Logique et démonstration

Pourquoi démontrer?

En mathématiques, on insiste sur l'importance de démontrer les résultats. L'exemple suivant devrait convaincre le lecteur de cette nécessité.

En s'amusant à exprimer les nombres entiers impairs comme des sommes, Alphonse de Polignac (1780-1847) avait obtenu, entre autres, les expressions du tableau I ci-contre. En observant ces expressions, il a détecté que les entiers impairs supérieurs à 3 pouvaient s'exprimer comme la somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier. En poursuivant ses investigations, il observe le même comportement sans rencontrer des cas ne vérifiant pas cette conjecture. C'est assez exaltant! Polignac a poursuivi ses calculs pour obtenir d'autres résultats du même type dans le tableau II. Il a alors fait une généralisation par induction et a énoncé la conjecture ci-contre sur les entiers naturels impairs. Dans la présentation de sa conjecture, il a affirmé avoir fait la vérification pour les nombres impairs inférieurs à 3000. Cette conjecture semblait tout à fait plausible à Polignac compte tenu des observations réalisées.

Cependant, énoncer une conjecture ne signifie pas que l'on a découvert une vérité. La conjecture peut être vraie, mais elle peut aussi être fausse. Un sceptique peut toujours nous dire « vous n'avez pas vérifié tous les cas! Il existe peut-être un nombre impair qui n'est pas décomposable de cette façon. Qui peut savoir? »

En fait, Polignac n'avait pas constaté que le nombre impair 127, voir tableau III, ne peut se décomposer comme somme d'une puissance de 2 et d'un nombre premier. Il faut conclure que la conjecture de Polignac est fausse. L'exemple de l'impossibilité d'exprimer 127 comme somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier constitue une démonstration mathématique. C'est ce qu'on appelle une **démonstration par contre-exemple**. En effet, cet exemple démontre que la conjecture de Polignac est fausse.

Conjecture

Une **conjecture** est l'énoncé d'une propriété qui semble plausible, compte tenu des observations effectuées, mais dont la valeur de vérité n'a pas été démontrée.

Raisonnement inductif

Le **raisonnement inductif** est le raisonnement par lequel on énonce une proposition de type universel à partir de l'observation d'un nombre limité de cas particuliers.

L'induction est dite **complète** si on a vérifié tous les cas possibles et elle est dite **amplifiante** si le nombre de cas possibles est infini. Dans l'exemple de Polignac, le nombre de cas est infini.

TABLEAU I

n	*Somme*
3	$2 + 1$
5	$2 + 3$
7	$2 + 5$
9	$2^2 + 5$
11	$2^3 + 3$
13	$2^3 + 5$
15	$2^3 + 7$
17	$2^2 + 13$
19	$2^4 + 3$
21	$2^4 + 5$
23	$2^4 + 7$
25	$2^3 + 17$
27	$2^4 + 11$

TABLEAU II

n	*Somme*
29	$2^4 + 13$
31	$2^3 + 23$
33	$2^4 + 17$
35	$2^5 + 3$
37	$2^5 + 5$
39	$2^5 + 7$
41	$2^2 + 37$
43	$2^5 + 11$
45	$2^5 + 13$
47	$2^4 + 31$
49	$2^5 + 17$
51	$2^5 + 19$
53	$2^4 + 37$

CONJECTURE DE POLIGNAC

Tout entier naturel impair supérieur ou égal à 3 est la somme d'une puissance de 2 et d'un nombre premier.

TABLEAU III
Contre-exemple

$127 = 1 + 126 = 2^0 + (2 \times 63)$
$127 = 2 + 125 = 2 + (5 \times 25)$
$127 = 4 + 123 = 2^2 + (3 \times 41)$
$127 = 8 + 119 = 2^3 + (7 \times 17)$
$127 = 16 + 111 = 2^4 + (3 \times 37)$
$127 = 32 + 95 = 2^5 + (5 \times 19)$
$127 = 64 + 63 = 2^6 + (3 \times 21)$

AUTRE ARTICLE

Pourquoi démontrer ce qui est évident ?

REMARQUE

Le contre-exemple permet de porter un jugement définitif sur la conjecture de Polignac. Le nombre 127 est-il le seul nombre impair ne pouvant pas s'exprimer comme somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier? Il importe peu de le savoir, car un seul contre-exemple est suffisant pour conclure que la conjecture est fausse.

REMARQUE

L'exemple de Polignac illustre les dangers de l'induction amplifiante.

Raisonnement inductif

Boole17

Une conjecture peut être vraie ou fausse. Pour déterminer sa valeur de vérité, il faut faire une démonstration. Une démonstration par contre-exemple permet de conclure que la conjecture est fausse. Pour convaincre que la conjecture est vraie, il faut en faire une démonstration se fondant sur des définitions, des axiomes et des propositions déjà démontrées. La conjecture est alors acceptée comme théorème.

