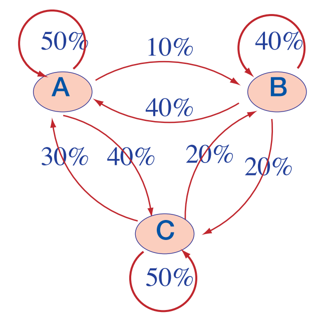
# Chaînes de Markov




## Exercice01a : matrice de transition et vecteur d'état

Trois produits concurrents A, B et C se partagent un marché. Le produit C qui a été commercialisé récemment détient déjà 10 % du marché alors que le produit A en détient 60% et le produit B 30%. La compagnie qui distribue le produit C a fait faire une étude de marché pour déterminer l'intérêt des consommateurs pour ce produit. Les résultats de cette étude ont été consignés dans un diagramme de transition.

Déterminer la matrice de transition P et le vecteur d'état de ce problème.

***Solution***

Puisqu'il y a trois produits, la matrice de transition est de dimension 3×3. On assigne une ligne et une colonne à chaque produit et on représente les pourcentages sous forme décimale, dans la matrice de transition et dans le vecteur d'état.

**Matrice de transition** **État actuel du marché**

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix} \end{array}$$

## Exercice01b : Changements d'état

Calculer le vecteur d'état après une transition et après deux transitions.

***Solution***

Pour déterminer le vecteur d'état après une transition, on multiplie par la gauche, la matrice de transition par le vecteur d'état actuel.

**État actuel du marché** **Matrice de transition** **État du marché après une transition**

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix} \end{array} \bullet \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}20 & 0{,}35 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pour déterminer le vecteur d'état après deux transitions, on multiplie par la gauche, la matrice de transition par le vecteur d'état après une transition.

**État du marché après une transition** **Matrice de transition** **État du marché après deux transitions**

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}20 & 0{,}35 \end{bmatrix} \end{array} \bullet \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}410 & 0{,}195 & 0{,}395 \end{bmatrix} \end{array}$$

## Exercice01c : matrice $(P - I)^t$

Déterminer la matrice $P - I$ de ce problème, ainsi que sa transposée.

***Solution***

On soustrait la matrice identité de la matrice $P$, ce qui donne :

$$P-I=\begin{bmatrix}0,5 & 0,1 & 0,4\\ 0,4 & 0,4 & 0,2\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0,5 & 0,1 & 0,4\\ 0,4 & -0,6 & 0,2\\ 0,3 & 0,2 & -0,5\end{bmatrix}$$

On transpose la matrice obtenue.

$$(P-I)^{\mathrm{t}}=\begin{bmatrix}-0,5 & 0,1 & 0,4\\ 0,4 & -0,6 & 0,2\\ 0,3 & 0,2 & -0,5\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}=\begin{bmatrix}-0,5 & 0,4 & 0,3\\ 0,1 & -0,6 & 0,2\\ 0,4 & 0,2 & -0,5\end{bmatrix}$$

### Exercice01d: matrice M

Déterminer la matrice $M$ et justifier la procédure.

***Solution***

Dans la transposée de la matrice $P - I$, il manque une contrainte du problème. Puisque l'on veut déterminer un vecteur probabilité, il faut que la somme de chacune des variables soit égale à 1, soit :

$$x + y + z = 1.$$

De plus, on peut éliminer n'importe quelle des autres contraintes car leur somme est nulle. On substitue la contrainte du vecteur probabilité à celle représentée par la première ligne de la matrice $P - I$ et on

$$M=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0,1 & -0,6 & 0,2 & 0\\ 0,4 & 0,2 & -0,5 & 0\end{array}\right]$$

### Exercice01e: état stable

Appliquer la méthode de Gauss-Jordan pour déterminer le vecteur décrivant l'état invariant.

