inductive, le courant accuse un retard de $\pi/2$ rad sur la tension. La tension et le courant sont décrits par

$e(t) = E_m \sin \omega t$

$i(t) = I \sin(\omega t - \pi/2)$

où E et I sont les valeurs de crête.

Ce sont les projections verticales des vecteurs

$E(t) = E\angle\omega t$

$I(t) = I\angle(\omega t - \pi/2)$

Les vecteurs de phase sont alors

$E_0 = E\angle 0$

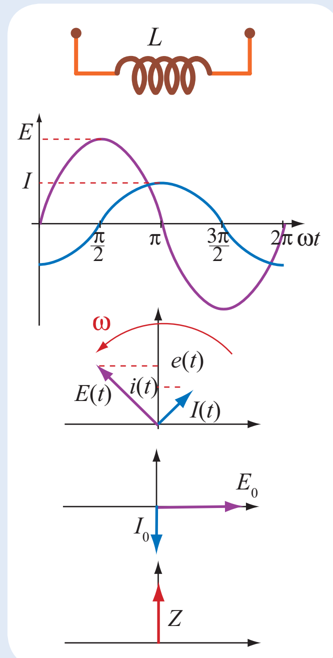
$I_0 = I\angle(-\pi/2)$

et l'impédance est

$$Z = \frac{E\angle 0}{I\angle(-\pi/2)} = \frac{E}{I}\angle \pi/2$$

$$= X_L\angle\pi/2 \text{ (forme polaire}$$

$$= 0 + jX_L \text{ (forme rectangulaire).}$$



REMARQUE

Dans le tableau qui précède, le rapport E_m/I_m est la valeur en ohms de la **réactance inductive** qui est représentée par X_L. C'est le module de la réactance. L'argument est l'angle de déphasage entre la tension et le courant dans la composante. Dans le cas d'une composante inductive, cet argument est $\pi/2$, ce qui signifie que le courant est en retard de $\pi/2$ rad sur la tension.

Impédance d'une composante purement capacitive

Dans une composante purement capacitive, le courant est en avance de $\pi/2$ rad sur la tension. La tension et le courant sont décrits par

$e(t) = E \sin \omega t$

$i(t) = I \sin(\omega t + \pi/2)$

où E et I sont les valeurs de crête.

Ce sont les projections verticales des vecteurs

$E(t) = E\angle\omega t$

$I(t) = I\angle(\omega t + \pi/2)$

Les vecteurs de phase sont alors

$E_0 = E\angle 0$

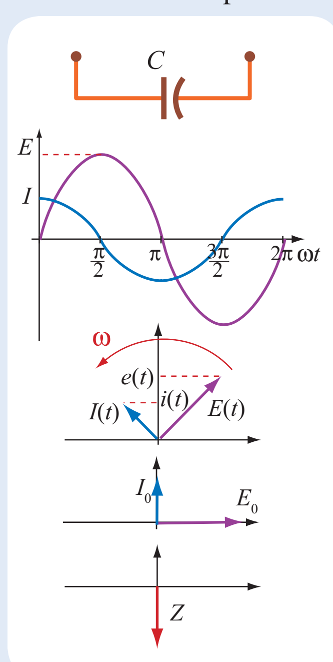
$I_0 = I\angle\pi/2$

et l'impédance est

$$Z = \frac{E\angle 0}{I\angle\pi/2} = \frac{E}{I}\angle(-\pi/2)$$

$$= X_C\angle(-\pi/2) \text{ (forme polaire}$$

$$= 0 - jX_C \text{ (forme rectangulaire).}$$



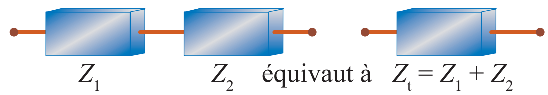
REMARQUE

Le rapport E_m/I_m est la valeur en ohms de la réactance capacitive qui est représentée par X_C. C'est le module de la réactance. L'argument est $-\pi/2$, ce qui signifie que le courant est en avance de $\pi/2$ rad sur la tension.

Impédances en série

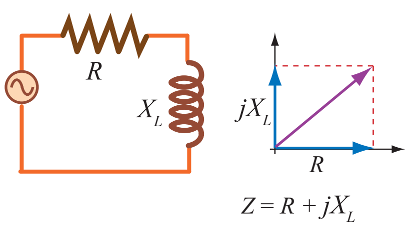
Les impédances en série ou en parallèle se combinent de la même façon que les résistances en série ou en parallèle. Lorsque deux composantes ayant des impédances Z_1 et Z_2 sont montées en série, il en résulte une impédance totale Z_t qui est égale à la somme des impédances de ces composantes, c'est-à-dire

$$Z_t = Z_1 + Z_2.$$

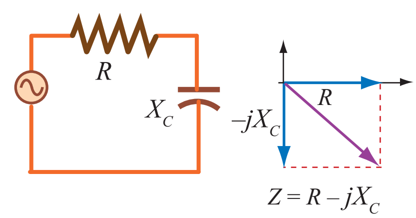


Lorsque les composantes sont en série, on peut tracer le diagramme d'impédance du circuit en représentant graphiquement les vecteurs représentant les impédances des composantes (résistance et réactance) et en effectuant la somme vectorielle. Le vecteur résultant est alors l'impédance totale du circuit. Le vecteur résultant est alors l'impédance totale du circuit.

Circuit *RL* série



Circuit *RC* série



EXEMPLE 12.1.1

Considérons le circuit illustré ci-contre.

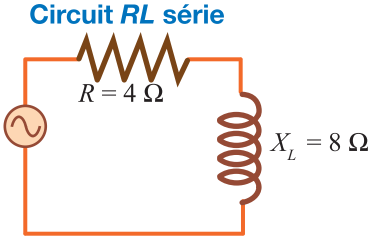
a) Tracer le diagramme d'impédance et trouver l'impédance de ce circuit.