Raisonnement déductif

Boole18

Théorème

Un **théorème** est une proposition dont la validité a fait l'objet d'une démonstration se fondant sur des définitions, des axiomes et d'autres propositions déjà démontrées.

Tant et aussi longtemps qu'on n'a pas trouvé un contre-exemple ou une démonstration, on ne peut statuer sur la valeur de vérité d'une conjecture. Certaines conjectures peuvent sembler très plausible mais se révéler très difficiles à démontrer. Voici iquelques cas.

La conjecture de Goldbach, formulée en 1742 par Christian Goldbach (1690–1764), s'énonce :

Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

Conjecture de Goldbach

n	Sommes
4	$2+2$
6	$3+3$
8	$3+5$
10	$3+7$
12	$5+7$
14	$7+7=3+11$
16	$5+11$
...	...
50	$3+47=7+43=13+37$
...	
100	$3+97=11+89=17+83$ $=29+71=41+59=47+53$

La conjecture de Legendre, proposée par Adrien-Marie Legendre (1752-1833), s'énonce :

Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un nombre premier entre n^2 et $(n+1)^2$.

Conjecture de Legendre

n	n^2	$(n+1)^2$	Nombres premiers
1	1	4	2 et 3
2	4	9	3 et 5
3	9	16	11 et 13
4	16	25	17 et 19
5	25	36	29 et 31
6	36	49	37 et 41 et 43
...	...	...	...

Les conjectures de Goldbach et de Legendre n'ont pas été démontrées à ce jour.

D'autres conjectures ont résisté longtemps. C'est le cas de la conjecture de Fermat :

Pour tout entier n plus grand que 2, il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y et z tels que :

$$x^n + y^n = z^n.$$

Cette conjecture a résisté pendant 350 ans. Andrew Wiles en a présenté une preuve en 1994 qui comportait cependant une faille. Celle-ci a été corrigée en 1995. Cette conjecture est maintenant appelée **Grand théorème de Fermat**.

Dans les conjectures de Goldbach et de Legendre, on peut pousuuivre les vérifications au cas par cas, mais cela ne constituera jamais une preuve puisqu'il y a un nombre infini de cas à vérifier.

Types de démonstration

L'objectif d'une preuve est de convaincre de la vérité ou de la fausseté d'une proposition. Différents cas se présentent.

Quantification existentielle

Démonstration d'existence

Pour convaincre qu'une proposition du type « il existe un ... » est vraie, il suffit de produire un exemple satisfaisant à la condition. Ainsi, pour prouver l'existence d'un élément neutre pour l'addition des matrices de dimension 2×2, il suffit de l'exhiber :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

REMARQUE
Dans certains cas, il n'est pas possible d'exhiber l'élément dont on veut prouver l'existence. C'est le cas, par exemple, lorsqu'on utilise les tests de convergence pour montrer qu'une série converge sans que l'on puisse déterminer la valeur limite.

Dans cette chaîne d'égalités, chaque étape est justifiée implicitement par une définition. Par la définition de l'addition des matrices, on obtient la première égalité. Puisque les éléments des matrices sont des nombres réels, on a $a_{11} + 0 = a_{11}$, car 0 est l'élément neutre de l'addition des nombres réels. de même, $a_{12} + 0 = a_{12}$, $a_{21} + 0 = a_{21}$ et $a_{22} + 0 = a_{22}$.

Pour généraliser cette preuve à des matrices de dimension $m \times n$, il suffit d'ajouter des pointillés judicieusement placés.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 & \cdots & a_{1n}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 & \cdots & a_{2n}+0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+0 & a_{m2}+0 & \cdots & a_{mn}+0 \end{bmatrix}, \text{ addition des matrices,}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ car 0 est élément neutre de l'addition sur } \mathbb{R}.$$

Pour montrer qu'une proposition du type « il existe un ... » est fausse, il faut démontrer qu'aucun élément de l'ensemble de référence ne satisfait à la condition.

Quantification universelle

Démonstration par contre-exemple

Pour convaincre qu'une proposition du type « pour tout ... » est fausse, il suffit d'exhiber un contre-exemple montrant que la proposition n'est pas vraie. La conjecture de Polignac est une proposition universelle portant sur **tous** les entiers impairs plus grands ou égaux à 3 et il a suffi d'exhiber le contre-exemple du nombre 127 pour conclure que la proposition est fausse.

Démonstration directe

Pour prouver qu'une proposition du type « pour tout ... » est vraie, il ne suffit pas d'exhiber un cas particulier, il faut faire une démonstration générale.

