NOTIONS d'ALGÈBRE

CHAPITRE 1

Utiliser les notions d'algèbre dans la résolution de problèmes

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont :

- la manipulation correcte d'expressions algébriques comportant des exposants et des radicaux;
- l'application correcte des procédures d'opérations sur les polynômes;
- l'application correcte des procédures de factorisation;
- la résolution de systèmes d'équations simples.

OBJECTIFS

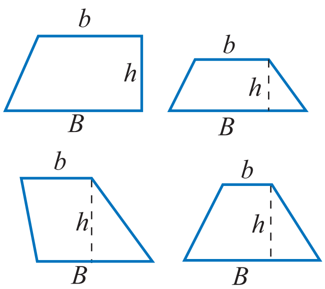
1.1 Manipuler des expressions algébriques selon les règles de l'art.

1.2 Appliquer les procédures de factorisation des trinômes.

1.3 Appliquer correctement les procédures de résolution d'une équation ou d'une inéquation.

1.4 Appliquer correctement les procédures pour isoler une variable dans une équation ou une inéquation.

1.1 Notions d'algèbre



Les expressions algébriques ont de multiples usages dans la science et la technologie modernes. Elles permettent entre autres l'écriture condensée de relations et de propriétés communes à différents objets. Par exemple, les figures représentées ci-contre ont des formes différentes, mais elles sont toutes des trapèzes puisque chacune a deux côtés parallèles. On démontre facilement, en géométrie, que l'aire d'un trapèze est égale à « la demi-somme des bases multipliée par la hauteur ». Cette relation entre l'aire du trapèze et la mesure de ses bases et de sa hauteur s'écrit algébriquement sous la forme

$$A = \frac{b+B}{2} \times h.$$

La description symbolique de propriétés communes à des ensembles d'objets est une application de l'algèbre qui permet également de résoudre de façon très efficace des problèmes comportant des inconnues.

Polynômes_01

Expressions algébriques

$$\frac{3a^3x + 2b^2y}{3ab}$$

Expression algébrique

Expression algébrique

Une **expression algébrique** est un groupe de lettres et de nombres reliés entre eux par les symboles d'opérations arithmétiques.

Termes

$$\overbrace{4x^3}^{} + \overbrace{25a^2}^{}$$

Facteurs Coefficient

Terme, facteur et coefficient

On appelle **terme** chaque élément d'une addition.

On appelle **facteur** chaque élément d'une multiplication.

Un **coefficient** d'une expression algébrique est un nombre qui est facteur de cette expression algébrique.

Dans l'expression $2ab + 5b$, il y a deux termes : le terme $2ab$ et le terme $5b$. Le terme $2ab$ comporte trois facteurs puisqu'il est le produit de trois éléments. Le nombre 2 est le coefficient du terme en ab et le nombre 5 est le coefficient du terme en b.

Puissance et exposant

Exposant

$$\underbrace{a^n}_{\text{Puissance } n^e \text{ de } a} = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Puissance et exposant

On appelle **puissance n^e** d'un nombre a le produit de n facteurs égaux à ce nombre. Elle est représentée par a^n.

Le nombre n est appelé **exposant de** a.

THÉORÈME

Règles d'utilisation des exposants

Soit a et $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, et m et $n \in \mathbb{R}$.

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^0 = 1$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
- $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ sauf si $a < 0$ et n est pair.
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ sauf si $a < 0$ et n pair.

REMARQUE

Il découle de la règle des signes relative au produit de deux nombres algébriques que :

- toute puissance d'un nombre positif est positive;
- la puissance d'un nombre négatif est positive si l'exposant est pair, et négative si l'exposant est impair.