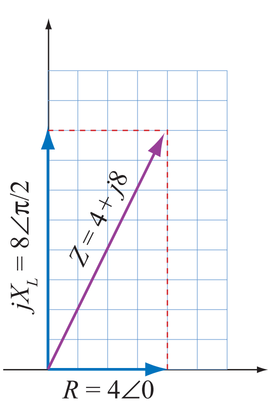
b) Exprimer l'impédance sous forme polaire et donner l'angle de déphasage du circuit et le rapport entre la tension maximum et le courant maximum.

c) Déterminer l'équation du courant dans le circuit, sachant que la tension est décrite en fonction du temps par

$$e(t) = 60 \sin(120\pi t) \text{ V}.$$

Circuit *RL* série





Solution

a) Puisque $R = 4\ \Omega$, la résistance est représentée vectoriellement par

$$Z_1 = 4\angle 0 = 4 + j0.$$

Puisque $X_L = 8\ \Omega$, la réactance inductive est représentée vectoriellement par

$$Z_2 = 8\angle\pi/2 = 0 + j8.$$

En représentant graphiquement ces vecteurs ainsi que le vecteur somme, on obtient le diagramme d'impédance du circuit, le vecteur somme est l'impédance totale du circuit. Ce qui donne

$$Z_t = (4 + j0) + (() + j8) = 4 + j8.$$

b) Le module de Z_t est

$$\|Z_t\| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 8,94.$$

et l'argument est

$$\phi = \arctan\left(\frac{X_L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{8}{4}\right) = 63,43°.$$

Sous forme polaire, l'impédance totale s'écrit donc

$$Z_t = 8,94\angle 63,43°$$

L'angle de déphasage du circuit est de 63,43° ou 1,11 rad et le rapport de la tension maximum sur le courant maximum est 8,94 Ω.

c) Le vecteur de phase du courant est le quotient du vecteur de phase de la tension et de l'impédance, ce qui donne

$$I_0 = \frac{E_0}{Z} = \frac{60\angle 0}{8,94\angle 63,43} = 6,71\angle(-63,43)$$

Le vecteur de phase du courant est donc

$$I_0 = 6,71\angle(-63,43°)$$

Le courant est donc décrit par la projection verticale du vecteur

$$I(\mathrm{t}) = 6,71\angle(120\pi t - 63,43°)$$

soit $$i(t) = 6,71 \sin(120\pi t - 63,43°) \text{ A}.$$

EXEMPLE 12.1.2

Considérons le circuit illustré ci-contre.

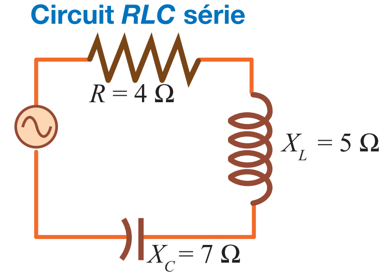
a) Tracer le diagramme d'impédance et déterminer l'impédance de ce circuit.

b) Exprimer l'impédance sous forme polaire, donner l'angle de déphasage du circuit et le rapport entre la tension maximum et le courant maximum.

c) Déterminer la tension dans le circuit, sachant que le courant est décrit en fonction du temps par

$$i(t) = 2,18 \sin(120\pi t) \text{ A}.$$

Circuit *RLC* série



Solution

a) Puisque $R = 4\ \Omega$, la résistance est représentée vectoriellement par

$$Z_1 = 4\angle 0 = 4 + j0.$$

Puisque $X_L = 5\ \Omega$, la réactance inductive est représentée par

$$Z_2 = 5\angle\pi/2 = 0 + j5.$$

Puisque $X_C = 7\ \Omega$, la réactance capacitive est représentée par

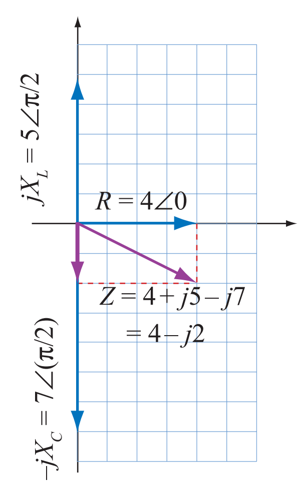
$$Z_3 = 7\angle(-\pi/2) = 0 - j7.$$

La réactance X_t du circuit est la somme des réactances, soit

$$X_t = X_L + X_C = (0 + j5) + (0 - j7) = 0 - j2.$$

En représentant graphiquement ces vecteurs ainsi que le vecteur somme, on obtient le diagramme d'impédance du circuit, le vecteur somme étant l'impédance totale du circuit, soit

$$Z_t = R + jX_t = 4 - j2.$$



b) Le module de Z_t est

$$\|Z_t\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 4,47.$$

et l'argument est

$$\phi = \arctan\left(\frac{X_t}{R}\right) = \arctan\left(\frac{-2}{4}\right) = -26,57°.$$

Sous forme polaire, l'impédance totale s'écrit donc

$$Z_t = 4,47\angle(-26,57°)$$

Par conséquent, l'angle de déphasage du circuit est de –26,57° et le rapport de la tension maximum sur le courant maximum est 4,47 Ω.

c) Le vecteur de phase de la tension est le produit du vecteur de phase du courant et de l'impédance, ce qui donne

$$E_0 = Z_t\, I_0 = 4,47\angle(-26,57°)\ (2,18\angle 0) = 9,74\angle(-26,57°).$$

Le vecteur de phase de la tension est donc

$$E_0 = 9,74\angle(-26,57°)$$

La tension est décrite par la projection verticale du vecteur

$$E(t) = 9,74\angle(120\pi t - 26,57°)$$

soit $$e(t) = 9,74 \sin(120\pi t - 26,57°) \text{ V}.$$

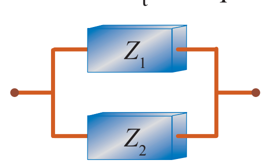
PROCÉDURE

Calcul de l'impédance d'un circuit série

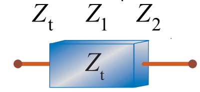
1. Déterminer l'impédance de chacune des composantes.
2. Exprimer ces impédances sous forme rectangulaire.
3. Faire la somme de ces impédances (ce qui donne l'impédance totale sous forme rectangulaire).
4. Trouver la forme polaire de l'impédance.
5. Interpréter selon le contexte.