La conjecture à démontrer peut être obtenue par une généralisation inductive. Ainsi, en effectuant le produit de deux entiers positifs successifs, on obtient le tableau ci-contre. Une généralisation par induction à partir de ces observations permet d'énoncer la conjecture :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, n(n+1) \text{ est pair.}$$

Cette conjecture semble très plausible, mais comme il s'agit d'une proposition universelle, il faut démontrer qu'elle est toujours vraie en appliquant des définitions, des axiomes et d'autres propositions déjà démontrées.

La démonstration directe se base sur l'implication logique

$$[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q.$$

Cela signifie que si p est vraie et que la conditionnelle est vraie, on peut conclure que q est vrai. Dans cette conjecture, p est vraie si on considère un nombre naturel n. Il faut ensuite montrer que la conditionnelle est vraie.

Produits d'entiers consécutifs

n	$n(n+1)$
1	1 x 2 = 2
2	2 x 3 = 6
3	3 x 4 = 12
4	4 x 5 = 20
5	5 x 6 = 30
6	6 x 7 = 42
...	...

REMARQUE
Une démonstration directe est souvent décrite par la forme « Si H, alors C », où H désigne la ou les hypothèses et C, la conclusion.

EXEMPLE 1

Démontrer la conjecture suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n(n+1) \text{ est pair.}$$

Solution

Soit n un nombre naturel, on a alors deux cas possibles, n est pair ou n est impair.

a) Si n est pair, il est alors divisible par 2 et le produit $n(n + 1)$ est lui aussi divisible par 2. Le produit est donc pair.

b) Si n est impair, alors $n + 1$ est pair. Il est donc divisible par 2 et le produit $n(n + 1)$ est lui aussi divisible par 2. Il est donc pair.

Le produit de deux entiers consécutifs est donc toujours un nombre pair.

REMARQUE
Dans cet exemple, on avait deux cas possibles selon que n est pair ou impair. On a donc fait une induction complète en montrant la validité de la proposition dans ces deux cas.

EXEMPLE 2

Démontrer la conjecture suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \text{si } n \text{ est impair, alors } n^2 \text{ est impair.}$$

Solution

Soit n un entier impair, alors il existe k tel que $n = 2k + 1$. En élevant au carré, on obtient :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

Dans cette expression, $4k^2 + 4k = 2(2k^2 + 2k)$ est un nombre pair.

Par conséquent, $4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k\ ) + 1$ est un nombre impair.
Le carré d'un nombre impair quelconque est donc un nombre impair.

REMARQUE
Dans cet exemple, on utilise la forme générale des entiers impairs, soit $n = 2k + 1$, où k est un entier.

Em mettant 2 en évidence dans l'expression $4k^2 + 4k$, on a obtenu

$2(2k^2 + 2k)$, où $2k^2 + 2k$ est un entier car ces opérations sont fermées sur l'ensemble des entiers. Le produit $2(2k^2 + 2k)$ est donc un entier pair.

La commutativité de l'addition des matrices s'énonce comme suit :

$$\forall\ A \text{ et } B \in \mathbf{M}_{m\times n},\ A+B=B+A.$$

On démontre cette propriété comme suit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

La définition de l'addition des matrices permet d'écrire la première égalité de cette chaîne. Puisque les éléments des matrices sont des nombres réels, on a $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ pour tout i et pour tout j, ce qui permet d'écrire la seconde égalité de cette chaîne. On obtient la dernière égalité en appliquant à nouveau la définition de l'addition des matrices.

Écriture symbolique

Une démonstration est une argumentation dans un langage commun aux interlocuteurs et le libellé de la démonstration dépend du langage utilisé. Ainsi, en adoptant comme l'angage commun que l'expression $[a_{ij}]_{m\times n}$ désigne une matrice d'ordre $m\times n$dont les éléments sont notés a_{ij}, où $i = 1 \ldots n$ et $j = 1 \ldots m$, on démontre la commutativité de l'addition de deux matrices de la façon suivante :

Voir aussi :
NH Preuve et langage

Soit $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ et $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, deux matrices, alors :

$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$, définition de l'addition des matrices,

$= [b_{ij} + a_{ij}]_{m\times n}$, commutativité de l'addition dans les réels,

$= B + A$, définition de l'addition des matrices.

En utilisant le même langage, on démontre l'existence de l'élément neutre de l'addition de la façon suivante :

Soit $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ et O une matrice de dimension $m\times n$, dont tous les éléments sont nuls, alors :

$$
\begin{aligned}
A + O &= [a_{ij} + 0]_{m\times n}, \text{ définition de l'addition des matrices,}\\
&= [a_{ij}]_{m\times n}, \text{ 0 est l'élément neutre de l'addition dans les réels,}\\
&= A, \text{ définition de l'addition des matrices.}
\end{aligned}
$$

VOIR AUSSI
Les articles d'Accromath:

Raisonner par l'absurde

Preuves par récurrence

Démonstration par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde se base sur le fait que :

$$(\neg p \rightarrow c) \Rightarrow p.$$

est une implication logique. En pratique, cela signifie que pour montrer que la proposition p est vraie, on peut supposer que c'est sa négation $\neg p$ qui est vraie et montrer que cela entraîne une contradiction. On conclut alors que la proposition $\neg p$ ne peut être vraie. Elle est donc fausse et la proposition p est vraie.

