10

INTÉGRALE INDÉFINIE

Utiliser l'intégrale indéfinie dans la modélisation de situations diverses.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- la détermination de la famille de primitives d'une fonction avec ou sans solution particulière;
- l'utilisation du symbole de sommation et de ses propriétés;
- l'utilisation de l'opérateur d'intégration et des procédures de modification de l'intégrande dans la recherche des primitives d'une fonction;
- l'utilisation de l'intégrale indéfinie dans la modélisation et l'analyse de phénomènes divers.

OBJECTIFS

10.1 Utiliser l'opérateur d'intégration pour résoudre analytiquement une intégrale indéfinie.

10.2 Modifier l'intégrande pour obtenir une intégrale simple et appliquer l'opérateur d'intégration.

10.3 Utiliser l'intégrale indéfinie dans la modélisation et l'analyse de phénomènes divers.

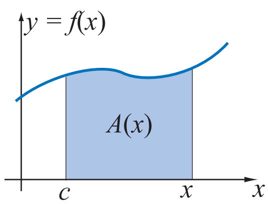
10.1 Primitives

Dans cette section, nous établirons une relation entre une fonction $f(x)$ et la fonction $A(x)$ décrivant l'aire sous la courbe de la fonction f dans un intervalle $[c; x]$. Cela nous amènera à définir la notion de fonction primitive.

Introduction

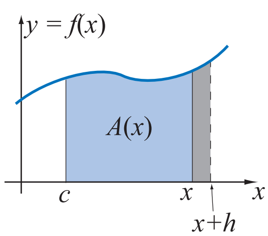
Primitives01

Considérons une fonction f, continue sur un intervalle $[c; x]$ dont la frontière de droite est variable. L'aire sous la courbe de la fonction f sur cet intervalle dépend de la valeur de x. Notons-là $A(x)$.



Nous allons établir le lien entre la fonction A et la fonction f. Considérons un accroissement h de la valeur d'abscisse. L'aire s'accroît alors d'une valeur :

$$\Delta A = A(x+h) - A(x).$$



Cette différence d'aire peut être approchée par l'aire du rectangle de largeur h et de hauteur $f(a)$, où a est le point milieu de l'intervalle $[x; x+h]$. Soit :

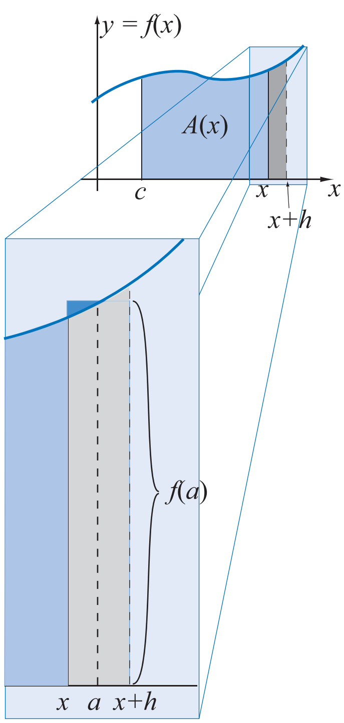
$$\Delta A = A(x+h) - A(x) \approx f(a) \times h.$$

On a donc :

$$\frac{\Delta A}{h} = \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx \frac{f(a)\times h}{h}.$$

En considérant la limite lorsque h tend vers 0, on obtient :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta A}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a)\times h}{h} = \lim_{h\to 0} f(a).$$



Or, par définition

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta A}{h}.$$

De plus, lorsque h tend vers 0,

$$\lim_{h\to 0} f(a) = f(x).$$

On obtient donc :

$$A'(x) = f(x).$$

Cela démontre le théorème suivant :

THÉORÈME

Dérivée de la fonction d'aire

La dérivée de la fonction décrivant l'aire sous la courbe est la fonction décrivant la courbe.

Ce résultat est particulièrement intéressant car il signifie que l'on peut trouver la fonction décrivant l'aire sous la courbe d'une fonction $f(x)$ en répondant à la question : de quelle fonction $f(x)$ est-elle la dérivée?

Nous l'appelons **fonction primitive** de $f(x)$ et nous verrons maintenant comment trouver la primitive d'une fonction donnée. En fait, la primitive est une famille de fonctions qui diffèrent les unes des autres par une constante. Dans les applications, la valeur de cette constante peut être déterminée à l'aide des conditions particulières de la situation analysée.

Primitive

On appelle **primitive** d'une fonction $f(x)$ toute fonction $F(x)$ dont la dérivée est $f(x)$, c'est-à-dire :

$$F'(x) = f(x).$$

Une fonction a plusieurs primitives. Ainsi, les fonctions :

$$F_1(x) = x^2,\ F_2(x) = x^2 + 3 \text{ et } F_3(x) = x^2 - 2.$$

sont toutes des primitives de $f(x) = 2x$ puisque la dérivée de chacune de ces fonctions donne $f(x) = 2x$. Les primitives de $f(x)$ ne diffèrent que par une constante et nous écrirons $F(x) = x^2 + k$.

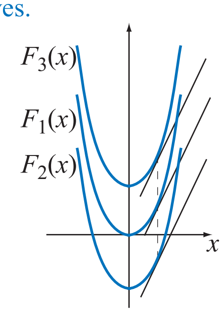
Si on considère le graphique des fonctions :

$$F_1(x) = x^2,\ F_2(x) = x^2 + 3 \text{ et } F_3(x) = x^2 - 2,$$

on constate qu'un changement de la valeur de la constante ne change pas la forme du graphique, elle change l'ordonnée à l'origine de la fonction, c'est-à-dire le point où le graphique coupe l'axe des y. Le graphique de la fonction est translaté verticalement. En un point d'abscisse x quelconque de l'un de ces graphiques, la pente de la tangente est la même qu'aux points ayant la même abscisse sur les autres graphiques. La pente de la tangente au point d'abscisse x est donc décrite par la même fonction $f(x) = 2x$, et ce, pour chacune des trois fonctions et de façon générale pour toutes les fonctions de la forme

$$F(x) = x^2 + k.$$

REMARQUE
La pente de la tangente est donnée par la même fonction pour toutes les primitives.



Intégrale indéfinie

On appelle **intégrale indéfinie** de $f(x)$ la famille de fonctions de la forme :

$$F(x) + k,$$

où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et k est une constante appelée **constante d'intégration**. Chaque valeur de la constante d'intégration correspond à une solution particulière de l'intégrale.

REMARQUE
Les différentes primitives d'une fonction ne diffèrent que par une constante que l'on appelle **constante d'intégration**.

Notation

Nous noterons l'intégrale indéfinie de $f(x)$ par $\int f(x)\,dx$.

C'est donc dire que $\int f(x)\,dx = F(x) + k$.

Dans le contexte de l'intégrale indéfinie, le symbole $\int$ est appelé **opérateur d'intégration**.

Si $y = F(x)$, on a alors :

$$dy = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Primitives 02

On peut facilement déterminer l'effet de cet opérateur sur les fonctions usuelles simples et, à l'aide des propriétés de l'opérateur, effectuer l'intégrale de plusieurs fonctions.

TIC

```
> f:=x->x^n;
  Int(f(x),x)=int(f(x),x)+k;
```

On remarque que le logiciel Maple n'ajoute pas la constante d'intégration. C'est à l'utilisateur que revient la responsabilité d'en tenir compte.

```
> f:=x->1/x;
  Int(f(x),x)=int(f(x),x) +k;
> f:=x->sin(x);
  Int(f(x),x)=int(f(x),x)+k;
```

BANQUE DE DÉRIVÉES ET DE PRIMITIVES

Dérivées usuelles simples	Intégrales usuelles simples
$\dfrac{d}{dx}(k)=0$	$\int 0\ dx = k$
$\dfrac{d}{dx}(x+k)=1$	$\int dx = x+k$
$\dfrac{d}{dx}(ax+k)=a$	$\int a\ dx = ax+k$
$\dfrac{d}{dx}(\ln x+k)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$	$\int \dfrac{1}{x}\ dx = \int x^{-1}\ dx$ $= \ln\lvert x\rvert + k,\ \text{pour } x \neq 0$
$\dfrac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+k$ pour $n \neq -1$
$\dfrac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x$	$\int e^x dx = e^x + k$
$\dfrac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$	$\int \cos x\ dx = \sin x + k$
$\dfrac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$	$\int \sin x\ dx = -\cos x + k$
$\dfrac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$	$\int \sec^2 x\ dx = \tan x + k$
$\dfrac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\ dx = -\cot x + k$
$\dfrac{d}{dx}(\sec x)=\sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\ dx = \sec x + k$
$\dfrac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\ dx = -\csc x + k$

REMARQUE

On peut ajouter d'autres intégrales à cette liste, elle n'est pas exhaustive.

On retrouve souvent dans la règle de correspondance d'une fonction des sommes ou des différences de fonctions usuelles simples multipliées par des constantes. Il faut appliquer les propriétés suivantes pour déterminer les primitives d'une telle fonction.

Primitives 03

PROPRIÉTÉS

Opérateur d'intégration

Soit a une constante et soit u et v des fonctions de x, alors :

$$\int au\ dx = a\int u\ dx;$$

$$\int (u+v)\ dx = \int u\ dx + \int v\ dx.$$

EXEMPLE 10.1.1

Effectuer les intégrales suivantes et vérifier le résultat par dérivation.

a) $\int (e^x + \cos x)\, dx$ b) $\int \left(\frac{8}{x} - \sin x\right) dx.$

Solution

a) La fonction à intégrer est une somme de deux fonctions. Par les propriétés de l'opérateur d'intégration, on obtient

$$\int (e^x + \cos x)\, dx = \int e^x dx + \int \cos x\, dx = e^x + \sin x + k.$$

Pour vérifier, dérivons l'expression obtenue, ce qui donne :

$$\frac{d}{dx}\left(e^x + \sin x + k\right) = (e^x + \cos x).$$

ou sous forme différentielle :

$$d\left(e^x + \sin x + k\right) = (e^x + \cos x)\, dx.$$

b) La fonction à intégrer est une somme de deux fonctions. Par les propriétés de l'opérateur d'intégration, on obtient

$$\int \left(\frac{8}{x} - \sin x\right) dx = 8\int \frac{1}{x}\, dx - \int \sin x\, dx$$
$$= 8 \ln|x| + \cos x + k.$$

Pour vérifier, dérivons l'expression obtenue, ce qui donne :

$$\frac{d}{dx}(8\ln|x| + \cos x + k) = \frac{8}{x} - \sin x.$$

TIC
```
> f:=x->exp(x)+cos(x);
  Int(f(x),x)=int(f(x),x)+k;
```

REMARQUE
En dérivant la fonction obtenue par intégration, on peut toujours vérifier qu'il ne s'est pas glissé d'erreur en intégrant.