***Solution***

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0,1 & -0,6 & 0,2 & 0\\ 0,4 & 0,2 & -0,5 & 0\end{array}\right]\approx\begin{array}{l}L_1\\ 10L_2\\ 10L_3\end{array}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 2 & 0\\ 4 & 2 & -5 & 0\end{array}\right]$$

$$\approx\begin{array}{l}L_1\\ L_2-L_1\\ L_3-4L_1\end{array}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -7 & 1 & -1\\ 0 & -2 & -9 & -4\end{array}\right]\approx\begin{array}{l}7L_1-L_2\\ L_2\\ 7L_3-2L_2\end{array}\left[\begin{array}{ccc:c}7 & 0 & 8 & 6\\ 0 & -7 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -65 & -26\end{array}\right]$$

$$\approx\begin{array}{l}65L_1+8L_2\\ 65L_2+L_3\\ L_3\end{array}\left[\begin{array}{ccc:c}455 & 0 & 0 & 182\\ 0 & -455 & 0 & 91\\ 0 & 0 & -65 & -26\end{array}\right]$$

$$\approx\begin{array}{l}L_1/455\\ L_2/(-455)\\ L_3/(-65)\end{array}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 26/65\\ 0 & 1 & 0 & 13/65\\ 0 & 0 & 1 & 26/65\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 0,4\\ 0 & 1 & 0 & 0,2\\ 0 & 0 & 1 & 0,4\end{array}\right]$$

**REMARQUE**

La matrice $P - I$ est la matrice que l'on obtient en exprimant l'équation $w \bullet P = w$ sous une forme compatible avec la méthode de Gauss-Jordan. On obtient alors :

$w \bullet P = w \bullet I \Rightarrow w \bullet P - w \bullet I = 0 \Rightarrow$
$w \bullet (P - I) = 0 \Rightarrow [w \bullet (P - I)]^{\mathrm{t}} = 0^{\mathrm{t}}$

et par les proriétés de la transposée, $(P - I)^{\mathrm{t}} \bullet w^{\mathrm{t}} = 0^{\mathrm{t}}$. Dans le cas présent, cette équation est :

$$\begin{bmatrix}-0,5 & 0,4 & 0,3\\ 0,1 & -0,6 & 0,2\\ 0,4 & 0,2 & -0,5\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\text{ou}\quad\begin{cases}-0,5x+0,4y+0,3z=0\\ 0,1x-0,6y+0,2z=0\\ 0,4x+0,2y-0,5z=0\end{cases}$$

**REMARQUE**

La somme des éléments sur chacune des lignes de la matrice $P$ d'une chaîne de Markov est égale à 1. Il en est de même pour la matiice $I$. Par conséquent, la somme des éléments de chacune des lignes de la matrice $P - I$ est égale à 0. Il en découle que la somme des éléments de chacune des colonnes de $(P - I)^{\mathrm{t}}$ est égale à 0. Il y a donc toujours une équation éliminable et on peut éliminer n'importe laquelle puisque la somme des éléments de chaque colonne est égale à 0. On peut donc remplacer n'importe quelle de ces équations par l'équation imposée par le fait que $w$ est un vecteur dont la somme des éléments est égale à 1. En pratique, on remplace la première équation.

La matrice échelonnée réduite indique qu'à long terme, le produit A et le produit C occuperont chacun 40 % du marché et le produit B 20%. Le vecteur d'état invariant ne signifie que les consommateurs utiliseront toujours le même produit. Il indique que la proportion de gens utilisant un produit particulier sera stable.

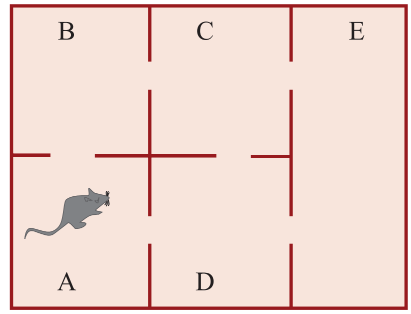
### Exercice 02a: matrice de transition

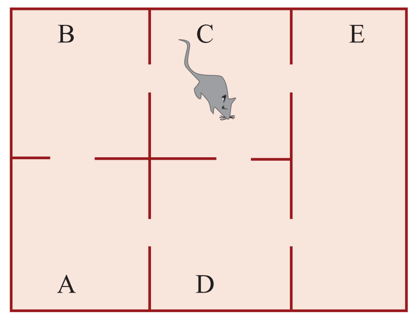
On place une souris dans un compartiment du labyrinthe illustré. Chaque fois qu'elle entend une sonnerie, apeurée, elle change de compartiment en choisissant au hasard une des portes du compartiment où elle se trouve.