Exposant_01
Exposant_04
Exposant_06

EXEMPLE 1.1.1

Évaluer l'expression suivante en appliquant les règles d'utilisation des exposants entiers positifs.

$$\frac{3^4 \times 15^3}{27^2}.$$

Autres exemples

Exposant_02
Exposant_03
Exposant_05
Exposant_07

Solution

On exprime d'abord 15 et 27 sous la forme de puissances de nombres premiers :

$$\frac{3^4 \times 15^3}{27^2} = \frac{3^4 \times (3 \times 5)^3}{(3^3)^2} = \frac{3^4 \times 3^3 \times 5^3}{(3^3)^2}$$

$$= \frac{3^7 \times 5^3}{3^6} = 3 \times 5^3 = 3 \times 125 = 375$$

EXEMPLE 1.1.2

Évaluer les expressions à l'aide des règles d'utilisation des exposants :

a) $\sqrt{4^3}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}}$

Autres exemples

Exposant_07

Solution

a) $\sqrt{4^3} = 4^{3/2}$, selon la règle des exposants fractionnaires;

$= (2^2)^{3/2}$, on exprime 4 en base 2;

$= (2^2)^{3/2} = 2^{2 \times 3/2} = 2^3 = 8$, règle de la puissance d'une puissance.

b) En appliquant les règles, on obtient :

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \left(\frac{27}{64}\right)^{1/3} = \left(\frac{3^3}{2^6}\right)^{1/3} = \frac{(3^3)^{1/3}}{(2^6)^{1/3}} = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

Lors de la manipulation d'expressions algébriques, on peut avoir à déterminer le plus grand commun diviseur ou le plus petit commun multiple. On procède de la même façon que s'il s'agissait de nombres.

EXEMPLE 1.1.3

Trouver le plus grand commun diviseur des expressions a^2b^3c et $a^4b^2c^3$.

■ *Solution*

Le plus grand commun diviseur est le produit des facteurs communs affectés de leur plus petit exposant dans les décompositions en facteurs premiers. Le plus grand commun diviseur de a^2b^3c et $a^4b^2c^3$ est donc

$$a^2b^2c.$$

EXEMPLE 1.1.4

Trouver le plus petit commun multiple des expressions $6ab^2c$ et $8a^2bc^3$.

■ *Solution*

Le plus petit commun multiple est le produit de tous les facteurs apparaissant dans l'une ou l'autre des expressions, chaque facteur étant affecté du plus grand exposant qui lui est assigné dans l'une des décompositions en facteurs premiers. Le plus grand commun diviseur de $6ab^2c$ et $8a^2bc^3$ est donc :

$$24a^2b^2c^3.$$

REMARQUE

Les parenthèses permettent de préciser les priorités des opérations. Lorsqu'on doit effectuer plusieurs opérations, on respecte l'ordre suivant.

1. On effectue d'abord les opérations à l'intérieur des parenthèses.
2. On calcule les puissances (exposants).
3. On effectue les multiplications et les divisions, de la gauche vers la droite.
4. On complète par les additions et les soustractions, de la gauche vers la droite.

Parenthèses

Dans les expressions algébriques, on utilise des parenthèses pour indiquer que les termes qu'elles renferment sont considérés comme une expression algébrique globale par rapport aux expressions et opérations à l'extérieur de celle-ci. Les parenthèses indiquent la priorité des opérations : on effectue d'abord les opérations à l'intérieur des parenthèses pour calculer la valeur numérique. Ainsi, pour calculer celle de l'expression $(3x + 2)(x - 1)$ lorsque $x = 4$, on substitue d'abord 4 à x, puis on effectue les opérations en commençant par celles à l'intérieur de parenthèses

$$(3 \times 4 + 2)(4 - 1) = (12 + 2)(3) = (14)(3) = 42.$$

Distributivité

On n'utilise pas obligatoirement le symbole de la multiplication pour représenter le produit de deux expressions. Ainsi, l'expression $2x^2(3x - 2)$ représente le produit de deux expressions algébriques, soit $2x^2$ et $3x - 2$. Pour effectuer un produit de cette forme, on multiplie par $2x^2$ chacun des termes de l'expression à l'intérieur des parenthèses. Cette opération consiste à appliquer la **distributivité** de la multiplication. On obtient alors :

$$2x^2(3x - 2) = (2x^2 \times 3x) - (2x^2 \times 2) = 6x^3 - 4x^2.$$

Selon la règle des signes, quand on multiplie une parenthèse par une expression négative, tous les signes des termes à l'intérieur des parenthèses sont inversés :

$$-2(3x^2 - 2x + 1) = -6x^2 + 4x - 2.$$

Il est à remarquer qu'en multipliant la parenthèse seulement par le coefficient 2, on a :

$$-2(3x^2 - 2x + 1) = -(6x^2 - 4x + 2).$$

Si on enlève les parenthèses dans le membre de droite, il faut alors inverser le signe de chacun des termes à l'intérieur des parenthèses pour conserver l'égalité.