EXEMPLE 3

Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Boole19

Solution

Supposons la propriété contraire, c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini de nombres premiers. Notons ceux-ci par ordre croissant,

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n.$$

On additionne 1 au produit de ces nombres, ce qui donne :

$$P = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ \ldots \times p_n + 1.$$

Ce nombre est plus grand que p_n, le plus grand des nombres premiers. De plus, il n'est pas divisible par p_1 ni par p_2 ni par aucun des n nombres premiers. Par conséquent, P est un nombre premier puisqu'il n'est divisible par aucun des nombres premiers.

Mais, d'après l'hypothèse, il n'y a pas de nombre premier plus grand que p_n. On a donc une contradiction avec cette hypothèse. On en conclut que le nombre de nombres premiers ne peut être fini, il est donc infini.

NOTE:
Dans ses *Éléments*, le géométre grec Euclide utilise abondamment la démonstration par l'absurde, entre autre pour démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Pour montrer qu'il existe un seul élément possédant une propriété particulière, on a souvent recours à une démonstration par l'absurde. On suppose alors qu'il existe un autre élément qui possède la même propriété que celui dont on veut montrer l'unicité. L'argumentation consiste à montrer que ces deux éléments sont nécessairement égaux.

Boole20

EXEMPLE 4

Montrer que l'élément neutre de l'addition des matrices de dimension $m\times n$ est unique.

Solution

Soit A une matrice de dimension $m\times n$. Posons en hypothèse que la matrice A a deux matrices opposées pour l'addition, B et C, qui sont également de dimension $m\times n$.

Considérons la chaîne d'additions $B + A + C$, on a alors :

$$\begin{aligned} B + A + C &= B + (A + C), \text{ associativité de l'addition des matrices,}\\ &= B + O, C \text{ est l'opposé de } A \text{ pour l'addition des matrices,}\\ &= B, O \text{ est l'élément neutre pour l'addition des matrices.}\end{aligned}$$

On peut également écrire :

$$\begin{aligned} B + A + C &= (B + A) + C, \text{ associativité de l'addition des matrices,}\\ &= O + C, B \text{ est l'opposé de } A \text{ pour l'addition des matrices,}\\ &= C, O \text{ est l'élément neutre pour l'addition des matrices.}\end{aligned}$$

On a donc, $B = C$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, un matrice A ne peut avoir deux matrices opposées pour l'addition. L'opposé d'une matrice A pour l'addition est donc unique.

Démonstration par contraposition

La démonstration par contraposition est basée sur le fait qu'une proposition conditionnelle est logiquement équivalente à la proposition contraposée.

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

EXEMPLE 5

Démontrer par contraposition la propriété suivante :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ si } x^3 + x^2 - 2x < 0, \text{ alors } x < 1.$$

Solution

La contraposée s'écrit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ si } x \geq 1, \text{ alors } x^3 + x^2 - 2x \geq 0.$$

On doit distinguer deux cas, $x = 1$ et $x > 1$.

a) Soit $x = 1$, alors par substitution, on a $1^3 + 1^2 - 2 \times 1 = 0$.

b) Soit $x > 1$. En factorisant, on obtient

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x + 2)(x - 1).$$

Puisque $x > 1$, chacun des facteurs est plus grand que 0, le produit des facteurs est donc plus grand que 0.

Puisqu'une implication est logiquement équivalente à sa contraposée, on en conclut que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ si } x^3 + x^2 - 2x < 0, \text{ alors } x < 1.$$

Démonstration d'une équivalence logique

Une équivalence logique est la conjonction de deux implications logiques, l'implication directe et sa réciproque.

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

Par conséquent, la démonstration d'une équivalence logique comporte la démonstration de deux implications logiques. Ces démonstrations peuvent être directes, par l'absurde ou par contraposition.