Impédances en parallèle

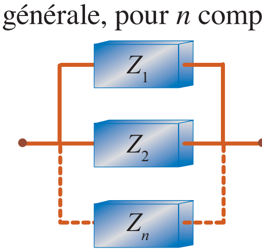
Lorsque deux impédances Z_1 et Z_2 sont montées en parallèle, il en résulte une impédance totale Z_t telle que $\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$.



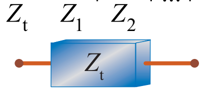
équivaut à $\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$



De façon générale, pour n composantes, on a



équivaut à $\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_n}$



EXEMPLE 12.1.3

Soit le circuit illustré ci-contre.

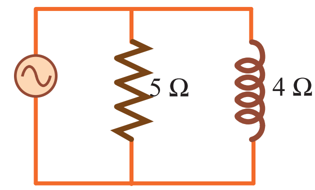
a) Trouver l'impédance de ce circuit.

b) Dire quel est l'angle de déphasage du circuit et le rapport entre la tension maximum et le courant maximum.

c) Trouver le courant dans le circuit, sachant que la tension est décrite en fonction du temps par

$$e(t) = 48 \sin(120\pi t) \text{ V}.$$

Circuit *RL* parallèle



Solution

a) Puisque $R = 5\ \Omega$, la résistance est représentée vectoriellement par

$$Z_1 = 5\angle 0 = 5 + j0.$$

Puisque $X_L = 4\ \Omega$, la réactance inductive est représentée vectoriellement par

$$Z_2 = 4\angle \pi/2 = 0 + j4.$$

En substituant dans $\dfrac{1}{Z_t} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}$, on obtient

$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{5\angle 0} + \frac{1}{4\angle \pi/2}.$$

En exprimant les numérateurs sous forme polaire, soit $1\angle 0$, et en effectuant la division, on obtient

$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1\angle 0}{5\angle 0} + \frac{1\angle 0}{4\angle \pi/2} = 0{,}2\angle 0 + 0{,}25\angle(-\pi/2) = 0{,}2 - j0{,}25.$$

Par conséquent $Z_t = \dfrac{1}{0{,}2 - j0{,}25}$.

En exprimant le numérateur et dénominateur sous forme polaire,

$$Z_t = \frac{1}{0{,}2 - j0{,}25} = \frac{1\angle 0}{0{,}32\angle(-51{,}34°)} = 3{,}13\angle 51{,}34°.$$

b) L'angle de déphasage du circuit est de 51,34° (ou 0,90 rad) et le rapport de la tension maximum sur le courant maximum est 3,12 Ω.

c) Le vecteur de phase du courant est le quotient du vecteur de phase de la tension et de l'impédance, ce qui donne

$$I_0 = \frac{E_0}{Z_t} = \frac{48\angle 0}{3{,}13\angle 51{,}34°} = 15{,}3\angle(-51{,}34°).$$

Le vecteur de phase du courant est donc

$$I_0 = 15{,}3\angle(-51{,}34°).$$

Le courant est donc décrit par la projection verticale du vecteur

$$I(t) = 15{,}3\angle(120\pi t - 51.34°)$$

soit

$$i(t) = 15{,}3 \sin(120\pi t - 51.34°) \text{ A}$$

PROCÉDURE

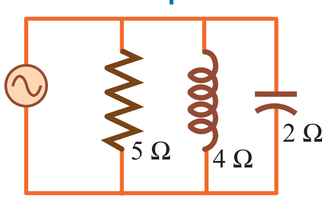
Calcul de l'impédance d'un circuit parallèle

1. Déterminer l'impédance de chacune des branches.
2. Exprimer ces impédances sous forme polaire.
3. Calculer les quotients $1/Z_i$, où Z_i représente les impédances des branches (ces quotients sont les admittances de chaque branche).
4. Faire la somme des quotients $1/Z_i$ pour obtenir $1/Z_\mathrm{t}$, l'inverse de l'impédance totale.
5. Calculer le rapport inverse pour obtenir Z_t (l'impédance totale sous forme rectangulaire.
6. Déterminer la forme polaire de l'impédance.
7. Interpréter selon le contexte.

EXEMPLE 12.1.4

Déterminer l'impédance du circuit illustré ci-contre.

Circuit *RLC* parallèle



Solution

Puisque $R = 5\ \Omega$, la résistance est représentée vectoriellement par

$$Z_1 = 5\angle 0 = 5 + j0.$$

Puisque $X_L = 4\ \Omega$, la réactance inductive est représentée vectoriellement par

$$Z_2 = 4\angle\pi/2 = 0 + j4.$$

Puisque $X_C = 2\ \Omega$, la réactance inductive est représentée vectoriellement par

$$Z_3 = 2\angle(-\pi/2) = 0 - j2.$$

En substituant les forme polaires dans $\dfrac{1}{Z_\mathrm{t}} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3}$, on obtient

$$\frac{1}{Z_\mathrm{t}} = \frac{1}{5\angle 0} + \frac{1}{4\angle\pi/2} + \frac{1}{2\angle(-\pi/2)}.$$

En exprimant les numérateurs sous forme polaire, soit $1\angle 0$, et en effectuant la division, on obtient

$$\frac{1}{Z_\mathrm{t}} = \frac{1\angle 0}{5\angle 0} + \frac{1\angle 0}{4\angle\pi/2} + \frac{1\angle 0}{2\angle(-\pi/2)} = 0{,}2\angle 0 + 0{,}25 1\angle(-\pi/2) + 0{,}5\angle\pi/2$$

$$= 0{,}2 - j0{,}25 + j0{,}5 = 0{,}2 + j0{,}25.$$

Par conséquent $\dfrac{1}{Z_\mathrm{t}} = 0{,}2 + j0{,}25.$

En exprimant le numérateur et dénominateur sous forme polaire,

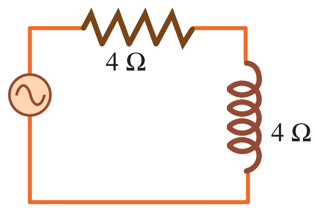
$$Z_\mathrm{t} = \frac{1}{0{,}2 + j0{,}25} = \frac{1\angle 0}{0{,}32\angle(51{,}34°)} = 3{,}13\angle(-51{,}34°).$$

L'angle de déphasage du circuit est de –51,34° (ou –0,90 rad), le rapport de la tension maximum sur le courant maximum est 3,12 Ω.