EXEMPLE 1.1.5

Effectuer le produit $3a^2b(a + b^2c - 2)$.

Solution

Pour effectuer le produit, il faut appliquer la distributivité, c'est-à-dire multiplier chacun des termes à l'intérieur des parenthèses par le facteur situé à l'extérieur

$$3a^2b(a + b^2c - 2) = 3a^3b + 3a^2b^3c - 6a^2b.$$

Élimination des parenthèses

PROCÉDURE

Élimination de parenthèses

Pour éliminer les parenthèses, on commence par la paire intérieure et on élimine progressivement les autres en respectant la règle des signes.

REMARQUE
Si une expression renferme plusieurs parenthèses, on utilise également des crochets [ ] pour rendre l'expression moins confuse et en faciliter la lecture. Les règles d'utilisation sont les mêmes.

Ainsi, pour éliminer les parenthèses de l'expression

$$5x - [2y + 4(x - y)],$$

on procède de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 5x - [2y + 4(x - y)] &= 5x - [2y + 4x - 4y] \\ &= 5x - [4x - 2y] \\ &= 5x - 4x + 2y \\ &= x + 2y. \end{aligned}$$

Ajout de parenthèses

Lorsqu'on ajoute des parenthèses, c'est en général pour effectuer une **mise en évidence**, ce qui est l'inverse de la distributivité.

PROCÉDURE

Ajout de parenthèses

1. Lorsqu'on met en évidence un facteur positif, tous les termes à l'intérieur des parenthèses conservent le même signe qu'avant la mise en évidence.
2. Lorsqu'on met en évidence un facteur négatif, tous les termes à l'intérieur des parenthèses changent de signe.

EXEMPLE 1.1.6

Mettre en évidence le plus grand commun diviseur des termes de l'expression algébrique suivante

$$16x^3y^2 + 12x^3y^4 - 8x^2y^2.$$

■ ***Solution***

On détermine d'abord le plus grand commun diviseur des termes du polynôme, soit $4x^2y^2$. Donc,

$$16x^3y^2 + 12x^3y^4 - 8x^2y^2 = 4x^2y^2(4x + 3xy^2 - 2).$$

Simplification d'expressions algébriques

Simplifier une fraction signifie la réduire à sa plus simple expression. Pour ce faire, on peut avoir à effectuer des opérations ou des mises en évidence et à appliquer les règles d'utilisation des exposants. Voici quelques exemples.

EXEMPLE 1.1.7

Simplifier les fractions algébriques suivantes :

a) $\dfrac{3ab^2+6ab}{6ab^3}$ b) $\dfrac{4x^2y+6xy^3}{6xy^2+9y^4}$

■ ***Solution***

a) Le plus grand commun diviseur des termes du numérateur est $3ab$. En mettant ce facteur en évidence, on obtient :

$$\frac{3ab^2+6ab}{6ab^3}=\frac{3ab(b+2)}{6ab^3}.$$

En simplifiant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$\frac{3ab^2+6ab}{6ab^3}=\frac{3ab(b+2)}{6ab^3}=\frac{b+2}{2b^2}.$$

b) Le plus grand commun diviseur des termes du numérateur est $2xy$ et le plus grand commun diviseur des termes du dénominateur est $3y^2$. En mettant ces facteurs en évidence, on obtient :

$$\frac{4x^2y+6xy^3}{6xy^2+9y^4}=\frac{2xy(2x+3y^2)}{3y^2(2x+3y^2)}.$$

En simplifiant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$\frac{4x^2y+6xy^3}{6xy^2+9y^4}=\frac{2xy(2x+3y^2)}{3y^2(2x+3y^2)}=\frac{2x}{3y}.$$

REMARQUE

Pour pouvoir simplifier une expression comportant une lettre apparaissant à la fois au numérateur et au dénominateur, il faut que la valeur numérique de cette lettre soit différente de 0 puisque le quotient 0/0 est indéterminé.