Exercices

1. À l'aide d'une table de vérité, montrer que la proposition conditionnelle $p \to q$ est logiquement équivalente à sa contraposée $\neg q \to \neg p$.
2. Déterminer si les conditionnelles suivantes sont des implications logiques.
   a) $[p \wedge (p \to q)] \to q$
   b) $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$
   c) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$
   d) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
3. Comment peut-on savoir si une conjecture est vraie ou fausse?
4. Si on vérifie une conjecture dans un grand nombre de cas et si on ne peut s'imaginer de cas où elle serait fausse, peut-on conclure qu'elle est toujours vraie ?
5. Démontrer la conjecture suivante :
   Si n est un entier pair alors n^2 est un entier pair.
6. Démontrer la conjecture suivante :
   Si n est un entier pair alors n^3 est un entier pair.
7. Démontrer la conjecture suivante :
   Si n est un entier impair alors n^3 est un entier impair.
8. Démontrer que : Si n est un multiple de 3 alors n^2 est un multiple de 3.
9. Démontrer que : Si n est un multiple de 3 alors n^3 est un multiple de 3.
10. Soit le tableau suivant :

n	n^2	$n^2 - 1$
3	9	$9 - 1 = 8 = 1 \times 8$
5	25	$25 - 1 = 24 = 3 \times 8$
7	49	$49 - 1 = 48 = 6 \times 8$
9	81	$81 - 1 = 80 = 10 \times 8$

   a) Quelle observation faites-vous à partir de ce tableau ?
   b) Échafaudez une conjecture généralisant cette observation.
   c) Démontrez cette conjecture.
11. Montrer que tous les nombres naturels sont de la forme $3k$, de la forme $3k + 1$ ou de la forme $3k + 2$.
12. Montrer que le produit de trois nombres naturels consécutifs est divisible par 6.
13. Montrer que : si n est un nombre naturel alors $n^3 - n$ est divisible par 6.
14. Montrer que tous les nombres naturels sont de la forme $5k$, ou de la forme $5k + 1$, ou $5k + 2$, ou $5k + 3$,$5k + 4$.
15. Montrer que : si un nombre naturel n est de la forme $6k + 5$ alors il est de la forme $3k - 1$. Montrer que la réciproque n'est pas vraie.
16. Montrer que le carré d'un nombre naturel est de la forme $3k$ ou $3k + 1$, mais jamais de la forme $3k + 2$.
17. Montrer que le carré de tout nombre naturel de la forme $5k + 1$ est de la même forme.
18. Montrer que l'addition des matrices est une opération associative.
19. Montrer que la matrice nulle est neutre pour l'addition des matrices.
20. Montrer que toute matrice $A_{m \times n}$ a un élément opposé pour l'addition.
21. Montrer que la multiplication d'une matrice par un scalaire est distributive sur l'addition des matrices.
22. Montrer que la multiplication d'une matrice par un scalaire est distributive sur l'addition des scalaires.
23. Montrer que la multiplication d'une matrice par un scalaire est associative avec la multiplication des scalaires.
24. Montrer que le scalaire 1 est neutre pour la multiplication d'une matrice par un scalaire.
25. Soit $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ et $B = [b_{ij}]_{p \times n}$, deux matrices compatibles pour la multiplication matricielle. En écrivant de façon détaillée chacune des matrices de la multiplication, on a :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

L'élément c_{ij} obtenu en multipliant la ligne i de la matrice A et la colonne j de la matrice B, est :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

On peut définir l'élément c_{ij} du produit matriciel à l'aide du symbole de sommation comme suit :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

En utilisant cette définition, montrer que la multiplication des matrices est distributive à gauche sur l'addition des matrices.

Réponses

1.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

La biconditionnelle est toujours vraie, on a donc une équivalence logique.

2. a) Lorsque l'antécédent est vrai, on a p vrai et $p \to q$ vrai. Il faut donc que q soit vrai. L'implication est alors vraie. Puisqu'elle est également vraie dans tous les cas où l'antécédent est faux, on a une implication logique. Voir aussi la table de vérité suivante.

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

b) Lorsque l'antécédent est vrai, on a $p \to q$ vrai et $\neg q$ vrai. Par conséquent, q est faux. Puisque $p \to q$ est vrai, on doit avoir p faux. On a alors $\neg p$ vrai. L'implication est alors vraie. Puisqu'elle est également vraie dans tous les cas où l'antécédent est faux, on a une implication logique. Voir aussi la table de vérité suivante,

p	q	$(p \to q)$	$\wedge$	$\neg q$	$[(p \to q) \wedge \neg q\ ] \to \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1
Ordre:		1	3	2	4

c) Lorsque l'antécédent est vrai, on a $p \vee q$ vrai et $\neg p$ vrai. Par conséquent, p est faux. Puisque $p \vee q$ est vrai, on doit avoir q vrai. Donc, chaque fois que l'antécédent est vrai, la conclusion est vraie. L'implication est alors vraie. Puisqu'elle est également vraie dans tous les cas où l'antécédent est faux, on a une implication logique.Voir aussi la table de vérité suivante.

p	q	$(p \vee q)$	$\wedge$	$\neg p$	$[(p \vee q) \wedge \neg p\ ] \to q$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1
Ordre:		1	3	2	4

d) Lorsque l'antécédent est vrai, on a $p \to q$ vrai et $q \to r$ vrai. Lorsque les antécédents p et q sont vrais, on doit donc avoir q et r vrais. On a alors $p \to r$ vrai. L'implication est alors vraie. Puisqu'elle est également vraie dans tous les cas où l'antécédent est faux, on a une implication logique.Voir aussi la table de vérité suivante.