TIC
```
> f:=x->8/x-sin(x);
  Int(f(x),x)=int(f(x),x)+k;
```
On remarque que Maple ne met pas la valeur absolue.

Solution particulière

Dans certaines situations, on peut avoir à déterminer la valeur de la constante d'intégration pour obtenir une solution particulière.

EXEMPLE 10.1.2

Trouver la solution de $\int \left(\sec^2 x + \sin x\right) dx$ pour laquelle $F(\pi/6) = 0$.

Solution

L'intégration donne $\int \left(\sec^2 x + \sin x\right) dx = \tan x - \cos x + k.$

On a donc $F(x) = \tan x - \cos x + k$. En substituant $\pi/6$ à x dans la solution générale, on trouve :

$$F(\pi/6) = \tan \pi/6 - \cos \pi/6 + k = 0,$$

d'où :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} + k = 0.$$

En isolant k dans cette équation, on obtient :

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

La solution particulière est $F(x) = \tan x - \cos x + \frac{\sqrt{3}}{6}.$

Primitives 04

TIC
```
> f:=x->(sec(x))^2+sin(x);
  Int(f(x),x)=int(f(x),x)+k;
```

Modifications de l'intégrande

On ne peut pas toujours effectuer l'intégrale définie au premier coup d'œil, il faut souvent effectuer des transformations pour exprimer l'intégrande comme combinaison des formes usuelles. Pour ce faire, on peut avoir à :

- transformer algébriquement l'intégrande;
- utiliser des identités trigonométriques;
- effectuer un changement de variable.

Transformation algébrique

EXEMPLE 10.1.3

ModifInteg01

Effectuer les intégrales suivantes :

a) $\int (x^2+2)\sqrt{x}dx.$ b) $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3}dx.$

Solution

a) L'intégrale ne fait pas partie des formes usuelles. Cependant, on peut effectuer une transformation algébrique pour obtenir une somme de fonctions. Cela donne :

$$\int (x^2+2)\sqrt{x}dx = \int (x^2+2)x^{1/2}dx = \int (x^{5/2}+2x^{1/2})dx.$$

L'intégrande est maintenant une somme de fonctions puissances et en appliquant les propriétés de l'opérateur d'intégration, on obtient :

$$\int (x^2+2)\sqrt{x}\,dx = \int x^{5/2}\,dx + 2\int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{7/2}}{7/2}+\frac{2x^{3/2}}{3/2}+k$$
$$= \frac{2x^{7/2}}{7}+\frac{4x^{3/2}}{3}+k.$$

Par conséquent : $\int (x^2+2)\sqrt{x}dx = \frac{2x^{7/2}}{7}+\frac{4x^{3/2}}{3}+k.$

b) L'intégrale ne fait pas partie des formes usuelles. Cependant, on peut effectuer une transformation algébrique pour obtenir une somme de fonctions. Cela donne :

$$\int \frac{x^2+2x+3}{x^3}dx = \int \left(\frac{x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{3}{x^3}\right)dx.$$

En exprimant comme somme de fractions et en simplifiant chacun des rapports, on obtient :

$$\int \frac{x^2+2x+3}{x^3}dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{x}\right)dx + \int \left(\frac{2}{x^2}\right)dx + \int \left(\frac{3}{x^3}\right)dx$$
$$= \int x^{-1}dx + 2\int x^{-2}dx + 3\int x^{-3}dx.$$

En intégrant les formes usuelles, on obtient alors :

$$\int \frac{x^2+2x+3}{x^3}dx = \ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + k.$$

TIC

Le logiciel reconnaît les transformations algébriques nécessaires pour intégrer.

```
> f:=x->(x^2+2)*sqrt(x);
  Int(f(x),x)=int(f(x),x)+k;
```

TIC

```
> f:=x->(x^2+2*x+3)/x^3;
  Int(f(x),x)=int(f(x),x)+k;
```

Identités trigonométriques

Les identités trigonométriques les plus couramment utilisées sont :

IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES UTILES

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$	$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$	$\sin 2x = 2\sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$	$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

EXEMPLE 10.1.4

Effectuer l'intégrale suivante : $\int \tan^2 x\, dx$.

ModifInteg02

■ *Solution*

L'intégrale ne fait pas partie des formes usuelles. Cependant, on peut utiliser l'identité trigonométrique $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$. En isolant $\tan^2 x$,

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1.$$

En substituant et en appliquant les propriétés, cela donne :

$$\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \sec^2 x\, dx - \int 1\, dx = \tan x - x + k.$$

On obtient donc: $\int \tan^2 x\, dx = \tan x - x + k$.

TIC
```
> f:=x->(tan(x))^2;
  Int(f(x),x)=int(f(x),x)+k;
```
Dans ce cas, selon la version utilisée, le logiciel peut donner :
$\tan x - \arctan(\tan x) + k$
Cependant, $\arctan(\tan x) = x$.

Changement de variable

Le changement de variable a déjà été présenté pour dériver des fonctions composées en comparant la forme globale aux formes usuelles simples.

ModifInteg03

EXEMPLE 10.1.5

Effectuer les intégrales.

a) $\int (3x^2 - 5x)^2 (6x-5)\, dx$ b) $\int 2xe^{3x^2-2}\, dx$

ModifInteg04

■ *Solution*

a) On ne peut, à l'aide des intégrales usuelles et des propriétés de l'opérateur de dérivation, obtenir directement l'intégrale de cette expression. On peut essayer, par un changement de variable, de ramener la fonction à intégrer sous une des formes de base. Posons $u(x) = 3x^2 - 5x$.

Comme $\dfrac{du}{dx} = 6x - 5$, on a $du = (6x - 5)\, dx$. Par substitution, on a

$$\int (3x^2 - 5x)^2 (6x-5)\, dx = \int u^2 du.$$

REMARQUE

Le choix de u dépend de la forme usuelle à laquelle on peut comparer la fonction à intégrer. Ainsi, pour se ramener à la forme :

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k, \text{ pour } n \neq -1,$$

on choisira pour u l'expression en x à l'intérieur d'une parenthèse affectée d'un exposant.

TIC

```
> restart;with(student):
  f:=x->(3*x^2-5*x)^2*(6*x-5);
  i1:=Int(f(x),x);
  i2:=changevar(3*x^2-5*x=u,i1,u);
  Int(f(x),x)=value(%)+k;
  subs(u=3*x^2-5*x,%);
```

TIC

```
> restart;with(student):
  f:=x->(2*x-3)*exp(x^2-3*x);
  i1:=Int(f(x),x);
  i2:=changevar(x^2-3*x=u,i1,u);
  Int(f(x),x)=value(%)+k;
  subs(u=x^2-3*x,%);
```

L'intégrale à effectuer est sous une forme de base et on obtient :

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + k.$$

Puisque $u = 3x^2 - 5x$, on a par substitution :

$$\int (3x^2 - 5x)^2 (6x-5) dx = \frac{(3x^2-5x)^3}{3} + k.$$

b) Procédons par un changement de variable en posant $u = 3x^2 - 2$. La différentielle de u est alors $du = 6xdx$. En substituant :

$$\int 2xe^{3x^2-2}\, dx = \frac{1}{3}\int e^u\, du = \frac{1}{3}e^u + k.$$

Puisque $u = x^2 - 3x$, on obtient :

$$\int 2xe^{3x^2-2}\, dx = \frac{1}{3}e^{3x^2-2} + k.$$

Pour intégrer une fonction, il faut souvent considérer celle-ci comme une fonction composée et l'écrire sous une forme équivalente mais plus simple à intégrer. On cherche à ramener l'intégrale à effectuer sous une des formes suivantes :

REMARQUE
Dans un cours plus avancé de calcul différentiel et intégral, la liste des formes usuelles est plus longue.

FORMULES D'INTÉGRATION

Formes usuelles

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k, \text{ pour } n \neq -1 \qquad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + k$$

$$\int e^u\, du = e^u + k \qquad \int \cos u\ du = \sin u + k$$

$$\int \sin u\ du = -\cos u + k \qquad \int \sec^2 u\ du = \tan u + k$$

$$\int \sec u \tan u\ du = \sec u + k \qquad \int \csc^2 u\ du = -\cot u + k$$

$$\int \csc u \cot u\ du = -\csc u + k \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ du = \text{Arcsin}\, u + k$$

$$\int \frac{1}{1+u^2}\ du = \text{Arctan}\, u + k \qquad \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\ du = \text{Arcsec}\, u + k$$

$$\int \tan u\ du = \ln|\sec u| + k = -\ln|\cos u| + k \qquad \int \cot u\ du = \ln|\sin u| + k$$

$$\int \sec u\ du = \ln|\sec u + \tan u| + k \qquad \int \csc u\ du = \ln|\csc u - \cot u| + k = -\ln|\csc u + \cot u| + k$$

PROCÉDURE

Intégration par changement de variable

1. Reconnaître la forme usuelle simple qu'il faut utiliser pour intégrer et déterminer la fonction $u(x)$ servant au changement de variable.
2. Exprimer l'intégrande (la fonction à intégrer) et la différentielle en fonction de la variable u.

3. Intégrer la forme usuelle simple obtenue.
4. Substituer à u son expression en fonction de x pour obtenir l'intégrale de la fonction initiale.
5. Déterminer la solution particulière lorsque cela est requis.
6. Dans les problèmes d'applications, utiliser la fonction obtenue pour analyser le phénomène étudié.