Déterminer la matrice donnant les probabilités de transition à partir de chacun des compartiments du labyrinthe

***Solution***

Dans le compartiment A, il y a deux portes de sortie et la probabilité d'aller vers chacun des compartiments adjacents est de 1/2. Dans le compartiment C, il y a trois portes de sortie et la probabilité de transition vers chacun des compartiments adjacents est 1/3.




**MATRICE DE TRANSITION**

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} \quad A & \quad B & \quad C & \quad D & \quad E \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

### Exercice 02b: changements d'état

Si l'état initial est décrit par le vecteur d'état ci-contre. Calculer la probabilité que la souris soit dans le compartiment E après deux transitions.

**VECTEUR D'ÉTAT INITIAL**

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

***Solution***

Pour répondre à cette demande, il faut effectuer le produit du vecteur d'état par la matrice de transition à deux reprises.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & 0 & \frac{5}{12} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

La probabilité que la souris soit dans le compartiment E après deux transitions est de 1/6.

### Exercice 02c : état stable

Déterminer à long terme le nombre moyen de fois que la souris visitera chacun des compartiments.

***Solution***

On détermine d'abord la matrice $P - I$.

$$P-I=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

Puis la matrice $(P - I)^t$.

$$(P-I)^t=\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1 \end{bmatrix}$$

On obtient la matrice $M$ en substituant la contrainte de vecteur d'état à la première ligne de la transposée et en ajoutant la colonne des constantes.

$$M=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

On applique ensuite la méthode de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1 & 0 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} L_1 \\ 6L_2 \\ 6L_3 \\ 6L_4 \\ 3L_5 \end{array}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

**REMARQUE**

Pour connaître le nombre moyen de visites dans chaque compartiment, on doit déterminer l'état stable. On doit construire la matrice augmentée du système d'équations formé par les contraintes.

**À COMPLÉTR**

La procédure pour déterminer l'état stable d'une chaîne de Markov est la suivante :

1. Construire la matrice $P$.
2. Déterminer la matrice $P - I$.
3. Déterminer $(P - I)^t$.
4. Construire la matrice $M$ en remplaçant tous les éléments de la première ligne de la transposée $(P - I)^t$ par des 1.
5. Appliquer la méthode de Gauss-Jordan.
6. Interpréter le résultat selon le contexte.

$$\approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-3L_1 \\ L_3 \\ L_4-3L_1 \\ L_5 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -1 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -9 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} 9L_1+L_2 \\ L_2 \\ 3L_3+L_2 \\ 3L_4+L_2 \\ L_5 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 9 & 0 & 8 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & -9 & -1 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -19 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -24 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_5 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 9 & 0 & 8 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & -9 & -1 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -24 & 3 & -6 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1-8L_3 \\ L_2+L_3 \\ L_3 \\ L_4+19L_3 \\ L_5+2L_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 9 & 0 & 0 & -2 & 30 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & -51 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} 11L_1+L_4 \\ 11L_2+L_4 \\ 22L_3-L_4 \\ L_4 \\ L_5+L_4 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 99 & 0 & 0 & 0 & 279 & 63 \\ 0 & -99 & 0 & 0 & -117 & -36 \\ 0 & 0 & 22 & 0 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & -51 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 & -9 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/9 \\ L_2/(-9) \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5/9 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 11 & 0 & 0 & 0 & 31 & 7 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 22 & 0 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & -51 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} 6L_1+31L_5 \\ 6L_2+13L_5 \\ 6L_3-15L_5 \\ 6L_4-51L_5 \\ L_5 \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 66 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 66 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 132 & 0 & 0 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 132 & 0 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1 \end{array}\right]$$

On obtient qu'à long terme, le nombre de visites dans la case A sera en moyenne de 16,7%, dans la case B de 16,7 %, dans la case C de 25 % , dans la case D de 25 % et dans la case E de 16,7 %.