11.2 Exercices

1. À partir du circuit illustré:

Circuit *RL* série



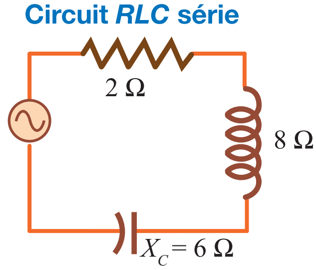
a) Tracer le diagramme d'impédance et trouver l'impédance du circuit.
b) Exprimer l'impédance sous forme polaire et donner l'angle de déphasage du circuit et le rapport entre la tension et le courant.
c) Trouver la tension dans le circuit, sachant que le courant est décrit en fonction du temps par

$$i(t) = 2{,}4\sin(80\pi t + \pi/3)\text{ A.}$$

d) Dire si le courant est en avance ou en retard sur la tension.

2. À partir du circuit illustré:

Circuit *RLC* série



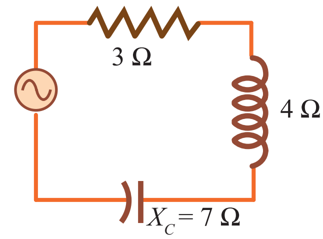
a) Tracer le diagramme d'impédance et trouver l'impédance du circuit.
b) Exprimer l'impédance sous forme polaire et donner l'angle de déphasage du circuit et le rapport entre la tension et le courant.
c) Trouver la tension dans le circuit, sachant que le courant est décrit en fonction du temps par

$$i(t) = 3{,}2\sin(40\pi t)\text{ A.}$$

d) Dire si le courant est en avance ou en retard sur la tension.

3. À partir du circuit illustré:

Circuit *RLC* série



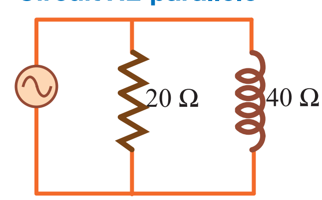
a) Tracer le diagramme d'impédance et trouver l'impédance du circuit.
b) Exprimer l'impédance sous forme polaire et donner l'angle de déphasage du circuit et le rapport entre la tension et le courant.
c) Trouver le courant dans le circuit, sachant que la tension est décrite en fonction du temps par

$$e(t) = 42\sin(120\pi t - \pi/6)\text{ V.}$$

d) Dire si le courant est en avance ou en retard sur la tension.

4. À partir du circuit illustré:

Circuit *RL* parallèle



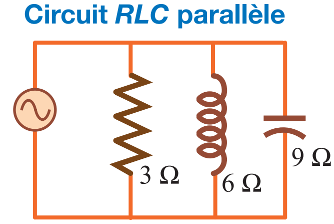
a) Calculer l'impédance du circuit.
b) Exprimer l'impédance sous forme polaire et donner l'angle de déphasage du circuit et le rapport entre la tension et le courant.
c) Trouver le courant dans le circuit, sachant que la tension est décrite en fonction du temps par

$$e(t) = 28\sin(120\pi t)\text{ V.}$$

d) Dire si le courant est en avance ou en retard sur la tension.

5. À partir du circuit illustré.

Circuit *RLC* parallèle



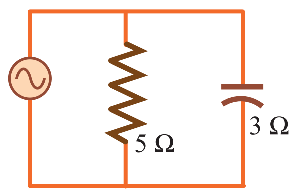
a) Calculer l'impédance du circuit.
b) Exprimer l'impédance sous forme polaire et donner l'angle de déphasage du circuit et le rapport entre la tension et le courant.
c) Calculer la tension dans le circuit, sachant que le courant est décrit en fonction du temps par

$$i(t) = 6{,}5\sin(80\pi t + \pi/4)\ \text{A}.$$

d) Dire si le courant est en avance ou en retard sur la tension.

6. À partir du circuit illustré.

Circuit *RC* parallèle



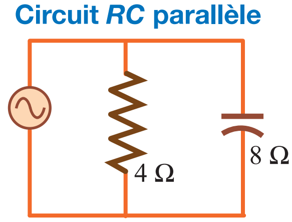
a) Calculer l'impédance du circuit.
b) Exprimer l'impédance sous forme polaire et donner l'angle de déphasage du circuit et le rapport entre la tension et le courant.
c) Calculer la tension dans le circuit, sachant que le courant est décrit en fonction du temps par

$$i(t) = 6{,}5\sin(80\pi t + \pi/4)\ \text{A}.$$

d) Dire si le courant est en avance ou en retard sur la tension.

7. À partir du circuit illustré.

Circuit *RC* parallèle



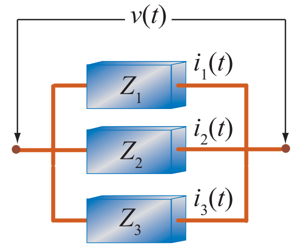
a) Calculer l'impédance du circuit.
b) Exprimer l'impédance sous forme polaire et donner 1'angle de déphasage du circuit et le rapport entre la tension et le courant.
c) Calculer la tension dans le circuit, sachant que le courant est décrit en fonction du temps par

$$i(t) = 4{,}2\sin(40\pi t - \pi/3)\ \text{A}.$$

d) Dire si le courant est en avance ou en retard sur la tension.