EXEMPLE 10.1.6

Effectuer les intégrales suivantes.

a) $\int (\tan^2 x + \tan x)\sec^2 x \, dx$ b) $\int \frac{e^x - 1}{e^x} \, dx$

ModifInteg05

TIC

```
> restart;with(student):
  f:=x->((tan(x))^2+tan(x))
  *(sec(x))^2;
  i1:=Int(f(x),x);
  i2:=changevar(tan(x)=u,i1,u);
  Int(f(x),x)=value(%)+k;
  subs(u=tan(x),%);
```

Solution

a) En posant $u = \tan x$, on obtient $du = \sec^2 x \, dx$. On a alors

$$\int (\tan^2 x + \tan x)\sec^2 x \, dx = \int (u^2 + u) \, du.$$

Par l'intégrale des formes usuelles, on obtient

$$\int (\tan^2 x + \tan x)\sec^2 x \, dx = \int (u^2 + u) \, du = \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + k.$$

En substituant $\tan x$ à u,

$$\int (\tan^2 x + \tan x)\sec^2 x \, dx = \int (u^2 + u) \, du = \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + k$$
$$= \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^2 x}{2} + k.$$

b) En transformant algébriquement, on obtient :

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x} \, dx = \int \frac{e^x}{e^x} \, dx - \int \frac{1}{e^x} \, dx = \int 1 \, dx - \int e^{-x} \, dx.$$

On doit alors considérer un sous problème, celui de $\int e^{-x} \, dx$.

En posant $u = -x$, on a $du = -dx$, d'où

$$\int e^{-x} \, dx = -\int e^u \, du = -e^u = -e^{-x}.$$

En substituant :

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x} \, dx = \int 1 \, dx - \int e^{-x} \, dx = x + e^{-x} + k.$$

On obtient donc

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x} \, dx = x + e^{-x} + k.$$

REMARQUE

Lorsqu'on résout un sous-problème par changement de variable, on ne se préoccupe pas de la constante d'intégration, on ne l'ajoute qu'à la fin de l'intégration.

TIC

```
>restart;
> with(student):
  f:=x->(exp(x)-1)/exp(x);
  Int(f(x),x)=int(f(x),x)+k;
```

On se souviendra que $\ln(e^x) = x$.

Intégration par parties

La procédure d'intégration par parties permet d'effectuer plusieurs intégrales lorsque l'intégrande est un produit et que la procédure de changement de variable n'est pas utilisable.

IntegPartie01

Considérons l'intégrale suivante :

$$\int xe^{x^2}\,dx.$$

On constate que l'on peut effectuer l'intégrale par un changement de variable en posant $u = x^2$ puisque la différentielle de u est $du = 2xdx$. On a

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + k = \frac{1}{2}e^{x^2} + k.$$

L'intégration par changement de variable correspond à la règle de dérivation des fonctions composées. Dans l'exemple précédent, on a considéré que la fonction intérieure de la fonction composée était $u = x^2$.

Considérons maintenant l'intégrale suivante :

$$\int xe^x\,dx.$$

Dans ce cas, on ne peut ramener l'intégrande à une forme élémentaire par un changement de variable puisqu'en posant $u = x$, on obtient $du = dx$ et :

$$\int ue^u\,du.$$

Pour pouvoir effectuer cette intégrale, il faut déterminer la règle d'intégration correspondant à la dérivation d'un produit. Rappelons cette règle de dérivation :

$$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

En écrivant cette règle sous forme différentielle, on obtient :

$$d(uv) = vdu + udv \text{ d'où l'on tire } udv = d(uv) - vdu.$$

En appliquant l'opérateur d'intégration aux deux membres de cette équation, on obtient :

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du, \text{ d'où } \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Cette égalité nous suggère une procédure pour intégrer une expression par parties. Pour illustrer comment faire, considérons à nouveau l'intégrale :

$$\int xe^x\,dx.$$

Cette intégrale est de la forme $\int u\,dv$. En effet, en posant $u = x$ et $dv = e^x\,dx$, on obtient

$$\int \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{e^x\,dx}^{dv}.$$

Nous appliquerons donc la procédure d'intégration par parties, soit

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Pour ce faire, il faut déterminer v et du. On obtient :

$$v = \int e^x\,dx = e^x \quad \text{et } du = dx.$$

En substituant dans $\int u\,dv = uv - \int v\,du$,, on obtient

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx.$$

D'où :

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + k.$$

On vérifie facilement que la dérivée de la fonction obtenue est bien l'intégrande de l'intégrale à effectuer.

En général, pour appliquer la procédure d'intégration par parties, il faut choisir pour dv la forme la plus complexe, mais dont on peut déterminer une primitive. L'expression qui reste correspondra au facteur u.

PROCÉDURE

Intégration par parties

1. Vérifier que c'est la plus simple procédure à appliquer.
2. Choisir les expressions à représenter par u et par dv.
3. Déterminer du par différentiation et v par intégration.
4. Substituer les expressions pour u, du, dv et v dans la formule d'intégration par partie : $\int u\,dv = uv - \int v\,du.$
5. Compléter l'intégration et rédiger la conclusion en interprétant le résultat selon le contexte, s'il y a lieu.

REMARQUE

Lorsque l'intégrande est un produit de fonctions, on vérifie d'abord si la procédure de changement de variable s'applique. S'il est impossible d'écrire l'intégrale sous une forme plus simple en effectuant un changement de variable, on a alors recours à l'intégration par parties.

EXEMPLE 10.1.7

Effectuer les intégrales suivantes :

a) $\int x\sin x\,dx$

b) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$

c) $\int \ln x\,dx$

c) $\int \frac{1}{x}\ln x\,dx$

e) $\int \sin^2 x\,dx$

IntegPartie02

TIC

```
> restart;
  Digits:=3;
  eqdiff:=diff(y(x),x)=-0.5*(y(x)-20);
  cond_init:=y(0)=200;
  dsolve({eqdiff,cond_init},y(x));
  plot(rhs(%),x=0..10,y=0..200);
```

Solution

a) Le changement de variable n'est pas envisageable puisqu'en posant $u = x$, on obtient la même forme d'intégrale. Considérons l'intégration par parties.

$$\int \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{\sin x\,dx}^{dv}.$$

En posant $u = x$ et $dv = \sin x\,dx$, on obtient :

$du = dx$ et, en intégrant, $v = -\cos x$

En substituant dans la forme $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, on obtient

$$\int \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{\sin x\,dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\,\overbrace{dx}^{du}.$$

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + k.$$

b) Dans ce cas, le changement de variable est envisageable puisque la dérivée de $\sin x$ est $\cos x$. On pose $u = \sin x$, d'où $du = \cos x\,dx$. En substituant dans l'intégrale à effectuer, on obtient

$$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + k = \frac{\sin^3 x}{3} + k.$$

REMARQUE
Lorsqu'on effectue une intégration par parties, on omet la constante provenant de l'intégration de dv. Les constantes se combinent et on ajoute la constante d'intégration à la dernière étape seulement.

c) Le changement de variable n'est pas envisageable puisqu'en posant $u = x$, on obtient la même forme d'intégrale. Considérons l'intégration par parties.

$$\int \overbrace{\ln x}^{u}\ \overbrace{dx}^{dv}.$$

En posant $u = \ln x$ et $dv = dx$, on obtient

$$du = \frac{1}{x}dx \text{ et, en intégrant, } v = x.$$

En substituant dans la forme $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \overbrace{\ln x}^{u}\,\overbrace{dx}^{dv} &= \overbrace{\ln x}^{u} \times \overbrace{(x)}^{v} - \int \overbrace{x}^{v} \times \overbrace{\frac{1}{x}dx}^{du} \\ &= x\ln x - \int dx = x\ln x - x \square\, k.\end{aligned}$$

On trouve donc $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + k$.

d) Dans ce cas, le changement de variable est envisageable puisque la dérivée de $\ln x$ est $1/x$. On pose $u = \ln x$, d'où $du = dx/x$. En substituant dans l'intégrale à effectuer, on obtient

$$\int \frac{1}{x}\ln x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + k = \frac{(\ln x)^2}{2} + k.$$

e) Dans ce problème, il faut procéder par substitution trigonométrique en utilisant l'identité trigonométrique

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

On obtient alors

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx.$$

Pour effectuer la seconde de ces intégrales, il faut procéder par changement de variable. On pose $u = 2x$, d'où $du = 2dx$ et $dx = du/2$. En substituant dans l'intégrale à effectuer, on obtient

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos u\,du \\ &= \frac{x}{2} - \sin u + k = \frac{x}{2} - \sin 2x + k.\end{aligned}$$

10.2 Exercices

1. Effectuer les intégrales indéfinies suivantes :

a). $\int x\,dx$

b). $\int 3x^2\,dx$

c) $\int 4x\,dx$

d) $\int e^x\,dx$

e) $\int (3x^2-5x+4)\,dx$

f) $\int 2t(t^2-5t)\,dt$

g) $\int (2y^2-3y+4)\,dy$

h) $\int \left(y^3-\frac{5}{y}+1\right)dy$

i) $\int (5e^x+x^2)\,dx$

j) $\int (5x^4+2e^x)\,dx$

k) $\int \left(\frac{x^3}{2}+\frac{1}{x}+e^x\right)dx$

l) $\int \left(3x^2+\frac{5}{x}\right)dx$

2. Déterminer la solution particulière correspondant aux données du problème.

a) $\int \left(3x^2+2x\right)dx$ pour $F(1)=5$.

b) $\int \left(\frac{1}{x}\right)dx$ pour $F(e)=3$.

c) $\int \left(\frac{1}{x^2}\right)dx$ pour $F(1)=2$.

d) $\int \left(x+\frac{1}{x^3}\right)dx$ pour $F(1/2)=0$.

e) $\int \left(e^x+x^2\right)dx$ pour $F(2)=5$.

f) $\int \left(x^2+1\right)dx$ pour $F(3)=8$.