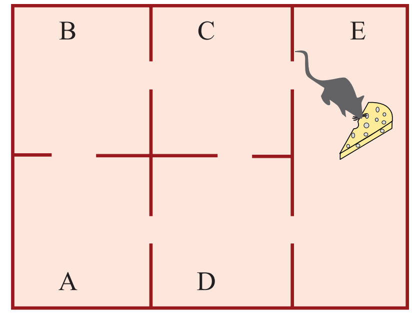
**REMARQUE**

Selon les probabilités obtenues, si la souris peut supporter le supplice 600 fois de suite, elle devrait aller environ 100 fois dans chacun des compartiments A, B et E et environ 150 fois dans chacun des deux autres compartiments.

### Exercice 03a: matrice de transition

On place une souris dans un compartiment du labyrinthe illustré. Chaque fois qu'elle entend une sonnerie, apeurée, elle change de compartiment en choisissant au hasard une des portes du compartiment où elle se trouve.

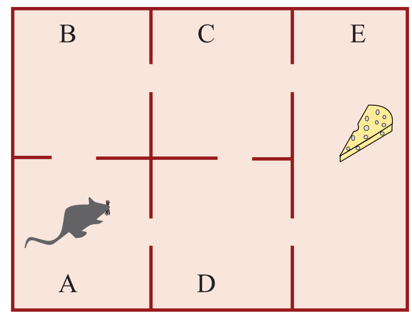



Dans le compartiment E, on place un fromage et lorsqu'elle atteint ce compartiment, la souris n'en bouge plus car, comme chacun sait, « ventre affamé n'a point d'oreilles »

Déterminer la matrice canonique donnant les probabilités de transition à partir de chacun des compartiments du labyrinthe.

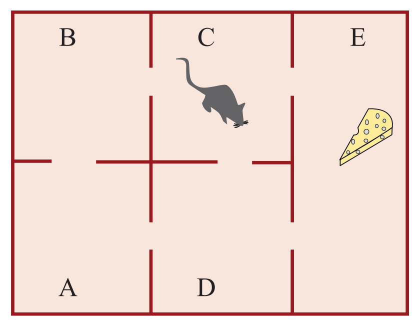
***Solution***

On construit la matrice canonique en plaçant les états absorbants dans le coin supérieur gauche de la matrice. Dans le présent exercice, il y a un seul état absorbant. Si la souris est dans le compartiment E, la probabilité qu'elle y reste est égale à 1 et la probabilité qu'elle aille dans les autres compartiments est égale à 0.




La matrice canonique est $\left[\begin{array}{c:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{array}\right]$.

### Exercice 03b: vers un état non absorbant




Calculer la probabilité que la souris n'ait pas trouvé le fromage après la troisième transition selon le compartiment dans lequel elle est initialement placée.

***Solution***

Pour déterminer cette probabilité, il faut calculer $Q^3$, on obtient :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}, \; Q^2 = \begin{bmatrix} 5/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 0 & 5/12 & 0 & 5/12 \\ 5/18 & 0 & 5/18 & 0 \\ 0 & 5/18 & 0 & 5/18 \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} 0 & 25/72 & 0 & 25/72 \\ 25/72 & 0 & 25/72 & 0 \\ 0 & 25/108 & 0 & 25/108 \\ 25/108 & 0 & 25/108 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Initialement en A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \boxed{25/72} & 0 & \boxed{25/72} \\ 25/72 & 0 & 25/72 & 0 \\ 0 & 25/108 & 0 & 25/108 \\ 25/108 & 0 & 25/108 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La matrice $Q^3$ indique que si la souris était initialement dans le compartiment A, la probabilité qu'elle soit dans le compartiment B après trois transitions est de 25 chances sur 72. La probabilité qu'elle soit dans le compartiment D après trois transitions est également de 25 chances sur 72.