Opérations sur les fractions algébriques

Si on veut additionner ou soustraire des fractions, il faut d'abord procéder à une mise au même dénominateur. Ce dénominateur commun est le plus petit commun multiple des dénominateurs.

EXEMPLE 1.1.8

Effectuer les opérations suivantes :

a) $\dfrac{2}{15}+\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{10}$ b) $\dfrac{3}{4ab}+\dfrac{5c}{2ab^2}-\dfrac{7c}{6a^2b}$

Solution

a) En décomposant les dénominateurs en facteurs premiers, on a :

$$15 = 3 \times 5,$$
$$12 = 2^2 \times 3,$$
$$10 = 2 \times 5.$$

Le plus petit commun multiple est donc $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.

Puisque 60 divisé par 15 donne 4, il faut multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 4 pour que son dénominateur soit 60. De même, on multiplie le numérateur et le dénominateur de la deuxième fraction par 5, et ceux de la troisième fraction par 6,

$$\begin{aligned}\frac{2}{15}+\frac{5}{12}+\frac{1}{10}&=\frac{2\times 4}{15\times 4}+\frac{5\times 5}{12\times 5}+\frac{1\times 6}{10\times 6}\\&=\frac{8}{60}+\frac{25}{60}+\frac{6}{60}=\frac{39}{60}=\frac{13}{20}.\end{aligned}$$

b) Le plus petit commun multiple est $4 \times 3 \times a^2 \times b^2 = 12a^2b^2$.

Pour que la première fraction ait ce dénominateur, il faut multiplier son numérateur et son dénominateur par $3ab$; on multiplie le numérateur et le dénominateur de la deuxième fraction par $6a$, et ceux de la troisième fraction par $2b$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{3}{4ab}+\frac{5c}{2ab^2}-\frac{7c}{6a^2b}&=\frac{3\times 3ab}{4ab\times 3ab}+\frac{5c\times 6a}{2ab^2\times 6a}-\frac{7c\times 2b}{6a^2b\times 2b}\\&=\frac{9ab}{12a^2b^2}+\frac{30ac}{12a^2b^2}-\frac{14bc}{12a^2b^2}\\&=\frac{9ab+30ac-14bc}{12a^2b^2}.\end{aligned}$$

Polynômes

Polynômes_01

Polynôme

On appelle **polynôme** toute expression algébrique constituée de plusieurs termes formés chacun d'un produit de puissances entières, positives ou nulles, et reliés par des symboles d'addition ou de soustraction. Un **monôme** ne comporte qu'un seul terme; un **binôme** en a deux, et un **trinôme** trois.

$$\overbrace{\underbrace{3a^3x}+\underbrace{2b^2y}+\underbrace{3ab}}^{\text{Polynôme}}$$

Monômes

Un peu *d'histoire*

MATHÉMATIQUES DE L'ISLAM

Mahomet est né vers 570 à la Mecque, qui était alors, avec Médine, l'une des deux seules villes florissantes de l'Arabie. C'est à 40 ans qu'il commença sa prédication, jetant les bases de la religion islamique, dont les principaux dogmes sont la croyance en un Dieu unique, une vie future, la résurrection et le jugement dernier. Cependant en 622, il dut fuir la Mecque devant l'hostilité de riches marchands et se réfugier à Médine, où il fut accueilli avec enthousiasme. Cet accueil contribua au succès de la nouvelle religion et les Arabes, sous la bannière du prophète Mahomet, allaient conquérir des territoires s'étendant vers l'est jusqu'à l'Inde à travers la Perse et la Mésopotamie et, vers l'ouest jusqu'à l'Afrique du nord et l'Espagne.

En 629, il rentra triomphalement à la Mecque et décida d'en faire sa capitale. Les citoyens juifs et chrétiens, à cause de leur affinité religieuse avec la religion musulmane, y vécurent désormais sous sa protection. En 632, au moment où il se préparait à investir l'Empire byzantin, il mourut des suites d'une fièvre, à l'âge de 62 ans.