8. Dans la partie de circuit illustrée, la tenxion appliquée est décrite par

$$v(t) = 60\sin(80\pi t)\ \text{V}.$$



Les courants dans les branches sont décrits repectivement par :

$$i_1(t) = 10\sin(80\pi t + \pi/4)\ \text{A},$$

$$i_2(t) = 12\sin(80\pi t - \pi/3)\ \text{A}.$$

$$i_3(t) = 20\sin(80\pi t - \pi/6)\ \text{A}.$$

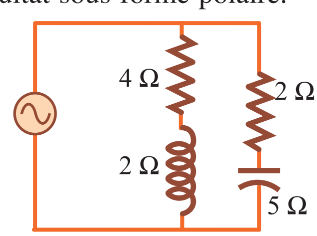
a) Calculer l'impédance de chacune des branches.
b) Déterminer les composantes de chacune des branches.

9. Soit Z_1 et Z_2 deux impédances en parallèle, démontrer que

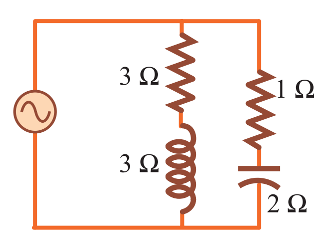
$$Z_t = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

10. En utilisant le résultat du numéro précédente, calculer l'impédance du circuit illustré et donner le résultat sous forme polaire.

a)



b)



12.3 Équivalence de circuits

Des circuits sont équivalents lorsqu'ils ont la même impédance. Un circuit série peut donc être équivalent à un circuit parallèle et réciproquement. De plus, nous verrons que l'impédance d'une composante dépend de la fréquence de la tension.

Circuits équivalents

Circuits équivalents

Deux circuits sont dits **équivalents** s'ils ont la même impédance.

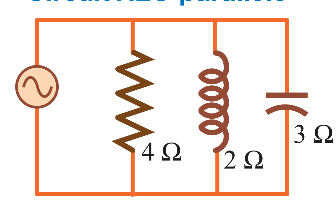
Circuit série équivalent à un circuit parallèle

Pour déterminer le circuit série équivalent à un circuit parallèle donné, on détermine d'abord la forme rectangulaire de son impédance. La partie réelle de cette impédance donne alors la valeur de la résistance du circuit équivalent et la partie imaginaire de cette impédance donne la valeur de la réactance du circuit équivalent. Si la partie imaginaire est positive, il s'agit d'une réactance inductive et si la partie imaginaire est négative, il s'agit d'une réactance capacitive.

EXEMPLE 12.3.1

Déterminer les composantes du circuit série équivalent au circuit ci-contre.

Circuit *RLC* parallèle



Solution

Puisque R = 4 Ω, la résistance est représentée vectoriellement par

$$Z_1 = 4\angle 0.$$

Puisque X_L = 2 Ω, la réactance inductive est représentée vectoriellement par

$$Z_2 = 2\angle \pi/2.$$

Puisque X_C = 3 Ω, la réactance capacitive est représentée vectoriellement par

$$Z_3 = 3\angle(-\pi/2).$$

En substituant dans $\dfrac{1}{Z_t} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3}$, on obtient

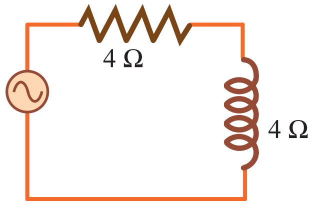
$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1\angle 0}{4\angle 0} + \frac{1\angle 0}{2\angle \pi/2} + \frac{1\angle 0}{3\angle(-\pi/2)} = 0{,}25\angle 0 + 0{,}5(-\pi/2) + 0{,}33\angle \pi/2.$$

En exprimant sous forme rectangulaire, on a

$$\frac{1}{Z_t} = 0{,}25 - j0{,}5 + j0{,}33 = 0{,}25 - j0{,}17, \text{ d'où } Z_t = \frac{1}{0{,}27 - j0{,}17}.$$

En exprimant le dénominateur sous forme polaire et en effectuant la division, on a

Circuit *RL* série



$$Z_t = \frac{1}{0,27 - j0,17} = \frac{1\angle 0}{0,3\angle(-34,22°)} = 3,33\angle(34,22°).$$

Puisque l'on cherche le circuit série équivalent, on exprime l'impédance sous forme rectangulaire, ce qui donne

$$Z_t = 3,33(\sin 34,22° + \cos 34,22°) = 2,75 + j1,87.$$

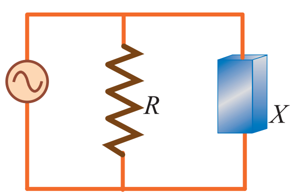
Le circuit équivalent est donc le circuit illustré ci-contre.

PROCÉDURE

Circuit série équivalent à un circuit parallèle

1. Calculer l'impédance du circuit parallèle.
2. Exprimer cette impédance sous forme rectangulaire,
$$Z_t = R + jX.$$
3. Représenter le circuit équivalent. (La partie réelle de l'impédance sous forme rectangulaire est la résistance du circuit équivalent et la partie imaginaire donne la réactance du circuit. Elle est inductive si la partie imaginaire est positive et capacitive si la partie imaginaire est négative.)

Circuit parallèle



Circuit parallèle équivalent à un circuit série

Le circuit parallèle équivalent à un circuit donné a la configuration ci-contre. L'impédance Z_t doit donc satisfaire à l'égalité suivante

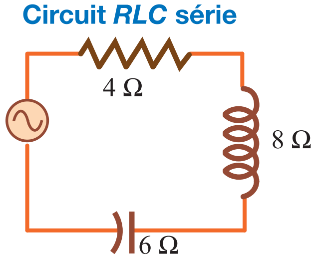
$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX}.$$

C'est en ramenant l'impédance du circuit sous cette forme que l'on peut trouver les composantes du circuit parallèle équivalent. On constate que l'admittance du circuit parallèle est la somme des admittances des composantes.

EXEMPLE 12.3.2

Déterminer les composantes du circuit parallèle équivalent au circuit série illustré ci-contre.