3. Dans les situations suivantes, effectuer d'abord les manipulations algébriques permettant d'exprimer l'intégrande comme combinaison de fonctions usuelles et effectuer les intégrales.

a) $\int \frac{x^2+3}{x^2}\,dx$

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

c) $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

d) $\int \frac{2x^2-5x+3}{x}\,dx$

e) $\int (x^2+2)^2\,dx$

f) $\int x^{-3}(x^2+2)\,dx$

4. Dans les situations suivantes, utiliser d'abord les identités trigonométriques pour exprimer l'intégrande comme combinaison de fonctions usuelles et effectuer les intégrales.

a) $\int \frac{\tan x}{\sec x}\,dx$

b) $\int \frac{\cot x}{\csc x}\,dx$

c) $\int \cot^2 x\,dx$

d) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

5. Exprimer l'intégrale en fonction de la variable u. Indiquer si le choix de u est approprié et justifier. Intégrer lorsque cela est possible.

a) $\int x\sqrt{1+2x^2}\,dx, u=1+2x^2$

b) $\int \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx, u=\sin^2 x$

c) $\int \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx, u=\sin x$

d) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx, u=\ln x$

e) $\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx, u=\ln x$

f) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx, u=\sqrt{x}$

g) $\int x\cos 2x\,dx, u=2x$

h) $\int x\cos x^2\,dx, u=x^2$

6. Effectuer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\int 5z^2(5z^3+20)dz$

b) $\int \sin 3t\,dt$

c) $\int \frac{3}{t}\,dt$

d) $\int \cos 2t\,dt$

e) $\int (\sin t+\cos t)\,dt$

f) $\int \sin 2\pi t\,dt$

g) $\int e^{2x}\,dx$

h) $\int 4xe^{3x^2}\ dx$

i) $\int (1+x)(x^2+2x)\ dx$

j) $\int (6x-5)(3x^2-5x+4)\ dx$

k) $\int \dfrac{2x}{(x^2-4)}\ dx$

l) $\int \cos^2 x\ dx$

m) $\int \sin^2 \omega t\ dt$

n) $\int \cos^2(2\pi t+\pi)\ dt$

o) $\int \sin^2(120\pi t+\pi/2)\ dt$

p) $\int (\cos^2 2\pi t-\sin^2 2\pi t)dt$

q) $\int \sin 2\pi t\ \cos 2\pi t\ dt$

r) $\int \dfrac{e^x}{e^x+1}\ dx$

s) $\int \dfrac{\cos x}{1+\sin x}\ dx$

t) $\int \dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}\ dx$

u) $\int \dfrac{3x-2}{(3x^2-4x+5)}\ dx$

7. Utiliser l'intégration par parties pour effectuer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\int x \ln x\, dx$

b) $\int xe^{2x}\ dx$

c) $\int x^2 e^{-x}\ dx$

d) $\int x^2 \ln x\, dx$

e) $\int x \cos x\, dx$

f) $\int x^2 \sin x\, dx$

g) $\int x \cos 2x\, dx$

h) $\int \ln^2 x\, dx$

i) $\int e^x \sin x\, dx$

j) $\int e^x \cos x\, dx$

k) $\int \dfrac{\sin x}{e^x}\, dx$

l) $\int e^x \cos 2x\, dx$

m) $\int (x^2+1)e^x\ dx$

n) $\int x^2 \ln 3x\, dx$

o) $\int x^3 \ln 2x\, dx$

p) $\int (x^2+4)\sin x\, dx$

q) $\int e^x \sin^2 x\, dx$

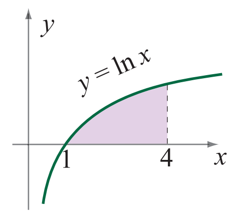
r) $\int e^x \cos^2 x\, dx$

s) $\int \operatorname{arccot} x\, dx$

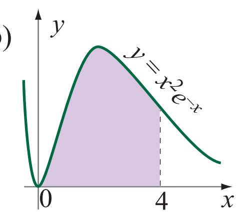
t) $\int \arcsin x\, dx$

8. Calculer l'aire sous la courbe dans l'intervalle indiqué.

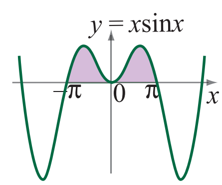
a)



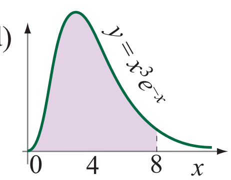
b)



c)



d)



9. Un projectile subit une accélération décrite par :

$$a(t) = 4\ \ln(t + 1)\ \text{m/s}^2.$$

a) Déterminer la vitesse du projectile au temps t si la vitesse initiale est nulle.

b) Déterminer la variation de vitesse dans l'intervalle [0; 4]. Interpréter.

c) Déterminer la variation de vitesse dans l'intervalle [2; 6]. Interpréter.

d) Déterminer la position du projectile au temps t si la position initiale est 0.

e) Déterminer la variation de position dans l'intervalle [0; 4]. Interpréter.

10.3 Applications de l'intégrale indéfinie

Dans les applications présentées dans cette section, on connaît la fonction décrivant le comportement du taux de variation ainsi que les conditions initiales. On intègre pour déterminer le modèle décrivant le phénomène.

Mouvement rectiligne

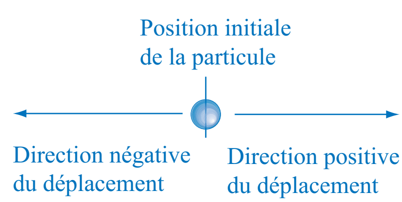
Dans l'initiation à l'intégration, nous avons vu que l'aire sous la courbe d'un débit, d'une accélération ou d'une vitesse représente également une grandeur physique. Par l'intégrale définie, on détermine la valeur de cette grandeur physique dans des conditions particulières. Par l'intégrale indéfinie, on traite cette grandeur physique comme variable et on obtient un modèle mathématique décrivant son évolution.

EXEMPLE 10.3.1

La position initiale d'une particule est à 40 m d'un point fixe et elle a une vitesse initiale de 48 m/s. Elle subit durant 12 secondes une accélération décrite en fonction du temps t par :

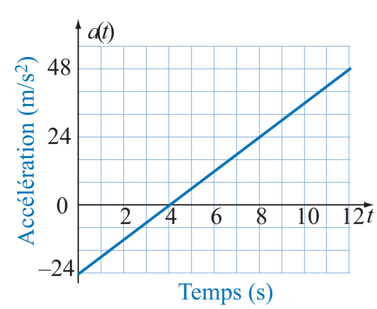
$$a(t) = 6t - 24 \text{ m/s}^2.$$

IntegIndefApplic01



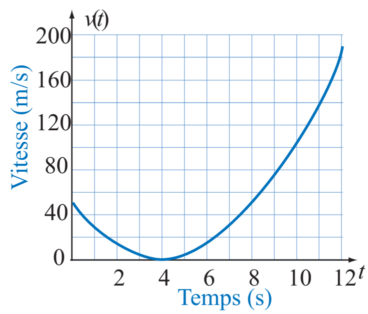
a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération durant l'intervalle de temps [0; 12].
b) Décrire mathématiquement la vitesse de la particule en fonction du temps durant cet intervalle de temps.
c) Quelle doit être la constante d'intégration pour décrire cette situation ? Justifier.
d) À l'aide du modèle obtenu, calculer la vitesse de la particule à 2 s, à 5 s et à 8 s. Interpréter selon le contexte.
e) La particule s'arrêtera-t-elle ?
f) Représenter graphiquement la fonction décrivant la vitesse durant l'intervalle de temps [0; 12].
g) Décrire mathématiquement la position de la particule en fonction du temps.
h) À l'aide du modèle obtenu, calculer la position de la particule à 2 s, à 5 s et à 8 s.
i) Représenter graphiquement la fonction décrivant la position durant l'intervalle de temps [0; 12].

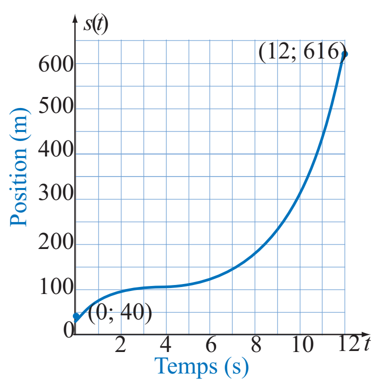
Solution



a) La fonction décrivant l'accélération est représentée graphiquement ci-contre. On remarque que dans l'intervalle [0; 4[, l'accélération est négative. Puisque la vitesse initiale est positive, 48 m/s, l'accélération va ralentir la particule durant cet intervalle de temps. La particule ralentira-t-elle suffisamment pour s'arrêter et se rapprocher du point fixe ? C'est ce que nous allons tenter de découvrir.
b) La fonction décrivant la vitesse est :

$$v(t) = \int a(t)\, dt = \int (6t - 24)\, dt = 3t^2 - 24t + k \text{ m/s}.$$





TIC

```
>restart;
  with(student):
  a:=t->6*t-24;
  v:=t->int(a(t),t)+48;
  s:=t->int(v(t),t)+24;
  plot(a(t),t=0..12);
  plot(v(t),t=0..12);
  plot(s(t),t=0..12);
```

c) Puisque la vitesse initiale est de 48 m/s, en posant $t = 0$ dans la fonction $v(t)$, on trouve :

$$v(0) = 0 - 0 + k = 48 \text{ m/s.}$$

La constante d'intégration est donc $k = 48$ m/s et la vitesse est décrite en fonction du temps par :

$$v(t) = 3t^2 - 24t + 48 \text{ m/s.}$$

d) $v(2) = 12$ m/s, $v(5) = 3$ m/s, $v(8) = 48$ m/s. Tel que prévu, l'accélération négative ralentit la particule jusqu'à l'instant $t = 4$ s; par après, l'accélération positive augmente sa vitesse.

e) La particule sera arrêtée lorsque $v(t) = 3t^2 - 24t + 48 = 0$, ce qui donne en décomposant :

$$3(t-4)^2 = 0,$$

d'où $t = 4$. Elle sera donc arrêtée à la quatrième seconde.

f) La fonction décrivant la vitesse est représentée graphiquement ci-contre. On remarque que dans l'intervalle [0; 4[, la vitesse diminue et dans l'intervalle]4; 12[, elle est croissante.

g) La fonction décrivant la position est :

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (3t^2 - 24t + 48)\,dt$$
$$= t^3 - 12t^2 + 48t + k \text{ m.}$$

Puisque la position initiale est de 40 m, en posant $t = 0$ dans la fonction obtenue, on trouve :

$$s(0) = 0 - 0 + 0 + k = 40 \text{ m.}$$

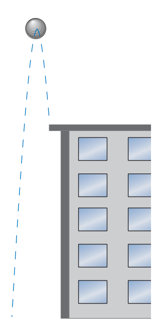
La constante d'intégration est donc $k = 40$ m et la position est :

$$s(t) = t^3 - 12t^2 + 48t + 40 \text{ m.}$$

h) $s(2) = 96$ m, $s(5) = 105$ m, $s(8) = 168$ m.

i) La fonction est représentée graphiquement ci-contre.