p	q	r	$[(p \to q)$	$\wedge$	$(q \to r)]$	$\to$	$(p \to r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1
Ordre:			1	3	2	5	4

3. Pour conclure qu'elle est vraie, il faut le démontrer par un raisonnement déductif.
   Pour conclure qu'elle est fausse, il faut trouver un cas particulier qui l'invalide ou montrer qu'elle contredit un axiome ou un principe déjà démontré.
4. Même si on ne peut imaginer de cas où la conjecture est fausse, on ne peut conclure qu'elle est vraie. On peut manquer d'imagination.
5. Soit n un entier pair quelconque, alors il existe un entier r tel que $n = 2r$. Le carré de n s'écrit alors :
   $n^2 = (2r)^2 = 4r^2$. On a donc $n^2 = 2(2r^2)$.
   Dans cette expression, $2r^2$ est un nombre entier que l'on peut représenter par k. Par conséquent, n^2 est de la forme $n^2 = 2k$, où k est un entier. Le carré de n est donc pair. Puisque n est un nombre pair quelconque, ce résultat est valide pour tout nombre pair.
6. Soit n un entier pair quelconque, alors il existe un entier r tel que $n = 2r$. Le cube de n est alors :
   $n^3 = (2r)^3 = 8r^3$. On peut écrire cette expression sous la forme $n^3 = 2(4r^3)$.
   Dans cette expression, $4r^3$ est un nombre entier que l'on peut représenter par k. Par conséquent, $4r^3$ est de la forme $4r^3 = 2k$, où k est un entier. Le cube de n est donc un nombre pair. Puisque n est un entier pair quelconque, ce résultat est valide pour tout entier pair.
7. Soit n un entier impair quelconque, alors il existe un entier r tel que $n = 2r + 1$. Le cube de n est alors :
   $n^3 = (2r + 1)^3 = 8r^3 + 12r^2 + 6r + 1$ que l'on peut écrire sous la forme $n^3 = 2(4r^3 + 6r^2 + 3r) + 1$.
   Dans cette expression, $4r^3 + 6r^2 + 3r$ est un nombre entier que l'on peut représenter par k. Par conséquent, n^3 est de la forme $n^3 = 2k + 1$, où k est un entier. Le cube de n est donc un nombre impair. Puisque n est un entier impair quelconque, ce résultat est valide pour tout entier impair.
8. Soit n un entier multiple de 3 quelconque, alors il existe un entier r tel que $n = 3r$. Le carré de n est alors :
   $n^2 = (3r)^2 = 9r^2$. On peut écrire cette expression sous la forme $n^2 = 3(3r^2)$.
   Dans cette expression, $3r^2$ est un nombre entier que l'on peut représenter par k. En substituant, on constate que

n^2 est de la forme $n^2 = 3k$, où k est un entier.

Le carré de n est donc un multiple de 3. Puisque n est un multiple quelconque de 3, ce résultat est valide pour tout multiple de 3.

9. Soit n un multiple de 3 quelconque, alors il existe un entier r tel que $n = 3r$. Le cube de n est alors : $n^3 = (3r)^3 = 27r^3$. On peut écrire cette expression sous la forme $n^3 = 3(9r^3)$.

   Dans cette expression, $9r^3$ est un nombre entier que l'on peut représenter par k. En substituant, on constate que n^3 est de la forme $n^3 = 3k$, où k est un entier.

   Le cube de n est donc un multiple de 3. Puisque n est un multiple quelconque de 3, ce résultat est valide pour tout multiple de 3.

10. a) On remarque que les valeurs calculées sont toujours divisibles par 8.

    b) **Si n est un nombre naturel impair plus grand que 1, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.**

    c) Démonstration

    Soit n un naturel impair plus grand que 1. Alors, il existe un naturel r tel que $n = 2r + 1$. On a donc :

    $$n^2 - 1 = (2r + 1)^2 - 1 = (4r^2 + 4r + 1) - 1$$
    $$= 4r^2 + 4r = 4(r^2 + r) = 4r(r + 1).$$

    Puisque r et $r + 1$ sont des nombres naturels consécutifs, leur produit est pair. Il existe donc un entier k tel que $r(r + 1) = 2k$.

    D'où, $n^2 - 1 = 4r(r + 1) = 4(2k) = 8k$ et $n^2 - 1$ est un multiple de 8.

11.

k	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
0	0	1	2
1	3	4	5
2	6	7	8
3	9	10	11
4	12	13	14
5	15	16	17
6	18	19	20
...	...	...	...

Puisque la modalité de construction de la table consiste à disposer les nombres en changeant de colonne chaque fois qu'on additionne 1, le processus permet de parcourir tout l'ensemble des nombres naturels. On peut donc généraliser par un raisonnement inductif complet et énoncer que tous les entiers naturels sont de la forme $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$.