C'est après la première vague de conquêtes que les califes s'intéressèrent à la culture des pays conquis. De 650 à 750 les savants furent invités à Bagdad et la traduction des textes grecs et hindous par des Syriens débuta vers le VIIIe siècle. Les ouvrages ainsi traduits comprennent une version des *Siddhantas* provenant de l'Inde, l'ouvrage d'astronomie *Tétrabible* et l'*Almageste* de Ptolémée, ainsi que les *Éléments* d'Euclide. Les textes grecs étaient fournis directement par l'Empire byzantin à la suite de traités conclus entre les deux puissances.

À l'aide de ces traductions, les savants de l'Islam ont pu s'initier à l'astronomie et aux mathématiques grecques et hindoues. Ils ont adopté le système de numération indien et ont élaboré des approches nouvelles de résolution de problèmes. Les mathématiciens arabes ont également joué un rôle important en trigonométrie. D'une part, les Grecs utilisaient une trigonométrie des cordes comme celle de l'Almageste alors que les Indiens se servaient de tables de sinus. Les mathématiciens arabes ont adopté les tables de sinus et ont construit leur trigonométrie à l'aide de cette fonction. D'après certains historiens des mathématiques, près de 500 savants de l'Islam ont contribué à l'essor de l'astronomie et des mathématiques.

La création de l'algèbre telle que nous la connaissons, n'aurait pas été possible sans un système de numération ayant la souplesse nécessaire pour manipuler les symboles comme des nombres. Le système positionnel de base 10 que nous utilisons répond bien à cette exigence. Il a été élaboré par des mathématiciens indiens, en particulier Brahmagupta, puis adopté par les Arabes, qui en ont acquis la connaissance grâce aux traductions demandées par les califes de Bagdad.

Dans un ouvrage sur le système de numération indien, dont seule la version latine nous est parvenue sous le titre *De numero Indorum,* Al-Khwarizmi présente diverses règles de calcul dérivées des procédures utilisées par les savants indiens. Cet ouvrage aurait été rédigé à l'aide de la version arabe des textes de Brahmagupta (NH Brahmagupta).

Al-Khwarizmi

783-850

Dans un ouvrage intitulé *Hisâb al-jabr wa'l-muqabâla*, Al-Khawarizmi présente des règles de transformation des équations (NH Al-Khawarizmi01). Le terme *al-jabr*, à l'origine du mot algèbre, désigne la procédure consistant à transformer une soustraction dans un membre d'une équation en une addition dans l'autre membre. Ainsi, par al-jabr, l'équation $3x^2 - 10x = 34$ devient :

$$3x^2 = 10x + 34.$$

Le terme *al-muqabâla* (le balancement) désigne la transformation qui consiste à supprimer un même terme dans les deux membres d'une équation. Ainsi, par al-muqabâla, l'équation $2x^2 + 15x + 4 = 10x + 34$ devient :

$$2x^2 + 5x = 30.$$

Le terme *al-hatt* désigne la transformation consistant à diviser les deux membres d'une équation par un même nombre. Ainsi, l'équation $4x^2 = 2x + 26$ devient par al-hatt :

$$2x^2 = x + 13.$$

Dans le même ouvrage, Al-Kwharizmi présente pour la première fois une méthode de résolution presque générale des équations quadratiques (NH Al-Khawarizmi02). Presque générale, car les solutions négatives et nulles sont écartées. Il traite de différents cas d'équations quadratiques en les classifiant de telle sorte que tous les termes soient positifs. Les équations sont de plus ramenées à leur plus simple expression par *al-hatt*. Ces formes sont décrites verbalement. Ainsi, il désigne par « le carré égal à une racine » l'équation que nous écrivons $x^2 = bx$. En fait, il s'agit du produit d'une racine par une constante.

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

Les termes d'un polynôme peuvent comporter des coefficients, des constantes, des paramètres ou des variables. Les paramètres et les constantes sont représentés habituellement par les lettres a, b et c, et les variables par les lettres x, y et z.

Termes semblables de polynômes

On appelle **termes semblables de polynômes** des termes formés des mêmes lettres affectées des mêmes exposants mais qui pouvant avoir des signes et des coefficients distincts.