IntegIndefApplic02



REMARQUE

Si le projectile est lancé verticalement vers le haut à partir du sommet d'un édifice de 30 m avec une vitesse initiale de 49 m/s, sa position est mesurée par rapport au sol et, au temps t, elle est donnée par :

$$s(t) = 30 + 49t - 4{,}9t^2 \text{ m.}$$

EXEMPLE 10.3.2

On lance un projectile verticalement à partir du sol avec une vitesse initiale de 49 m/s.

a) Quelle est sa vitesse trois secondes près le lancement ?

b) Quelle est le modèle mathématique décrivant la hauteur du projectile au temps t ?

c) Quelle est la hauteur du projectile à trois secondes ?

d) Quelle sera la hauteur maximale atteinte par le projectile ?

e) Combien de temps après avoir été lancé le projectile retombe-t-il au sol ?

f) Représenter graphiquement la fonction décrivant la vitesse et la fonction décrivant la hauteur du projectile dans l'intervalle de validité des modèles.

Solution

a) En considérant le sol comme point de référence, la direction vers le haut comme positive, on a $a = -9{,}8$ m/s^2. La vitesse du projectile en mouvement rectiligne uniformément accéléré est donnée par :

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int -9{,}8\,dt = -9{,}8t + k.$$

Puisque la vitesse initiale est 49 m/s on a :

$$v(t) = -9{,}8t + 49 \text{ m/s}$$

et $$v(3) = [-(9{,}8 \times 3) + 49] \text{ m/s} = 19{,}6 \text{ m/s}.$$

b) La position du projectile est donnée par :

$$s(t) = \int(-9{,}8t + 49)\, dt = -4{,}9t^2 + 49t + k.$$

Puisqu'à l'instant initial le projectile est au point de référence :

$$s(t) = 49t - 4{,}9t^2 \text{ m}.$$

c) À 3 s, la hauteur est $s(3) = [(49 \times 3) - (4{,}9 \times 3^2)]$ m = 102,9 m.

d) La hauteur est décrite par une fonction quadratique. Sa dérivée est :

$$s'(t) = v(t) = 49 - 9{,}8t \text{ m/s}.$$

C'est la fonction décrivant la vitesse au temps t. De plus, la dérivée seconde est :

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = -9{,}8 \text{ m/s}^2.$$

La courbe représentant la hauteur est donc toujours concave vers le bas et la hauteur est maximale lorsque le projectile s'arrête avant de retomber, soit lorsque :

$$v(t) = 49 - 9{,}8t = 0,$$

ce qui donne $t = 5$ s. On trouve alors :

$$s(5) = [(49 \times 5) - (4{,}9 \times 5^2)] \text{ m} = 122{,}5 \text{ m}.$$

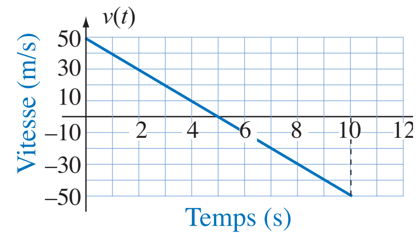
e) Le projectile retombe au sol lorsque sa hauteur sera égale à 0, ce qui donne :

$$s(t) = 49t - 4{,}9t^2 = 0,$$

d'où : $$t\,(49 - 4{,}9\,t) = 0.$$

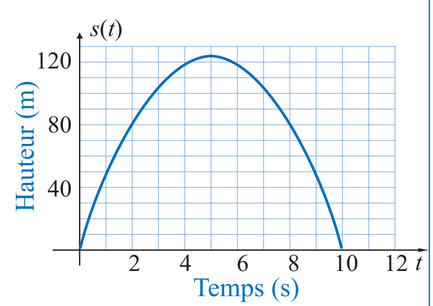
On trouve donc $t = 0$ et $t = 49/4{,}9 = 10$ s. Le projectile touchera le sol après 10 s.

f) Le domaine de validité des modèles est [0; 10]. La fonction vitesse, $v(t) = 49 - 9{,}8t$ m/s, est une fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est 49 m/s et la pente est $-9{,}8$ m/s^2. Elle a un zéro à 5 s; à cet instant la vitesse est nulle. La position est $s(t) = 49t - 4{,}9t^2$ m, c'est une fonction quadratique dont le sommet est atteint à 5 s pour une position de 122,5 m. La fonction a des zéros à 0 s et à 10 s qui correspondent à l'instant de départ et à l'instant d'arrivée. Les représentations graphiques des fonctions sont données ci-contre.



TIC

```
>restart;  with(student):
> a:=t->-9.8;
  v:=t->int(a(t),t)+49;
  s:=t->int(v(t),t);
  plot(a(t),t=0..10);
  plot(v(t),t=0..10);
  plot(s(t),t=0..10);
```



Débit et volume

EXEMPLE 10.3.3

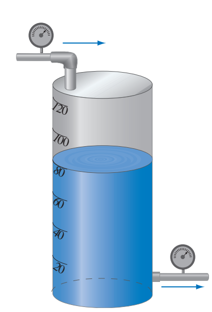
Un système de refroidissement comporte un réservoir d'eau doté d'un système de pompage qui se met en marche lorsque le niveau atteint la marque des 10 L. On estime que le débit du système de pompage t minutes après la mise en marche est décrit par :

$$D(t) = \frac{240t}{(t^2+1)^{3/2}} \text{ L/min},$$

où D est le débit en litres par minute et t est le temps en minutes.

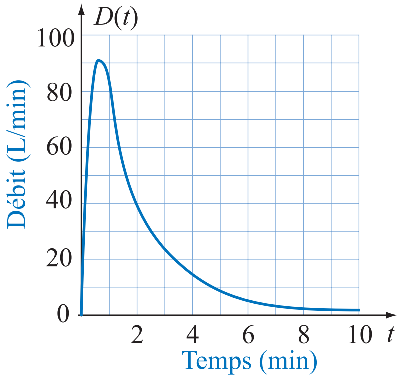
a) Déterminer la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps.

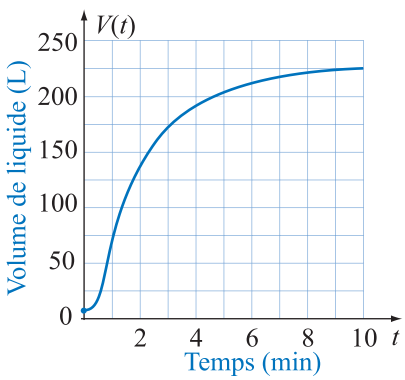
IntegIndefApplic03



b) Calculer le volume de liquide pompé après 10 minutes de fonctionnement.

c) Quelle est la valeur stable de la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir ?





TIC

```
>restart;  with(student):
> d:=t->240*t/((t^2+1)^(3/2));
  v:=t->int(d(t),t)+250;
  plot(d(t),t=0..10);
  plot(v(t),t=0..10);
```

IntegIndefApplic04

Solution

a) La fonction décrivant le volume en fonction du temps est :

$$V(t) = \int D(t)dt = \int \frac{240t}{(t^2+1)^{3/2}}dt.$$

En posant $u = t^2 + 1$, on a $du = 2t\,dt$ et, par substitution, on a :

$$\int \frac{120}{u^{3/2}}du = 120\int u^{-3/2}du = 120\frac{u^{-1/2}}{-1/2} = \frac{-240}{u^{1/2}} + k.$$

L'intégrale donne donc $V(t) = \dfrac{-240}{(t^2+1)^{1/2}} + k.$

Puisque le système de pompage se met en marche lorsque le réservoir ne contient plus que 10 L, on a alors :

$$V(0) = \frac{-240}{(0^2+1)^{1/2}} + k = 10.$$

d'où $k = 250$ et la fonction décrivant le volume est :

$$V(t) = 250 - \frac{240}{(t^2+1)^{1/2}} \text{ L.}$$

b) Le volume d'eau après 10 minutes de fonctionnement est :

$$V(10) = 250 - \frac{240}{(10^2+1)^{1/2}} = 226{,}12 \text{ L.}$$

Il s'est donc ajouté environ à 216 L.

c) La valeur stable, notée V_s, est donnée par la limite lorsque t tend vers l'infini, ce qui donne :

$$V_s = \lim_{t\to\infty}\left(250 - \frac{240}{(t^2+1)^{1/2}}\right) = 250 - \lim_{t\to\infty}\left(\frac{240}{t\left(1+1/t^2\right)^{1/2}}\right)$$

$$= 250 - \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\times\frac{240}{\left(1+1/t^2\right)^{1/2}}\right) = 250 - 0\times\frac{240}{(1+0)^{1/2}} = 250 \text{ L.}$$

La valeur stable est donc de 250 L.

Variation de température

EXEMPLE 10.3.4

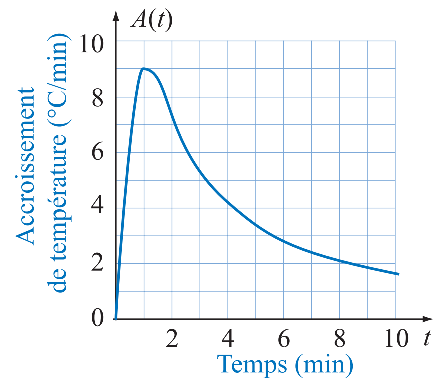
La température d'un appareil augmente lorsque celui-ci fonctionne et on doit s'assurer que cette température ne devient pas trop élevée pour éviter les dommages à l'appareil. On a déterminé que l'accroissement de la température lorsque l'appareil est en marche est décrit en fonction du temps en minutes par :

$$A(t)=\frac{18t}{t^2+2}\ \ °\text{C/min}.$$

a) Sachant que la température ambiante est de 20°C, trouver la fonction décrivant la température après t minutes de fonctionnement de l'appareil.

b) Le système de refroidissement de l'appareil se met automatiquement en marche lorsque la température de l'appareil atteint 50°C. Calculer le temps écoulé entre la mise en marche de l'appareil et la mise en marche du système de refroidissement.

c) Le système de refroidissement diminue la température de l'appareil à un taux constant de – 6°C/min et s'arrête lorsque la température ambiante est atteinte. Représenter graphiquement deux cycles de variation de la température de l'appareil.