Il est impossible qu'après la troisième transition elle soit dans le compartiment A ou dans le compartiment C. On peut faire la même analyse pour chaque compartiment.

En multipliant la matrice $Q^3$ par la matrice de dimension 4 par 1 dont tous les éléments sont des uns, on fait la somme des éléments sur chacune des lignes.

$$\begin{bmatrix} 0 & 25/72 & 0 & 25/72 \\ 25/72 & 0 & 25/72 & 0 \\ 0 & 25/108 & 0 & 25/108 \\ 25/108 & 0 & 25/108 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/72 \\ 50/72 \\ 50/108 \\ 50/108 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/36 \\ 25/36 \\ 25/54 \\ 25/54 \end{bmatrix}$$

Au total, la probabilité que la souris n'ait pas trouvé le fromage si elle était initialement dans le compartiment A est de 50 chances sur 72 ou de 25 chances sur 36.

### Exercice 03c: vers un état absorbant

Calculer la probabilité que la souris ait trouvé le fromage après la troisième transition selon le compartiment dans lequel elle est initialement placée.

***Solution***

En calculant $R + Q \bullet R + Q^2 \bullet R$, la sous matrice du coin inférieur gauche de la matrice $P^3$, on détermine la probabilité que la souris ait trouvé le fromage selon le compartiment où elle est placée initialement.

$$Q \bullet R = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$Q^2 \bullet R = \begin{bmatrix} 5/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 0 & 5/12 & 0 & 5/12 \\ 5/18 & 0 & 5/18 & 0 \\ 0 & 5/18 & 0 & 5/18 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$R + Q \bullet R + Q^2 \bullet R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/9 \\ 1/9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5/36 \\ 5/36 \\ 5/54 \\ 5/54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/36 \\ 11/36 \\ 29/54 \\ 29/54 \end{bmatrix}$$

La somme des matrices de probabilités indique que si la souris était initialement dans le compartiment A, la probabilité qu'elle trouve le fromage après la troisième transition est de 11 chances sur 36. On fait une analyse analogue pour les autres compartiments.

Probabilités de ne pas avoir trouvé le fomage après trois changements de cellule selon la cellule initiale.

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 25/36 \\ 25/36 \\ 25/54 \\ 25/54 \end{bmatrix}$$

$$P = \left[\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & O_{r\times s} \\ \hline R_{s\times r} & Q_{s\times s} \end{array}\right] \text{ et}$$

$$P^3 = \left[\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & O_{r\times s} \\ \hline (R+Q\bullet R+Q^2\bullet R)_{s\times r} & Q^3_{s\times s} \end{array}\right]$$

**REMARQUE**

On peut reconstituer la matrice $P^3$ en insérant les résultats des calculs sur les sous matrices $Q$ et $R$.

On remarque que $P^3$ est une matrice de transition puisque la somme des éléments de chacune des lignes est égale à 1.

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 11/36 & 0 & 25/72 & 0 & 25/72 \\ 11/36 & 25/72 & 0 & 25/72 & 0 \\ 29/54 & 0 & 25/108 & 0 & 25/108 \\ 29/54 & 25/108 & 0 & 25/108 & 0 \end{array}\right]$$

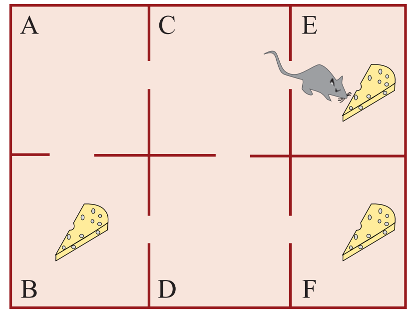
Probabilités d'avoir trouvé le fromage après trois changements de cellule selon la cellule initiale.