Polynômes distincts

$$\begin{cases} 3a^3 + \underbrace{2a^2}_{\text{Termes semblables}} - 5a \\ 2a^5 \overbrace{-4a^2}^{} + 12 \end{cases}$$

Pour additionner (ou soustraire) deux polynômes, on additionne (ou on soustrait) les termes semblables des deux polynômes.

EXEMPLE 1.1.9

Effectuer l'addition suivante.

$$(2xy + 3x^2 + 4y^3) + (5xy - 8x^2 + 7).$$

■ ***Solution***

En effectuant les opérations sur les termes semblables, on obtient :

$$(2xy + 3x^2 + 4y^3) + (5xy - 8x^2 + 7) = 7xy - 5x^2 + 4y^3 + 7.$$

Dans notre étude, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux polynômes comportant une seule variable, identifiée par la lettre x, et appelés polynômes en x.

Polynômes_02

Polynôme en x

On appelle **polynôme en** x toute expression de la forme :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

où n est un entier positif, appelé **degré du polynôme**, et où a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1 sont des constantes réelles, appelées **coefficients**, a_0 est la **constante** et x est la **variable**.

Polynôme en x

Degré du polynôme

$$8x^5 + 6x^4 - 28$$

Coefficients

Constante

Lorsqu'un polynôme en x comporte un seul terme non nul et que celui-ci est constant, on dit que ce polynôme est **constant**. Un tel polynôme est dit de degré 0, puisque, par convention :

$$p(x) = a_0 = a_0x^0.$$

Par ailleurs, $p(x) = 0$ est appelé **polynôme nul** et on ne lui attribue aucun degré.

REMARQUE

Il est d'usage de désigner les polynômes en x par une notation particulière. On utilise normalement les notations $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ ou $s(x)$ pour ne pas avoir à écrire le polynôme chaque fois qu'il en est question. La variable entre parenthèses indique qu'il s'agit d'un polynôme en x.

EXEMPLE 1.1.10

Soit les polynômes $p(x) = 2x^5 - 3x^2 - 4$ et $q(x) = 4x^3 + 8x^2 - 5x + 12$. Trouver le polynôme défini par la somme de $p(x)$ et $q(x)$.

Solution

Les termes semblables sont les termes de même degré. En effectuant les opérations sur ces termes, on obtient :

$$\begin{aligned} s(x) &= p(x) + q(x) \\ &= (2x^5 - 3x^2 - 4) + (4x^3 + 8x^2 - 5x + 12) \\ &= 2x^5 + 4x^3 + 5x^2 - 5x + 8. \end{aligned}$$

La valeur numérique d'un polynôme en x dépend seulement de la valeur assignée à sa variable x. Si on assigne à la variable x une valeur a, la valeur numérique du polynôme est notée $p(a)$.

Polynôme en x

$$p(x) = x^2 - 5x + 6$$

2 est un zéro du polynôme

$$p(2) = 2^2 - 5\times 2 + 6 = 0$$

Zéro d'un polynôme

On appelle **zéro** d'un polynôme $p(x)$ toute valeur a pour laquelle la valeur numérique du polynôme est nulle, c'est-à-dire $p(a) = 0$.

Un peu *d'histoire*

NOTATIONS ALGÉBRIQUES

Les notations algébriques ont lentement évolué avant de prendre leur forme actuelle. Chaque auteur utilisait un symbolisme personnel en améliorant parfois celui de ses prédécesseurs. Ainsi, dans *Triparty en la science des nombres,* Nicolas Chuquet (environ 1445-1500) représente $5x^3$ par 5^3, ce qui crée une confusion avec la puissance du nombre. De plus, il note les opérations d'addition et de soustraction respectivement par un p et un m surmontés d'une barre horizontale, et l'égalité par « égaulx ». Son algèbre est dite « syncopée », car elle fait plus appel à une écriture usuelle simplifiée qu'à un véritable symbolisme algébrique. L'ingénieur et mathématicien italien, Raffaele Bombelli (1526-1572) publia en 1572 un ouvrage intitulé *Algèbre*, qui fut probablement rédigé vers 1560. Dans cet ouvrage, il utilise un symbolisme qui ressemble à celui de Chuquet, comme on peut le voir dans les illustrations ci-contre. Il n'utilise pas de symbole particulier pour l'égalité, même si le symbole « = » avait déjà été utilisé par le mathématicien anglais Robert Recorde (environ 1510-1558). Ce symbole ne fut pas populaire dès son apparition, plusieurs auteurs préférant le symbole *ae*, formé des premières lettres du mot latin *aequalis* qui signifie « égal ».