Pour parvenir à cette conclusion par un raisonnement déductif, on a recours à la divisibilité euclidienne qui s'énonce comme suit : si a et b sont deux nombres entiers tels que $a \geq b$, alors il existe des entiers q et r tels que :

$$a = qb + r, \text{ où } 0 \leq r < b.$$

On en déduit qu'en divisant un entier par 3, le reste peut être 0, 1 ou 2. Les nombres sont donc de la forme :

$$3k,\ 3k + 1 \text{ ou } 3k + 2.$$

On peut aussi construire une argumentation en se basant sur le fait que le reste de la division d'un entier par 3 peut être égal à 0, à 1 ou à 2.

12. On remarque dans le tableau du numéro précédent qu'en prenant trois nombres naturels consécutifs, au moins un des trois est divisible par 3 et au moins un des trois est pair. Par conséquent, le produit des trois nombres est divisible par 2 et par 3. Il est donc divisible par 6.

13. En décomposant $n^3 - n$ en facteurs, on obtient :

    $$n^3 - n = (n - 1)\, n\, (n + 1).$$

    Par conséquent, $n^3 - n$ est le produit de trois nombres naturels consécutifs, il est donc divisible par 6.

14. Pour parvenir à cette conclusion par un raisonnement déductif, on a recours à la divisibilité euclidienne, En divisant un nombre naturel par 5, le reste peut être 0, 1, 2, 3 ou 4.

15. Soit n, un nombre naturel de la forme $6k + 5$. Alors :

    $$n = 6k + 5 = 6k + 6 - 1 = 3(2k + 2) - 1.$$

    Puisque k est un nombre naturel, alors $2k + 2$ est un nombre naturel, notons-le r. On a donc :

    $n = 6k + 5 = 3r - 1$.

    Par conséquent, si n est de la forme $6k + 5$ alors, il est de la forme $3r - 1$.

    La réciproque n'est pas vraie, puisque 8 est un entier de la forme $3k - 1$ mais il n'est pas de la forme $6k + 5$.

16. Soit n un nombre naturel. Alors n peut être de la forme

    $$3k,\ 3k + 1 \text{ ou } 3k + 2.$$

    Si n est de la forme $3k$, alors il existe un entier r tel que $n = 3r$. En élevant au carré, on a :

    $$n^2 = (3r)^2 = 9r^2 = 3(3r^2).$$

    Par conséquent, n^2 est de la forme $3k$.

    Si n est de la forme $3k + 1$, alors il existe un entier r tel que $n = 3r + 1$. En élevant au carré, on a :

    $$n^2 = (3r + 1)^2 = 9r^2 + 6r + 1 = 3(3r^2 + 2r) + 1.$$

    Or, $3r^2 + 2r$ est un nombre naturel. Par conséquent, n^2 est également de la forme $3k + 1$.

    Si n est de la forme $3k + 2$, alors il existe un entier r tel que $n = 3r + 2$. En élevant au carré, on a :

    $$n^2 = (3r + 2)^2 = 9r^2 + 12r + 4$$
    $$= 9r^2 + 12r + 3 + 1 = 3(3r^2 + 4r + 1) + 1.$$

    Or, $3r^2 + 4r + 1$ est un nombre naturel. Par conséquent, n^2 est de la forme $3k + 1$.

    Puisqu'on a énuméré tous les cas, on peut conclure, par induction complète, que le carré d'un nombre ne peut être de la forme $3k + 2$.

17. Soit n un nombre naturel quelconque de la forme $5k + 1$, où k est un nombre naturel. En l'élevant au carré, on obtient:

$$(5k+1)^2 = 25k^2 + 10k + 1.$$

Dans les deux premiers termes, on peut metre 5 en évidence :

$$(5k+1)^2 = 5(5k^2 + 2k) + 1.$$

Puisque k est un nombre naturel, $5k^2 + 2k$ est un nombre naturel. Par conséquent, $(5k+1)^2$ est égal à 5 fois un nombre naturel plus 1, ce qui complète la démonstration.

18. Soit $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ et $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ trois matrices de même dimension. On a alors :

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) \\ &= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}], \text{ addition des matrices,} \\ &= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})], \text{ addition des matrices,} \\ &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}], \text{ associativité dans } \mathbb{R}, \\ &= [(a_{ij} + b_{ij})] + [c_{ij}], \text{ addition des matrices,} \\ &= ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}], \text{ addition des matrices,} \\ &= (A + B) + C. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'addition des matrices est associative.