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 11/36 \\ 11/36 \\ 29/54 \\ 29/54 \end{bmatrix}$$

Après trois changements de cellule selon la cellule initiale

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \text{Trouvé} \\ \begin{bmatrix} 11/36 \\ 11/36 \\ 29/54 \\ 29/54 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Pas trouvé} \\ \begin{bmatrix} 25/36 \\ 25/36 \\ 25/54 \\ 25/54 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Somme} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

### Exercice 04a: matrice de transition




On place une souris dans un compartiment du labyrinthe illustré. Chaque fois qu'elle entend une sonnerie, apeurée, elle change de compartiment en choisissant au hasard une des portes du compartiment où elle se trouve.

Dans les compartiments B, E et F, on place un fromage et lorsqu'elle atteint ce compartiment, la souris n'en bouge plus car, comme chacun sait, « ventre affamé n'a point d'oreilles »

Déterminer la matrice canonique donnant les probabilités de transition à partir de chacun des compartiments du labyrinthe.

***Solution***

La matrice canonique est

$$\begin{array}{cc} & \text{Destination} \\ & \begin{array}{cccccc} B & E & F & A & C & D \end{array} \\ \text{Départ} \begin{array}{c} B \\ E \\ F \\ A \\ C \end{array} & \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right] \end{array}.$$

### Exercice 04b: matrice de transition vers un état non absorbant

Calculer la probabilité que la souris n'ait pas trouvé le fromage après la troisième transition selon le compartiment dans lequel elle est initialement placée.

***Solution***

Pour déterminer cette probabilité, il faut calculer $Q^3$.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 5/18 & 0 \\ 1/9 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 5/18 & 0 \\ 1/9 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5/36 & 0 \\ 5/54 & 0 & 5/54 \\ 0 & 5/54 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & C & D \end{array} \\ \text{Initialement} \begin{array}{c} A \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \boxed{5/36} & 0 \\ 5/54 & 0 & 5/54 \\ 0 & 5/54 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La matrice $Q^3$ indique que si la souris était initialement dans le compartiment A, la probabilité qu'elle soit dans le compartiment C après trois transitions est de 5 chances sur 36.

Il est impossible qu'après la troisième transition elle soit dans le compartiment A ou dans le compartiment D. On peut faire la même analyse pour chaque compartiment.

En multipliant la matrice $Q^3$ par la matrice de dimension 3 par 1 dont tous les éléments sont des 1, on fait la somme des éléments sur chacune des lignes.

$$\begin{bmatrix} 0 & 5/36 & 0 \\ 5/54 & 0 & 5/54 \\ 0 & 5/54 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/36 \\ 10/54 \\ 5/54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/36 \\ 5/27 \\ 5/54 \end{bmatrix}$$

Probabilités de ne pas avoir trouvé un fomage après trois changements de cellule selon la cellule initiale.

$$\begin{array}{c} A \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 5/36 \\ 5/27 \\ 5/54 \end{bmatrix}$$

Au total, la probabilité que la souris n'ait pas trouvé le fromage si elle était initialement dans le compartiment A est de 5 chances sur 36, si elle était dans le compartiment C de 5 chances sur 27, si elle était dans le compartiment D la probabilité est également de 5 chances sur 27.

### Exercice 04c: vers un état absorbant

Calculer la probabilité que la souris trouve un fromage après la troisième transition si elle est placée initialement dans un des compartiments non absorbant.

***Solution***

$$I + Q + Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 5/18 & 0 \\ 1/9 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/3 & 23/18 & 1/3 \\ 1/9 & 1/3 & 10/9 \end{bmatrix}$$

**REMARQUE**

Puisque

$$R + Q\bullet R + Q^2\bullet R = (I + Q + Q^2)\bullet R,$$

on détermine la somme des matrices $I$, $Q$ et $Q^2$ et on multiplie la matrice $R$ par cette somme de matrices.

$$(I + Q + Q^2) \bullet R =$$

$$\begin{bmatrix} 7/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/3 & 23/18 & 1/3 \\ 1/9 & 1/3 & 10/9 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/36 & 1/6 & 1/18 \\ 5/18 & 23/54 & 1/9 \\ 23/54 & 1/9 & 10/27 \end{bmatrix}$$