Circuit *RLC* série



■ ***Solution***

L'impédance du circuit série est

$$Z_t = 4 + j8 - j6 = 4 + j2.$$

L'admittance du circuit parallèle équivalent est alors

$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{4 + j2}.$$

En effectuant les divisions sous la forme rectangulaire, on obtient

$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{4+j2} = \frac{1}{4+j2} \times \frac{4-j2}{4-j2} = \frac{4-j2}{20} = \frac{4}{20} - \frac{j2}{20} = \frac{1}{5} - \frac{j}{10}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de la partie imaginaire par j, on a

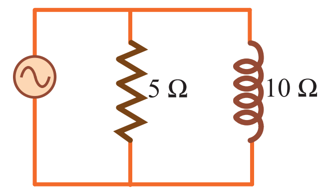
$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{5} - \frac{j}{10} \times \frac{j}{j} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j10}.$$

On obtient donc

$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j10}.$$

La résistance du circuit parallèle sera donc de 5 Ω et la réactance de 10 Ω. Le circuit équivalent est illustré ci-contre.

Circuit *RL* parallèle



PROCÉDURE

Circuit parallèle équivalent à un circuit série

1. Calculer l'impédance du circuit série.
2. Calculer le quotient $1/Z_t$ où Z_t est l'impédance totale du circuit série.
3. Exprimer ce quotient sous la forme
$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX}.$$
4. Représenter le circuit équivalent. (R est la résistance du circuit parallèle équivalent et X est la réactance du circuit. La réactance est inductive si X est positif et la réactance est capacitive si X est négatif.)

Fréquence et impédance

Dans la pratique, la réactance est fonction de la fréquence du courant dans le circuit. La réactance d'une bobine, notée X_L, est directement proportionnelle à la fréquence. Elle est donnée par

$$X_L = 2\pi f L = \omega L,$$

où f est la fréquence en hertz (Hz) et L est l'inductance en henry (H).

La réactance d'un condensateur, notée Z_C, est inversement proportionnelle à la fréquence. Elle est donnée par

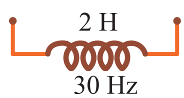
$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{\omega C},$$

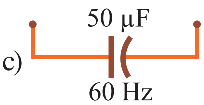
où f est la fréquence en hertz (Hz) et C est la capacitance en farad (F).

EXEMPLE 12.3.3

Calculer l'impédance des composantes suivantes.

a) 

b) 

c) 

■ ***Solution***

a) La composante est une résistance, son impédance est indépendante de la fréquence. On a donc

$$Z = 7{,}5\angle 0.$$

b) La composante est une bobine de 2 H, sa réactance est donnée par $X_L = 2\pi f L$, on a donc

$$X_L = 2\pi \times 30 \text{ Hz} \times 2 \text{ H} = 376{,}99\ \Omega.$$

L'impédance est donc $Z_L = 377\angle\pi/2$.

c) La composante est un condensateur de 50 μF, sa réactance est donnée par $X_C = 1/(2\pi f C)$, on a donc

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \times 60 \text{ Hz} \times 50 \times 10^{-6}} = 53{,}05\ \Omega.$$

L'impédance est donc $Z_C = 53\angle(-\pi/2)$.

Puisque la réactance varie en fonction de la fréquence, les circuits ne sont équivalents qu'à la fréquence donnée.

Circuit résonnant

Un **circuit résonnant** est un circuit qui est équivalent à un circuit purement résistif.

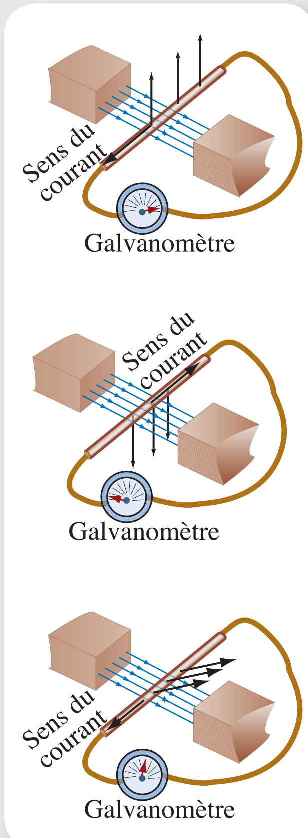
Un circuit série est résonnant lorsque les parties imaginaires des impédances des éléments de circuit s'annulent. Un circuit parallèle est résonnant lorsque les parties imaginaires des admittances s'annulent. Chaque circuit a sa propre fréquence de résonnance. Pour que le circuit soit résonnant, on doit avoir

$$X_L = X_C.$$

Un peu *d'histoire*

PRODUCTION DU COURANT ALTERNATIF

En 1831, après de multiples expériences, Faraday constate que le déplacement d'un fil, ou d'une tige, dans un champ magnétique induit une tension dans ce fil. Si le fil forme un circuit, cette tension génère un courant. Le sens du courant observé dépend du sens de déplacement du fil.



En inversant le sens du déplacement, on inverse le sens du courant.

De plus, l'intensité du courant généré dépend de l'angle entre la direction du mouvement et la direction du champ magnétique. La tension et le courant atteignent leur valeur maximale lorsque le déplacement est perpendiculaire au champ magnétique.

Lorsque l'angle entre la direction du mouvement et la direction du champ magnétique est θ, l'intensité de la tension est donnée par :

$$E(\theta) = E_m \sin \theta,$$

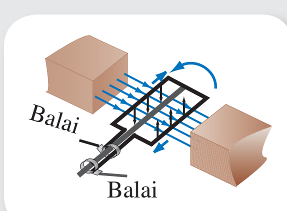
où E_m est la tension maximale. L'intensité du courant est donnée par :

$$I(\theta) = I_m \sin \theta,$$

où I_m est le courant maximal.
Ce sont les descriptions mathématiques des découvertes de Faraday et Henry.

Le belge Zénobe Gramme perfectionna les machines à courant alternatif en 1867 et construisit la première dynamo industrielle, appelée *machine de Gramme*, qu'il présenta à l'Académie des sciences en 1871. Ce fut un événement considérable pour le développement de la civilisation moderne car cela allait permettre le recours à des sources d'énergie inexploitées jusqu'alors dans l'industrie.