19. Soit $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ et $O = [0_{ij}]_{m\times n}$ des matrices de même dimension. On a alors :

$$\begin{aligned} A + O &= [a_{ij}] + [0_{ij}] \\ &= [a_{ij} + 0_{ij}], \text{ addition des matrices,} \\ &= [a_{ij}], \text{ 0 est neutre pour l'addition dans } \mathbb{R}, \\ &= A. \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice nulle est neutre pour l'addition des matrices.

20. Soit $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ une matrice quelconque. On a alors : $-A = [-a_{ij}]$ et :

$$\begin{aligned} A + (-A) &= [a_{ij}] + [-a_{ij}] \\ &= [a_{ij} + (-a_{ij})], \text{ addition des matrices,} \\ &= [0_{ij}], \text{ opposés pour l'addition dans } \mathbb{R}, \\ &= O. \end{aligned}$$

Par conséquent, toute matice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ a un élément opposé pour l'addition des matrices.

21. Soit $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ une matrice et deux scalaires p et q. On a alors :

$$\begin{aligned} (p+q)A &= (p+q)[a_{ij}] \\ &= [(p+q)a_{ij}], \text{ multiplication par un scalaire,} \\ &= [pa_{ij} + qa_{ij}], \text{ distributivité dans } \mathbb{R}, \\ &= [pa_{ij}] + [qa_{ij}], \text{ addition des matrices,} \\ &= p[a_{ij}] + q[a_{ij}], \text{ multiplication par un scalaire,} \\ &= pA + qA. \end{aligned}$$

Par conséquent, la multiplication par un scalaire est distributive sur l'addition des scalaires.

22. Soit $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ et $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ deux matrices de même dimension et p, un scalaire. On a alors :

$$\begin{aligned} p(A + B) &= p([a_{ij}] + [b_{ij}]) \\ &= p[a_{ij} + b_{ij}], \text{ addition des matrices,} \\ &= [p(a_{ij} + b_{ij})], \text{ multiplication par un scalaire,} \\ &= [pa_{ij} + pb_{ij}], \text{ distributivité dans } \mathbb{R}, \\ &= [pa_{ij}] + [pb_{ij}], \text{ addition des matrices,} \\ &= p[a_{ij}] + p[b_{ij}], \text{ multiplication par un scalaire,} \\ &= pA + pB. \end{aligned}$$

Par conséquent, la multiplication par un scalaire est distributive sur l'addition des matrices.

23. Soit $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ une matrice et deux scalaires, p et q. On a alors :

$$\begin{aligned} (pq)A &= (pq)[a_{ij}] \\ &= [(pq)a_{ij}], \text{ multiplication par un scalaire,} \\ &= [p(qa_{ij})], \text{ associativité dans } \mathbb{R}, \\ &= p[(qa_{ij})], \text{ multiplication par un scalaire,} \\ &= p(q[a_{ij}]), \text{ multiplication par un scalaire,} \\ &= p(qA). \end{aligned}$$

Par conséquent, la multiplication par un scalaire est associative avec la multiplication des scalaires.

24. Soit $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ une matrice et le scalaire 1. On a alors :

$$\begin{aligned} 1A &= 1[a_{ij}] \\ &= [1(a_{ij})], \text{ multiplication par un scalaire,} \\ &= [a_{ij}], \text{ 1 est neutre pour la multiplication dans } \mathbb{R}, \\ &= A. \end{aligned}$$

Par conséquent, le scalaire 1 est neutre pour la multiplication par un scalaire.

25. Soit $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ et $C = [c_{ij}]_{p\times n}$, deux matrices compatibles pour la multiplication matricielle avec la matrice $A = [a_{ij}]_{m\times p}$. On doit montrer que la multiplication des matrices est distributive par la gauche sur l'addition des matrices, soit $A\bullet(B + C) = A\bullet B + A\bullet C$, *or :*

$$\begin{aligned} A\bullet(B + C) &= [a_{ij}]_{m\times p}\bullet([b_{ij}]_{p\times n} + [c_{ij}]_{p\times n}) \\ &= [a_{ij}]_{m\times p}\bullet([b_{ij} + c_{ij}]_{p\times n}) \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}), \text{ définition du produit,} \\ &= \sum_{k=1}^{p} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}), \text{ distributivité dans } \mathbb{R}, \\ &= \sum_{k=1}^{p} (a_{ik}b_{kj}) + \sum_{k=1}^{p} (a_{ik}c_{kj}), \text{ regroupement,} \\ &= [a_{ij}]_{m\times p}\bullet[b_{ij}]_{p\times n} + [a_{ij}]_{m\times p}\bullet[c_{ij}]_{p\times n}) \\ &= A\bullet B + A\bullet C. \end{aligned}$$

Par conséquent, la multiplication des matrices est distributive par la gauche sur l'addition des matrices.

Note : on peut également montrer que la multiplication des matrices est distributive par la droite sur l'addition des matrices, soit : $(A+B)\bullet C = A\bullet C + B\bullet C$.