En effectuant la somme des éléments de chacune des lignes du produit de matrice, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 25/36 & 1/6 & 1/18 \\ 5/18 & 23/54 & 1/9 \\ 23/54 & 1/9 & 10/27 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31/36 \\ 22/27 \\ 49/54 \end{bmatrix}$$

Probabilités d'avoir trouvé le fromage après trois changements de cellule selon la cellule initiale.

$$\begin{array}{c} A \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 31/36 \\ 22/27 \\ 49/54 \end{bmatrix}$$

Après trois changements de cellule selon la cellule initiale.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \text{Trouvé} \\ \begin{bmatrix} 31/36 \\ 22/27 \\ 49/54 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Pas trouvé} \\ \begin{bmatrix} 5/36 \\ 5/27 \\ 5/54 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Somme} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Si la souris est initialement placée dans le compartiment A, il y a 31 chances sur 36 qu'elle trouve un fromage après trois transitions. Si elle est placée dans le compartiment C, il y a 22 chances sur 27 qu'elle en trouve un et la probabilité est de 49 chances sur 54 si elle est placée initialement dans le compartiment D.

# Modèle de Leontief

### Exercice 01a: matrice de transition

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 30 \\ 38 \\ 23 \end{bmatrix}$$

Trois usines s'échangent l'une l'autre des biens qu'elles utilisent pour leur production. La matrice des échanges en dollars pour chaque dollar produit a été déterminée et est donnée ci-contre. La demande externe pour l'année est de 30 millions de dollars pour les produits de l'usine A, 38 millions pour ceux de l'usine B et 23 millions pour ceux de l'usine C.

Déterminer la matrice décrivant cette situation et tenant compte à la fois de la demande interne et de la demande externe.

***Solution***

On détermine d'abord la matrice $I - Q$.

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 \\ -0,3 & -0,2 & 1,0 \end{bmatrix}$$

On construit la matrice augmentée du système d'équations à résoudre.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0,8 & -0,1 & -0,2 & 30 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 & 38 \\ -0,3 & -0,2 & 1 & 23 \end{array}\right]$$

### Exercice 01b: Résolution

Déterminer les conditions d'équilibre par la méthode de Gauss-Jordan.

***Solution***

On multiplie chacune des lignes de la matrice pour tous les éléments soient des entiers afin d'alléger les calculs.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0,8 & -0,1 & -0,2 & 30 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 & 38 \\ -0,3 & -0,2 & 1,0 & 23 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} 10L_1 \\ 10L_2 \\ 10L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{8} & -1 & -2 & 300 \\ -2 & 7 & -2 & 380 \\ -3 & -2 & 10 & 230 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{c} L_1 \\ 4L_2 + L_1 \\ 8L_3 + 3L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 300 \\ 0 & \boxed{27} & -10 & 1\,820 \\ 0 & -19 & 74 & 2\,740 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} 27L_1 + L_2 \\ L_2 \\ 27L_3 + 19L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 216 & 0 & -64 & 9\,920 \\ 0 & 27 & -10 & 1\,820 \\ 0 & 0 & 1\,808 & 108\,560 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{c} L_1/8 \\ L_2 \\ L_3/16 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 0 & -8 & 1\,240 \\ 0 & 27 & -10 & 1\,820 \\ 0 & 0 & \boxed{113} & 6\,785 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} 113L_1 + 8L_3 \\ 113L_2 + 10L_3 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3\,051 & 0 & 0 & 194\,400 \\ 0 & 3\,051 & 0 & 273\,510 \\ 0 & 0 & 113 & 6\,785 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{c} L_1/3\,051 \\ L_2/3\,051 \\ L_3/113 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 63,7 \\ 0 & 1 & 0 & 89,6 \\ 0 & 0 & 1 & 60,0 \end{array}\right]$$

Pour répondre à la fois à la demande externe et aux besoins de chacune des usines, il faut que la production totale de l'usine A soit de 63,7 millions de dollars, celle de l'usine B de 89,6 millions et celle de l'usine C de 60 millions.