Solution

a) On a $T(t)=\int\frac{18t}{t^2+2}dt$, En posant $u = t^2 + 2$, on a $du = 2t\,dt$ et, en substituant dans l'intégrale, on obtient :

$$\int\frac{9}{u}du=9\int\frac{du}{u}=9\ln|u|+k,\quad \text{d'où } T(t) = 9 \ln|t^2 + 2| + k.$$

La température ambiante étant de 20°C, c'est également la température initiale, et $T(0) = 9 \ln |0^2 + 2| + k = 20$, d'où $6{,}24 + k = 20$ et $k = 13{,}76$. La fonction décrivant la température est donc :

$$T(t) = 9 \ln|t^2 + 2| + 13{,}76\ °\text{C}.$$

b) La température atteint 50 °C lorsque :

$$T(t) = 9 \ln |t^2 + 2| + 13{,}76 = 50\ °\text{C}.$$

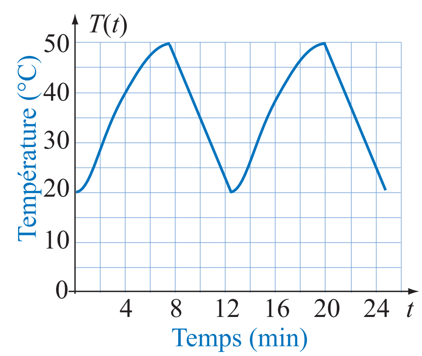
ce qui donne :

$$9 \ln |t^2 + 2| = 36{,}24$$
$$\ln |t^2 + 2| = 4{,}027$$
$$t^2 + 2 = e^{4{,}027}$$
$$t^2 = e^{4{,}027} - 2.$$
$$t=\sqrt{e^{4{,}027}-2}=7{,}35\ \text{min}.$$

c) Le graphique est donné ci-contre.

TIC

```
>restart;with(student):
  A:=t->18*t/(t^2+2);
  T=int(A(t),t)+13.76;
  plot(A(t),t=0..10);
```



Loi de Hooke et énergie

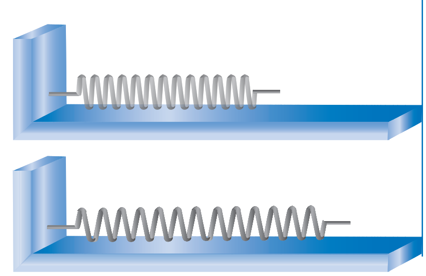
EXEMPLE 10.3.5

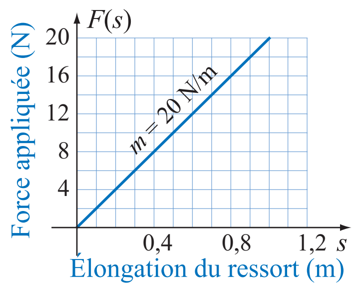
On veut étudier la variation de l'énergie déployée lors de l'étirement de 100 cm d'un ressort dont la constante de rappel est de 20 N/m.

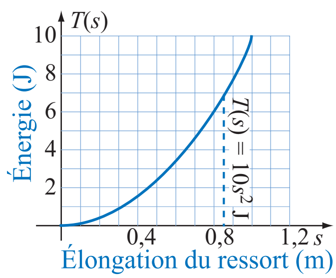
a) Représenter graphiquement la force appliquée en fonction de l'élongation.

b) Exprimer le travail effectué en fonction de l'élongation du ressort et représenter graphiquement.

IntegIndefApplic05







Solution

a) La force appliquée est variable, elle dépend de l'élongation s du ressort et est décrite par :

$$\vec{F}(s) = 20 \text{ N/m} \times s \text{ m} = 20s \text{ N}.$$

Graphiquement, c'est une droite de pente 20 N/m passant par l'origine, puisque la variation est directement proportionnelle à l'élongation.

b) Pour déterminer le travail effectué en fonction de l'élongation, il faut intégrer par rapport à celle-ci. On obtient :

$$W(s) = \int \vec{F}(s)ds = 20\int s\ ds = 20\left(\frac{s^2}{2}\right) + k = 10s^2 + k.$$

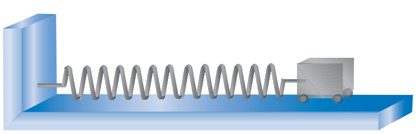
Pour une élongation nulle, $W(0) = 10 \times 0 + k = 0$, d'où $k = 0$ et :

$$W(s) = 10\ s^2 \text{ J}.$$

Graphiquement, le travail est décrit par une variation directement proportionnelle au carré. L'ordonnée d'un point de cette courbe donne l'aire sous la courbe représentant la force en fonction de l'élongation. Cette aire représente le travail effectué, ou l'énergie dépensée, pour étirer le ressort.

EXEMPLE 10.3.6

IntegIndefApplic06

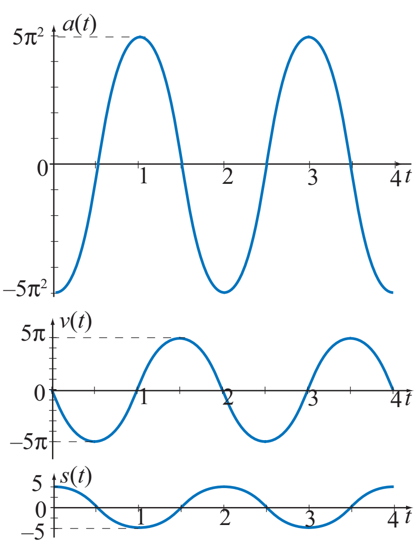


Un chariot peut se déplacer sans friction sous l'action d'un ressort. L'accélération communiquée au chariot par le ressort est donnée par :

$$a(t) = -5\pi^2 \cos \pi t \text{ cm/s}^2.$$

a) Déterminer la fonction décrivant la vitesse du chariot au temps t si celle-ci est nulle au temps 0.

b) Déterminer la fonction décrivant la position du chariot au temps t si celle-ci est de 5 cm au temps 0.



Solution

a) La vitesse est décrite par une primitive de l'accélération :

$$v(t) = \int a(t)\ dt = \int -5\pi^2 \cos \pi t\ dt.$$

En posant $u = \pi t$, on a $du = \pi dt$ et :

$$v(t) = \int a(t)\ dt = -5\pi \int \cos u\ du = -5\pi\ \sin u + k = -5\pi\ \sin \pi t + k.$$

De plus, $v(0) = -5\pi \sin 0 + k = 0 + k = 0$ qui donne $k = 0$. On trouve donc :

$$v(t) = -5\pi \sin \pi t \text{ cm/s}.$$

b) La fonction décrivant la position est une primitive de la fonction décrivant la vitesse. On a donc :

$$s(t) = \int v(t)\ dt = \int -5\pi \sin \pi t\ dt.$$

En posant $u = \pi t$, on a $du = \pi dt$ et :

$$s(t) = \int v(t)\ dt = -5\int \sin u\ du = 5\cos\ u + k = 5\cos \pi t + k.$$

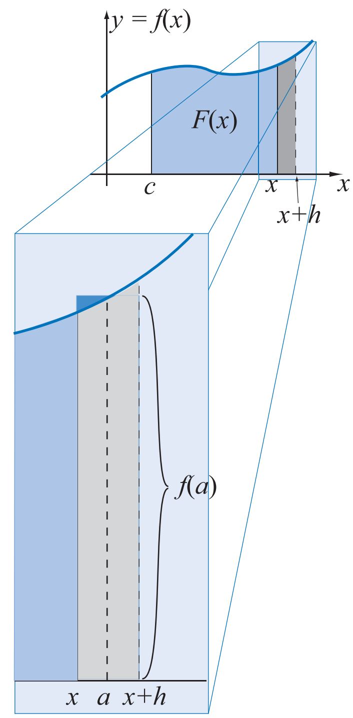
De plus, $s(0) = 5 \cos 0 + k = 5 + k = 5$ qui donne $k = 0$.
On trouve donc $s(t) = 5 \cos \pi t$ cm.

TIC

```
>restart;   with(student):
> a:=t->-5*Pi^2*cos(Pi*t);
  v:=t->int(a(t),t);
  s:=t->int(v(t),t);
  plot({a(t),v(t),s(t)},t=0..4);
```

Retour sur l'apprentissage

Nous avons franchi une étape importante en établissant la relation entre la fonction F décrivant l'aire sous une courbe et la fonction f décrivant cette courbe. Nous avons obtenu que la fonction f est la dérivée de la fonction F, c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$.



Cette relation nous a permis de définir la notion de **primitive** d'une fonction f. La recherche de la primitive signifie trouver la famille de fonctions dont la dérivée est connue et cette recherche de la primitive est l'intégrale indéfinie.

Puisque la fonction à intégrer n'est pas toujours une forme usuelle, nous avons développé quelques démarches pour en déterminer la primitive. Ces démarches visaient à modifier l'intégrande pour l'exprimer comme combinaison des formes usuelles. Ce sont la transformation algébrique de l'intégrande, l'utilisation des identités trigonométriques et le changement de variable.

Cette relation se traduit dans les applications par une relation entre les variations de grandeurs physiques.

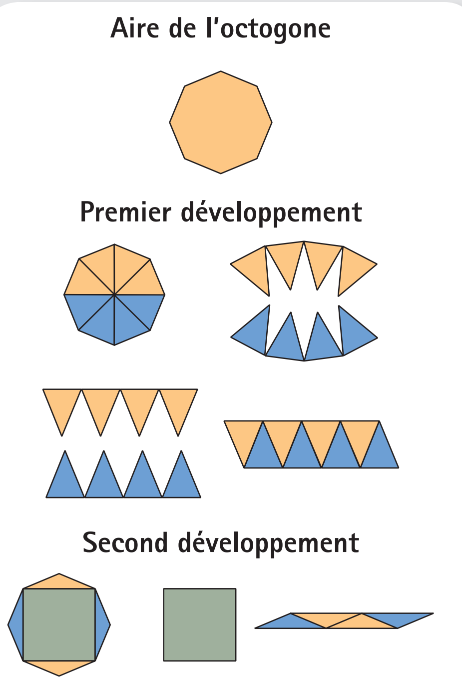
- Si une fonction f décrit un débit dans une conduite alimentant un réservoir en fonction du temps, la primitive F décrit le volume de liquide ayant transité dans cette conduite.

  En déterminant la constante d'intégration à l'aide de la condition initiale, on obtient une solution particulière qui est la description du volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps.
- Si une fonction f décrit l'accélération d'un mobile en déplacement rectiligne en fonction du temps, la primitive F décrit la variation de vitesse de ce mobile en fonction du temps. En déterminant la constante d'intégration on obtient la description de la vitesse du mobile en fonction du temps.
- Si une fonction f décrit la vitesse d'un mobile en déplacement rectiligne en fonction du temps, la primitive F décrit la variation de position de ce mobile en fonction du temps. En déterminant la constante d'intégration on obtient la description par rapport à un point de référence de la position du mobile en fonction du temps.