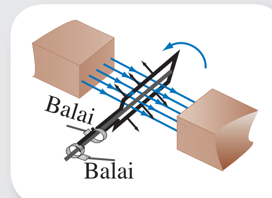
Dans la machine de Gramme, le fil en déplacement est remplacé par une boucle de fil en rotation dans un champ magnétique. Le fonctionnement est illustré dans les figures ci-dessous. Une boucle de fil dans un champ magnétique est en rotation dans le sens antihoraire. On peut considérer indépendamment chaque branche de la boucle et on constate que le déplacement de chacune des branches se fait selon la tangente à la trajectoire de la boucle.



L'angle de déplacement est variable, il dépend du temps t. On peut l'exprimer en fonction de la vitesse angulaire ω de la boucle de fil. On a alors :

$$\theta = \omega t$$

Il est donc possible d'exprimer la tension et le courant en fonction du temps. L'intensité de la tension au temps t est donnée par :



$$E(t) = E_m \sin \omega t \text{ volts},$$

où E_m est la tension maximale. L'intensité du courant au temps t est donnée par :

$$I(t) = I_m \sin \omega t \text{ ampères},$$

où I_m est le courant maximal et $\omega = 2\pi f$, où f est la fréquence du mouvement rotatif. C'est en partie grâce à cette description mathématique de la tension et du courant qu'il est possible de les analyser et de les contrôler.

En pratique, pour améliorer le rendement, on n'utilise pas une simple boucle de fil, mais un bobinage de fil. De plus, au lieu d'un champ magnétique, on a plusieurs champs magnétiques pour augmenter la fréquence de la tension et du courant sans augmenter la vitesse de rotation du bobinage de fil.

Pour produire une grande quantité d'électricité en appliquant ce principe, il faut avoir une force motrice qui fait tourner la boucle de fil dans le champ magnétique. C'est le rôle de la chute d'eau dans une centrale hydroélectrique ou du vent dans le cas d'une éolienne.

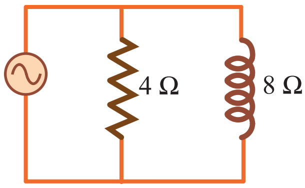
L'effet décrit ci-haut est appelé l'effet générateur. On peut inverser cet effet. Au lieu de faire tourner mécaniquement la boucle de fil dans le champ magnétique, on peut faire circuler un courant dans le fil de la boucle. Ce courant génère un champ magnétique autour du fil dont l'interaction avec le champ de l'aimant force la boucle à tourner pour permettre l'alignement des champs. Lorsque le courant que l'on fait circuler dans la boucle de fil est un courant alternatif, la boucle de fil tourne constamment dans le champ magnétique. C'est l'effet moteur.

C'est grâce aux travaux de Faraday et de Gramme et des scientifiques qui ont analysé leurs résultats et amélioré les techniques pour contrôler les effets générateur et moteur que notre civilisation peut aussi facilement produire de l'électricité et disposer d'une vaste gamme de moteurs électriques, du plus petit au plus grand.

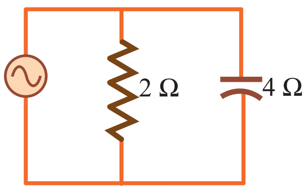
12.4 Exercices

Déterminer le circuit série équivalent au circuit illustré dans les quatre cas suivants.

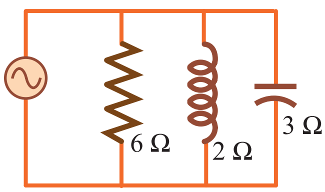
1.



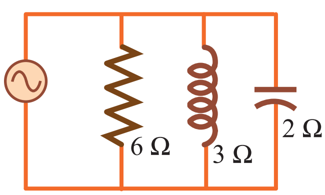
2.



3.

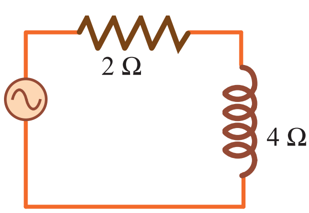


4.

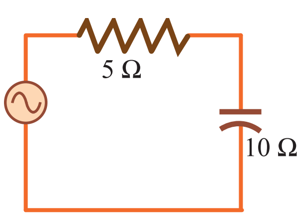


Déterminer le circuit parallèle équivalent au circuit illustré dans les quatre cas suivants.

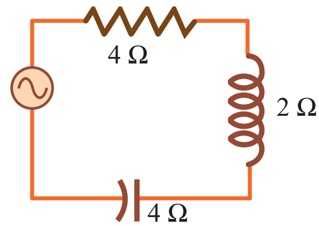
5.



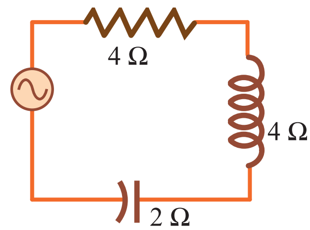
6.



7.

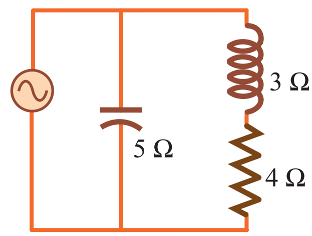


8.

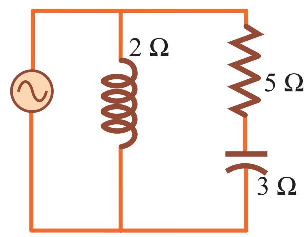


Déterminer l'impédance des circuits suivants.

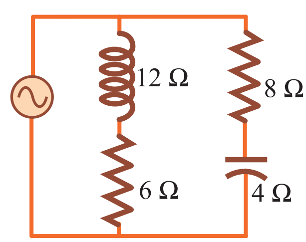
9.



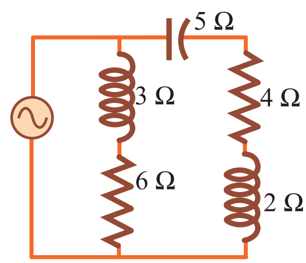
10.



11.

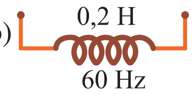


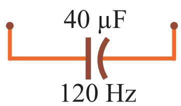
12.



