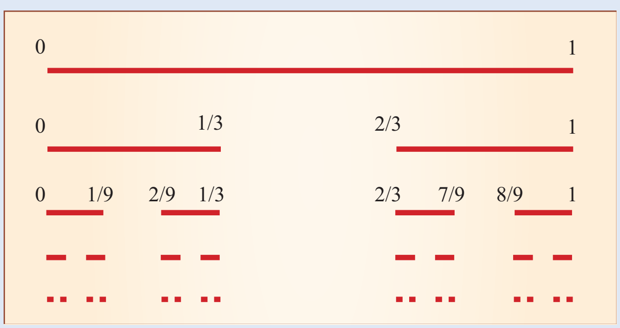
Georg Cantor
1845-1918

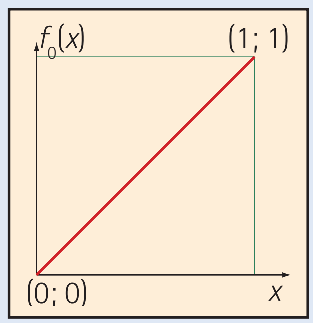
La courbe appelée *Escalier du diable* ou *Escalier de Cantor* a été décrite en 1885 par Ludwig Scheefer qui était un élève de Cantor. Cette fonction est définie à partir de l'ensemble appelé *Poussières de Cantor.*

Georg Cantor
L'escalier du diable

Les poussières de Cantor

En 1883, Cantor publie son fameux ensemble triadique (ou poussières de Cantor). Pour construire l'ensemble, il prend l'intervalle [0,1] et retire le tiers central en conservant les extrémités. Ensuite, il enlève le tiers central de chacun des segments restants et ce, indéfiniment. Le résultat était troublant à l'époque puisqu'il s'agit d'un exemple d'un ensemble qui contient une quantité non-dénombrable de points mais dont la mesure est nulle.





La fonction est définie par

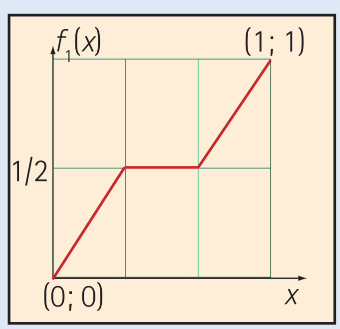
$$f_0(x) = x \text{ si } x \in [0;\ 1]$$

Pour obtenir la fonction f_1, on subdivise l'intervalle [0; 1] en trois sous intervalles. Dans l'intervalle [0; 1/3[, l'image est

$$f_1(x) = 3x/2.$$

Dans l'intervalle central, [1/3; 2/3[, l'image est $f_1(x) = 1/2$ et dans l'intervalle [2/3; 1], l'image est

$$f_1(x) = 3x/2 - 1/2.$$



La transformation consiste en une contraction du tiers selon l'axe horizontal et de une demi selon l'axe vertical.

L'escalier du diable

L'escalier du diable a initialement été construit selon le processus itératif suivant :

On considère comme fonction de départ f_0 la fonction définie par $f_0(x) = x$ sur l'intervalle [0; 1].

Dans l'intervalle [0; 1/3[, la contraction s'effectue en conservant fixe le point (0; 0). La contraction à l'horizontale se traduit en multipliant la variable indépendante par 3 avant le calcul de l'image et la contraction à la verticale s'effectue en multipliant l'image par 1/2. C'est pourquoi $f_1(x) = f_3(3x)/2$.