Un peu *d'histoire*

LA MÉTHODE D'EXHAUSTION

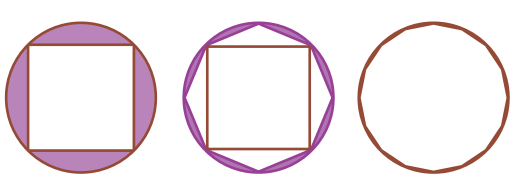
Dans leurs travaux sur la quadrature de figures géométriques à la règle et au compas, les géomètres grecs avaient facilement déterminé comment construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un triangle donné. C'était un résultat précieux parce que tous les polygones peuvent se décomposer en triangles. On peut donc exprimer l'aire d'un polygone comme somme des aires de carrés. L'illustration suivante présente deux façons de décomposer un octogone pour en déterminer l'aire. Le premier cas ramène le problème à la construction d'un carré de même aire qu'un parallélogramme. Dans le deuxième cas, on doit ajouter l'aire de deux parallélogrammes congruents à celle du carré inscrit dans l'octogone.



Peut-on espérer déterminer l'aire d'un cercle en procédant de cette façon ? Antiphon semble en avoir été convaincu puisqu'il a énoncé le postulat suivant.

Postulat d'Antiphon

En doublant le nombre de côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle et en répétant successivement l'opération, on peut rendre nulle la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone.



À l'époque, le postulat d'Antiphon fut critiqué car il statue sur le résultat d'un processus infini. Les géomètres grecs ne pouvaient concevoir qu'un processus infini puisse donner un résultat fini. Puisqu'une aire est infiniment divisible, l'aire du polygone ne peut jamais égaler celle du cercle, il y a toujours une différence non nulle. Les Grecs se butaient au même problème que celui des paradoxes de Zénon. Puisqu'une longueur est infiniment divisible, la flèche d'Achille ne peut jamais atteindre la cible car il reste toujours une demi-longueur à parcourir.

Eudoxe de Cnide (NH Eudoxe 01) a modifié le postulat d'Antiphon de la façon suivante :

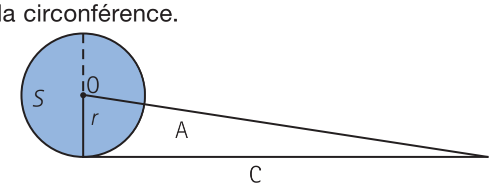
Postulat d'Eudoxe

Si on soustrait d'une grandeur donnée une partie supérieure ou égale à sa moitié, et que du reste, on soustrait une partie supérieure ou égale à sa moitié et ainsi de suite, à la longue, la grandeur restante peut être rendue plus petite que n'importe quelle grandeur prédéfinie de même nature.

C'est cette formulation que l'on retrouve dans le livre X, proposition 1 des *Éléments* d'Euclide (NH Euclide01). En se servant de ce postulat, Archimède (NH Archimède01) a développé une méthode de démonstration que l'on appelle maintenant **Méthode d'exhaustion**. Cette méthode lui a permis d'établir de beaux résultats dont l'un sur l'aire du cercle (NH Archimède03) et un autre sur l'aire d'un segment de parabole (NH Archimède05).

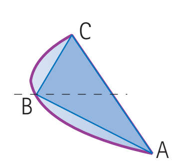
Aire du cercle

L'aire d'un cercle est égale à l'aire d'un triangle dont la hauteur est égale au rayon et la base est égale à la circonférence.



Aire du segment de parabole

L'aire d'un segment de parabole est égale à une fois et un tiers l'aire du triangle inscrit dans ce segment.



10.4 Exercices

1. Un mobile initialement au repos a une accélération uniforme de 0,5 m/s^2 pendant quarante secondes, après quoi son accélération est nulle. Sachant que sa vitesse initiale était nulle,
   a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération au temps t pendant les soixante premières secondes.
   b) Déterminer la fonction décrivant la vitesse au temps t pendant les soixante premières secondes.
   c) Représenter graphiquement cette fonction.
   d) Quelle est la relation entre les graphiques de la fonction accélération et de la fonction vitesse?
   e) Quelle est la vitesse atteinte après 5 secondes? Après 18 secondes?
   f) Quelle est la variation de position durant les 20 premières secondes? 40 secondes? 60 secondes? (la variation de position de l'objet par rapport au point de départ est la distance parcourue lorsque le mouvement est toujours dans le même sens.)
   g) Déterminer et représenter graphiquement la fonction décrivant la distance parcourue au temps t.

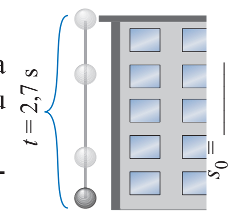
2. Une particule ayant une vitesse de 2 m/s est soumise à une accélération uniforme de $0{,}5t - 1$ m/s^2 pendant 7 secondes.
   a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération au temps t pendant ces sept secondes.
   b) Déterminer la fonction décrivant la vitesse au temps t pendant ces sept secondes.
   c) Représenter graphiquement cette fonction.
   d) Quelle est la relation entre les graphiques de la fonction accélération et de la fonction vitesse?
   e) Quelle est la vitesse atteinte après 3 secondes? Après 6 secondes?
   f) Déterminer la fonction décrivant la position de la particule au temps t et représenter graphiquement.
   g) Calculer la variation de position de la particule durant les 6 premières secondes.

3. Une automobile se déplace à 60 km/h. Le conducteur freine et l'automobile s'arrête en 20 s.
   a) Quelle est l'accélération moyenne de l'automobile en m/s^2 durant cet intervalle de temps?
   b) Quelle est la variation de position durant cet intervalle de temps?

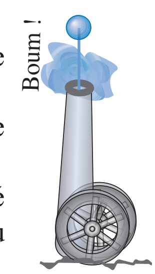
4. On laisse tomber un caillou du sommet d'un édifice. Sachant que l'accélération due à l'attraction terrestre est de 9,8 m/s^2, trouver sa vitesse quatre secondes après le début de la chute?

5. Une moto se déplace à une vitesse de 15 m/s. Pendant quatre secondes la moto a une accélération de 6 m/s^2.
   a) Quelle est la vitesse finale de la moto?
   b) Quelle est la distance parcourue durant ces quatre secondes?

6. On laisse tomber une pierre du haut d'un édifice et on mesure la durée de chute. La durée de la chute a été de 2,7 secondes et l'accélération due à l'attraction terrestre est de 9,8 m/s^2.
   a) Calculer la vitesse de la pierre lors de l'impact au sol.
   b) Calculer la hauteur de l'édifice.



7. À partir du sol, on lance un projectile verticalement avec une vitesse initiale de 60 m/s.
   a) Quelle est sa vitesse après trois secondes?
   b) Quelle est le modèle mathématique décrivant la hauteur du projectile au temps t?
   c) Quelle est la hauteur du projectile à trois secondes ?
   d) Quelle sera la hauteur maximale atteinte par le projectile ?
   e) Combien de temps après avoir été lancé le projectile retombera-t-il au sol ?



8. Un mobile, initialement au repos, accélère au taux de 0,9 m/s^2 et atteint une vitesse de 32 m/s en conservant un mouvement rectiligne.
   a) Quelle était sa vitesse 8 secondes avant d'atteindre sa vitesse finale?
   b) Quelle distance a-t-il parcouru pendant ces 8 secondes?

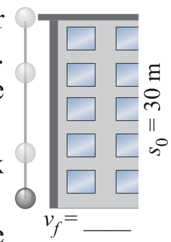
9. Une voiture roule à 28 m/s et prend 12 secondes pour s'arrêter.
   a) Quelle est son accélération pendant le temps de freinage?

b) Quelle est la distance parcourue durant cet intervalle de 12 s?

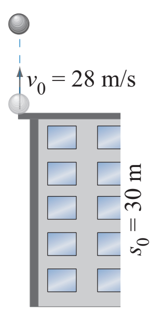
10. Une voiture ayant une vitesse de 4 m/s atteint, en accélérant uniformément, une vitesse de 28 m/s au bout de 32 secondes. Quelle distance a-t-elle parcourue pendant ce temps?

11. On laisse tomber un objet du sommet d'un édifice de dix étages mesurant 30 mètres (considérer le sol comme point de référence).
   a) À quelle vitesse cet objet touchera-t-il le sol?
   b) Exprimer cette vitesse en km/h.

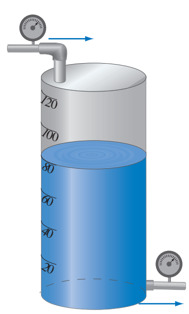
12. On lance un projectile vers le haut à partir du sommet d'un édifice de 30 m de hauteur avec une vitesse initiale de 28 m/s. En prenant le sol comme point de référence :



   a) Quelle est sa vitesse après deux secondes ?
   b) Pendant combien de temps le projectile monte-t-il ?
   c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile ?

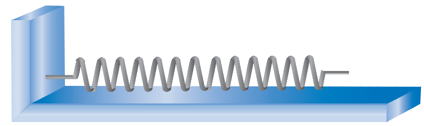


13. Une conduite sert à acheminer un liquide dans un réservoir vide pouvant contenir 375 m^3. Le débit dans cette conduite est de 15 m^3/min.
   a) Représenter graphiquement la fonction décrivant le débit au temps t pendant la période de remplissage.
   b) Quel est le domaine de validité du modèle?



   c) Définir la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir au temps t pendant la période de remplissage.
   d) Représenter graphiquement la fonction volume et donner son domaine de validité.
   e) Quelle relation peut-on établir entre la fonction débit et la fonction volume?

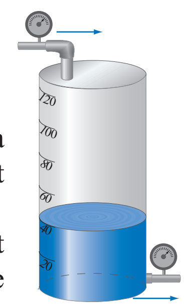
14. On veut étudier la variation du travail lors de l'étirement de 40 cm d'un ressort dont la constante de proportionnalité est de 32 N/m.



   a) Déterminer le modèle mathématique décrivant la force appliquée en fonction de l'élongation.
   b) Calculer le travail effectué lorsque l'étirement du ressort est de 40 cm.
   c) Exprimer le travail effectué en fonction de l'élongation du ressort.
   d) Représenter graphiquement le travail effectué en fonction de l'élongation.