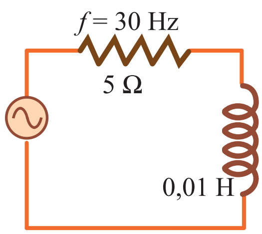
13. Calculer l'impédance des composantes suivantes à la fréquence indiquée.

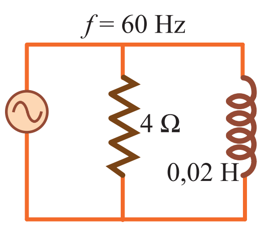
a) 

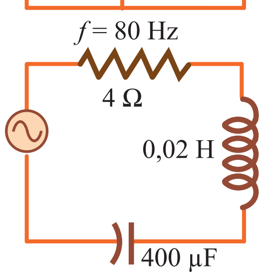
b) 

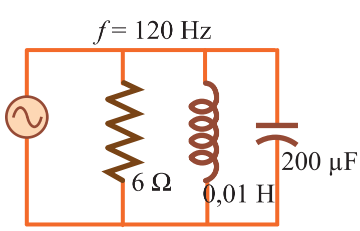
c) 

Calculer l'impédance du circuit à la fréquence indiquée.

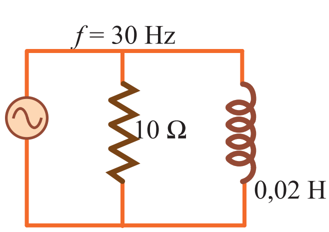
14. 

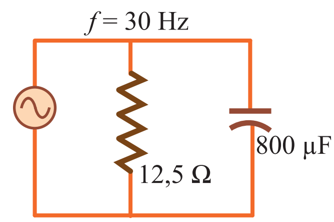
15. 

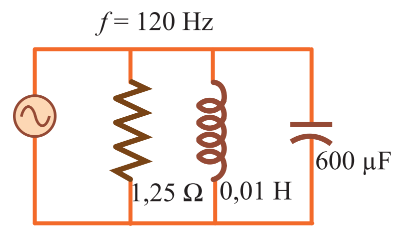
16. 

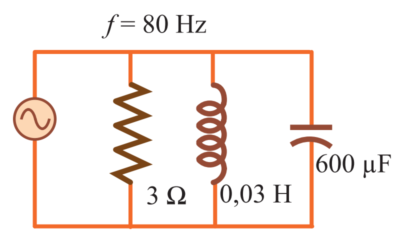
17. 

Déterminer le circuit série équivalent au circuit donné à la fréquence indiquée.

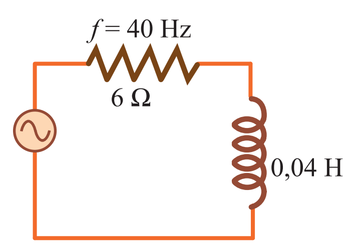
18. 

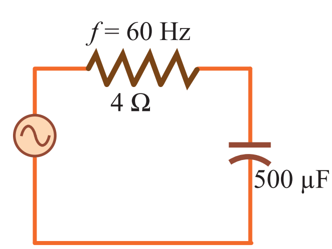
19. 

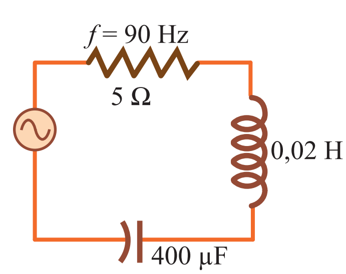
20. 

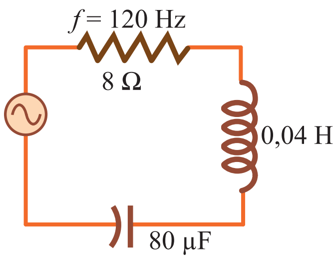
21. 

Déterminer le circuit parallèle équivalent au circuit donné à la fréquence indiquée.

22. 

23. 

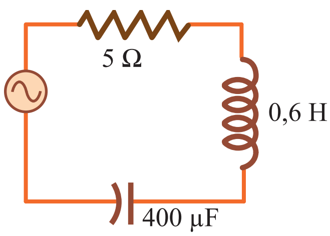
24. 

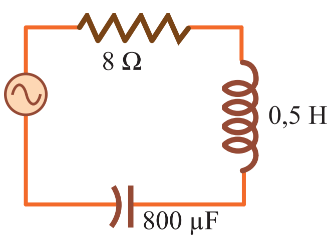
25.


26. Montrer que la fréquence de résonnance d'un circuit comportant une bobine de L H et un condensateur de C F est donnée par

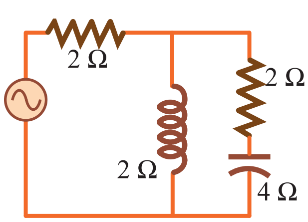
$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

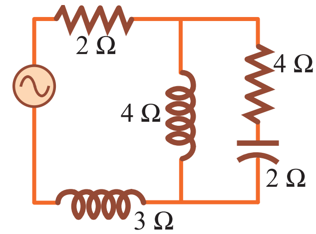
Calculer la fréquence de résonnance des circuits suivants.

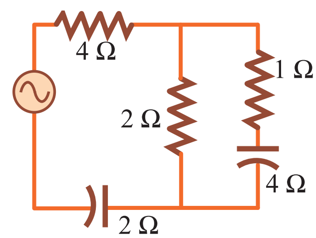
27.


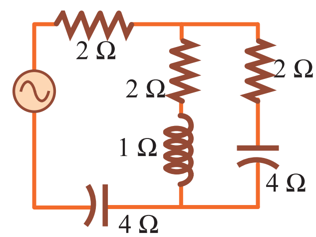
28.


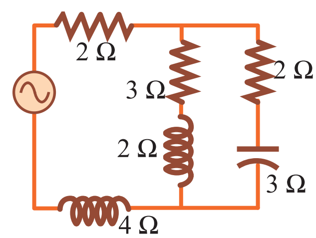
Calculer l'impédance du circuit illustré, donner le résultat sous forme polaire.. Décrire le circuit série équivalent.

29.


30.


31.


32.


33.


34.