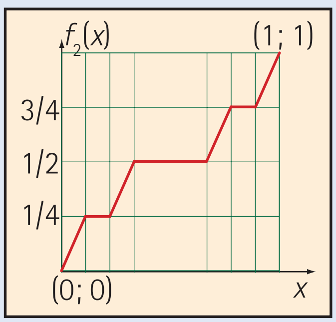
Dans l'intervalle [2/3; 1], la contraction s'accompagne d'une translation du point (0; 0) au point (2/3; 1/2), on a donc

$$f_1(x) = (1 + f_0(3x - 2))/2.$$

Analytiquement, la fonction est définie par

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\begin{cases} f_0(3x) & \text{si } x \in [0;1/3[\\ 1 & \text{si } x \in [1/3;2/3[\\ 1+f_0(3x-2) & \text{si } x \in [2/3;1] \end{cases}$$

Pour obtenir la fonction f_2, on subdivise les intervalles [0; 1/3[et [2/3; 1] en trois sous intervalles et on applique à nouveau la transformation.



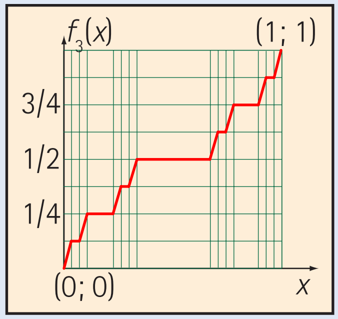
La description analytique est alors :

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\begin{cases} f_1(3x) & \text{si } x \in [0;1/3[\\ 1 & \text{si } x \in [1/3;2/3[\\ 1+f_1(3x-2) & \text{si } x \in [2/3;1] \end{cases}$$

En appliquant à nouveau, on obtient $f_3(x)$ définie par :

$$f_3(x)=\frac{1}{2}\begin{cases} f_2(3x) & \text{si } x \in [0;1/3[\\ 1 & \text{si } x \in [1/3;2/3[\\ 1+f_2(3x-2) & \text{si } x \in [2/3;1] \end{cases}$$

et dont le graphique est :



On définit par récurrence la fonction f_{n+1} de la façon suivante :

$$f_{n+1}(x)=\frac{1}{2}\begin{cases} f_n(3x) & \text{si } x \in [0;1/3[\\ 1 & \text{si } x \in [1/3;2/3[\\ 1+f_n(3x-2) & \text{si } x \in [2/3;1] \end{cases}$$

On obtient ainsi une suite de fonction et la limite de cette suite est l'*escalier du diable.*

Propriétés de la fonction

L'escalier du diable est dérivable presque partout et lorsqu'elle est dérivable, sa dérivée est nulle. La tangente est donc horizontale presque partout, soit sur le complément de l'ensemble de Cantor. Pourtant, elle n'est pas constante puisque l'image de 0 est 0 et celle de 1 est 1. En tout point dont l'abscisse appartient à l'ensemble de Cantor, la fonction n'est pas dérivable et en ces points, la tangente est verticale.

Maple à la rescousse

Sur le site de Mathcurve
http://www.mathcurve.com/fractals/escalierdudiable/escalierdudiable.shtml
on obtient le code Maple pour tracer les fonctions f_n, soit :

```
escalier:=proc(a,b,c,d,t,n) local liste;
if n=0 then liste:=[a,b],[c,d] else liste:=
escalier(a, b, (2*a+c)/3, (1-t)*b+t*d, t, n-1),
escalier((2*a+c)/3, (1-t)*b+t*d, (a+2*c)/3, t*b+(1-t)*d, t, n-1),
escalier((a+2*c)/3, t*b+(1-t)*d, c, d, t, n-1) fi; liste end:
plot([escalier(0,0,1,1,1/2,6)], scaling=constrained);
```

Vous aurez peut-être à effacer les retours entre les lignes. En modifiant le paramètre *n* qui est le dernier paramètre dans l'instruction plot, on peut faire tracer f_0, f_1, f_2, f_3, ...

En modifiant le paramètre *t* qui est l'avant dernier paramètre dans l'instruction plot et dont la valeur ci-haut est 1/2, on peut faire tracer diverses courbes. En posant $t = 2/3$, on obtient la courbe de Bolzano (NH Bolzano02) qui est continue partout mais n'est dérivable nulle part sur [0; 1]. Pour toute valeur de *t* supérieure à 1/2, on obtient une courbe continue partout et qui n'est dérivable en aucun point.