15. Un réservoir est muni d'un système de pompage automatique qui se met en marche lorsque le réservoir ne contient plus que 40 L de liquide et s'arrête automatiquement au bout de 10 minutes. Durant l'opération de pompage, le débit est décrit en fonction du temps par :

$$D(t) = \frac{360t}{(t^2+1)^{3/2}} \text{ L/min.}$$



   a) Représenter graphiquement la fonction décrivant le débit durant ces dix minutes.
   b) Trouver la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps.
   c) Calculer le volume de liquide après 10 minutes de fonctionnement de la pompe.
   d) Représenter graphiquement la fonction décrivant le volume de liquide durant les dix minutes de pompage.

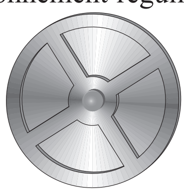
16. La température d'un appareil augmente lorsque celui-ci fonctionne et on doit s'assurer que cette température ne devient pas trop élevée pour éviter les dommages à l'appareil. On a estimé que l'accroissement de la température d'un appareil lors de son fonctionnement est décrit en fonction du temps en minutes par :

$$A(t) = \frac{24t}{0{,}25t^2+2} \text{ °C/min.}$$

   a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accroissement de la température de l'appareil durant l'intervalle [0; 10].
   b) Sachant que la température ambiante est de 20°C, trouver la fonction décrivant la température après t minutes de fonctionnement de l'appareil.

c) Le système de refroidissement de l'appareil se met automatiquement en marche lorsque la température de l'appareil atteint 80°C. Calculer le temps écoulé entre la mise en marche de l'appareil et la mise en marche du système de refroidissement.
d) Le système de refroidissement diminue la température de l'appareil à un taux constant de –12°C/min jusqu'à ce qu'il atteigne la température ambiante. Représenter graphiquement un cycle de variation de la température de l'appareil lorsqu'il est en marche.

17. Un appareil est muni d'une roue d'inertie pour en assurer le fonctionnement régulier.



Selon les spécifications du fabricant, l'accélération de la roue d'inertie t minutes après la mise en marche de l'appareil est décrite par :

$$\alpha(t) = 100e^{-0,25t} \text{ t/min}^2.$$

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération.
b) Déterminer la fonction décrivant la fréquence de rotation de la roue en fonction du temps.
c) Quelle est la valeur stable de la fonction décrivant la fréquence de rotation de la roue d'inertie?
d) Représenter graphiquement la fonction décrivant la fréquence de rotation de la roue d'inertie.
e) Calculer le temps que prend la roue pour atteindre une vitesse égale à la moitié de sa valeur stable.

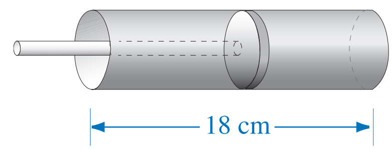
18. Selon les spécifications du fabricant, la pompe alimentant un réservoir se met en marche automatiquement lorsque le réservoir est vide et le débit est alors :

$$D(t) = 48e^{-0,4t} \text{ L/min}.$$

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant le débit de la pompe.
b) Déterminer la fonction décrivant le volume de liquide pompé en fonction du temps.
c) Quelle est la valeur stable de la fonction décrivant le volume de liquide?
d) Représenter graphiquement la fonction décrivant le volume de liquide.
e) Calculer le temps pour qu'une quantité égale à la moitié de la valeur stable soit pompée.

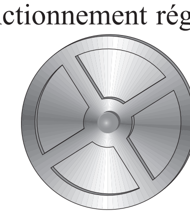
19. Un piston dont la vitesse initiale est de 18π cm/s et dont la position initiale est nulle subit une accélération décrite par :

$$a(t) = -36\pi^2 \sin 2\pi t \text{ cm/s}^2.$$



a) Déterminer la fonction décrivant la vitesse du piston en fonction du temps. Représenter graphiquement.
b) Déterminer la fonction décrivant la position du piston en fonction du temps. Représenter graphiquement.

20. Un appareil est muni d'une roue d'inertie pour en assurer le fonctionnement régulier.



Selon les spécifications du fabricant, lorsque l'appareil est en fonction cette roue tourne à 750 t/min et l'accélération de la roue d'inertie t minutes après la mise hors tension de l'appareil est décrite par :

$$a(t) = -150e^{-0,2t} \text{ t/min}^2.$$

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération.
b) Déterminer la fonction décrivant la fréquence de rotation en fonction du temps.
c) Quelle est la valeur stable de la fonction décrivant la fréquence de rotation de la roue d'inertie?
d) Représenter graphiquement la fonction décrivant la fréquence de rotation.
e) Calculer le temps que prend la roue pour atteindre une fréquence de rotation égale à la moitié de sa valeur stable.

21. Dans une réaction chimique, un réactif se décompose de telle sorte que la variation de sa concentration C, t secondes après le début de la réaction est décrite par :

$$dC/dt = -5,4\times10^{-4}\, e^{-0,0006t} \text{ mol/L·s}.$$

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant le taux de variation de la concentration du réactif.
b) Déterminer la fonction décrivant la concentration de ce réactif au temps t, sachant que sa concentration initiale est de 0,9 mol/L.
c) Calculer la valeur stable et représenter graphiquement la concentration de ce réactif.
d) Calculer le temps que prend le réactif pour atteindre une concentration égale à la moitié de sa valeur stable.

22. Dans une réaction chimique, un produit se compose de telle sorte que la variation de sa concentration C, t secondes après le début de la réaction est décrite par :

$$dC/dt = 2{,}7\times10^{-4}\, e^{-0{,}0005t} \text{ mol/L·s}.$$

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant le taux de variation de la concentration du produit.
b) Déterminer la fonction décrivant la concentration de ce produit au temps t.
c) Calculer la valeur stable et représenter graphiquement la concentration de ce produit.
d) Calculer le temps que prend le produit pour atteindre une concentration égale à la moitié de sa valeur stable.

23. Selon les spécifications du fabricant, le débit de la pompe permettant de vidanger un réservoir de 240 L diminue graduellement à mesure que le réservoir se vide. Ce débit est :

$$D(t) = -72e^{-0{,}3t} \text{ L/min}.$$

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant le débit de la pompe.
b) Déterminer la fonction décrivant le volume de liquide évacué en fonction du temps.
c) Quelle est la valeur stable de la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir durant l'opération de vidange?
d) Représenter graphiquement la fonction décrivant le volume de liquide durant l'opération de vidange.
e) Calculer le temps pour qu'une quantité de liquide égale à la moitié de la valeur stable soit pompée.

Exercices de synthèse

1. Un mobile initialement au repos subit, durant 5 secondes, une accélération décrite en fonction du temps t par :

$$a(t) = 5 - t \text{ m/s}^2.$$

Après ces 5 secondes, l'accélération est nulle.
a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération durant l'intervalle de temps [0; 8].
b) Décrire mathématiquement la vitesse du mobile en fonction du temps durant l'intervalle de temps [0; 8]. Quelle doit être la constante d'intégration pour décrire cette situation? Justifier.
c) À l'aide du modèle obtenu, calculer la vitesse du mobile à 3 s, à 5 s et à 7 s.
d) Représenter graphiquement la fonction décrivant la vitesse au temps t, durant l'intervalle de temps [0; 8].
e) Décrire mathématiquement la position du mobile en fonction du temps, celui-ci étant initialement au point de référence. Quelle doit être la constante d'intégration pour décrire cette situation? Justifier.
f) À l'aide du modèle obtenu, calculer la position du mobile à 3 s, à 5 s et à 7 s.
g) Représenter graphiquement la fonction décrivant la position en fonction du temps, durant l'intervalle de temps [0; 8].

2. La position initiale d'un mobile est à 20 m d'un point fixe et il a une vitesse initiale de 48 m/s. Il subit durant 10 secondes une accélération décrite en fonction du temps t par :

$$a(t) = 6t - 30 \text{ m/s}^2.$$

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération durant l'intervalle de temps [0; 10].
b) Décrire mathématiquement la vitesse du mobile en fonction du temps durant cet intervalle de temps. Quelle doit être la constante d'intégration pour décrire cette situation? Justifier.
c) À l'aide du modèle obtenu, calculer la vitesse du mobile à 2 s, à 5 s et à 8 s. Interpréter dans le contexte.
d) Représenter graphiquement la fonction décrivant la vitesse durant l'intervalle de temps [0; 10].
e) Décrire mathématiquement la position du mobile en fonction du temps.
f) À l'aide du modèle obtenu, calculer la position

du mobile à 2 s, à 5 s et à 8 s.

g) Représenter graphiquement la fonction décrivant la position durant l'intervalle de temps [0; 10].

3. Soit un mobile en mouvement rectiligne ayant une accélération constante a m/s^2, une vitesse initiale non nulle v_0 m/s et dont s_0 est la position initiale par rapport à un point de référence.

a) Montrer par un argument géométrique que la vitesse de ce mobile est décrite en fonction du temps t par :

$$v(t) = at + v_0 \text{ m/s.}$$

b) Montrer par un argument géométrique que la position du mobile est décrite en fonction du temps t par :

$$s(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0 \text{ m.}$$

c) Montrer en utilisant l'intégration que la vitesse de ce mobile est décrite en fonction du temps t par :

$$v(t) = at + v_0 \text{ m/s.}$$

d) Montrer par intégration que la position du mobile est décrite en fonction du temps t par :

$$s(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0 \text{ m.}$$

e) Quel modèle décrit la vitesse en fonction du temps lorsque la vitesse initiale est nulle ?

f) Quel modèle décrit la position au temps t lorsque la position initiale est le point de référence et que la vitesse initiale est v_0 ?

g) Quel modèle décrit la position au temps t lorsque la position initiale est le point de référence et que la vitesse initiale est nulle ?

4. Montrer que dans le cas d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, on a la relation suivante :

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

où s est la distance parcourue, v, la vitesse finale, v_0, la vitesse initiale et a est l'accélération.

5. Une voiture ayant une vitesse de 4 m/s atteint, en accélérant uniformément, une vitesse de 28 m/s au bout de 32 secondes. En utilisant le résultat du numéro 4, quelle distance a-t-elle parcourue pendant ce temps ?

6. On laisse tomber un objet du sommet d'un édifice de dix étages mesurant 30 mètres. En utilisant le résultat du numéro 4.

a) À quelle vitesse cet objet touchera-t-il le sol ?

b) Exprimer cette vitesse en km/h.

7. Une voiture part du repos et accélère uniformément au taux de 0,7 m/s^2.

a) Quelle sera sa vitesse au bout de 12 s ?

b) Quelle distance la voiture parcourt-elle durant ces douze secondes ?