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

Notation moderne

$$p(x) = x^4 + 5x^3 - 7$$

Notation de Chuquet

$$1^4\ \bar{\text{p}}\ 5^3\ \bar{\text{m}}\ 7$$

Notation de Bombelli

$$\underset{1}{\overset{4}{\smile}}\ \text{p}\ \underset{5}{\overset{3}{\smile}}\ \text{m}\ \ 7$$

NH Chuquet

NH Recorde

NH Viète

Multiplication de polynômes

Pour multiplier un polynôme par un monôme, on multiplie chaque terme du polynôme par le monôme en respectant la règle des signes et les règles d'utilisation des exposants.

Polynômes_03

EXEMPLE 1.1.11

Effectuer le produit des polynômes

$$p(x) = 3x^2 + 2x - 5 \text{ et } q(x) = x^2 + x - 3.$$

Solution

En multipliant chaque terme de $p(x)$ par chacun des termes de $q(x)$ et en respectant la règle des signes et les règles des exposants, on obtient :

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x-5 \quad\quad\quad \\ \times\ x^2+x-3 \quad\quad\quad \\ \hline 3x^4+2x^3-5x^2 \quad\quad\quad \\ 3x^3+2x^2-5x \quad\; \\ -9x^2-6x+15 \\ \hline 3x^4+5x^3-12x^2-11x+15 \end{array}$$

Le polynôme recherché est donc $s(x) = 3x^4 + 5x^3 - 12x^2 - 11x + 15$.

REMARQUE
Pour multiplier deux polynômes quelconques, on multiplie chaque terme d'un des polynômes par chacun des termes de l'autre polynôme en respectant la règle des signes et les règles d'utilisation des exposants.

Produits remarquables

Il est d'usage en algèbre de déterminer les caractéristiques des formes d'expressions algébriques en écrivant celles-ci à l'aide de paramètres plutôt qu'avec des valeurs numériques particulières. On obtient des règles d'utilisation qui permettent d'écrire directement l'expression algébrique sous une forme équivalente.

Factorisation_01

Carré d'une somme

Le carré du binôme $a + b$ se calcule comme suit :

$$\begin{array}{r} a+b \quad\quad \\ \times\ a+b \quad\quad \\ \hline a^2+ab \quad\quad \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

On obtient $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ce résultat permet d'écrire directement le carré d'un binôme. Par exemple, pour élever au carré le binôme $3x + 2y$, on pose $a = 3x$ et $b = 2y$. On peut alors écrire directement :

$$(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2.$$

ATTENTION
Les produits de binômes donnent lieu à des erreurs fréquentes :

$(a+b)^n \neq a^n + b^n$

Par exemple :

$(3+7)^2 = 10^2 = 100$

$3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$

$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

Par exemple :

$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

On peut utiliser le même résultat pour exprimer certains trinômes sous la forme du carré d'un binôme. Dans le cas du trinôme

Factorisation_02

$$25x^4 + 40x^2 + 16,$$

en posant $a = 5x^2$ et $b = 4$, on peut écrire :

$$25x^4 + 40x^2 + 16 = (5x^2 + 4)^2.$$

IDENTITÉS REMARQUABLES

Carré d'une somme

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Carré d'une différence

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Produit d'une somme et d'une différence

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Factorisation de trinômes

Factorisation_02

Les identités remarquables incitent à considérer d'autres formes de produits afin de déterminer des procédures permettant de factoriser facilement divers types de trinômes.

Forme : $x^2 + bx + c$

En effectuant le produit des facteurs $(x + s)$ et $(x + v)$, on obtient :

$$\begin{aligned}(x + s)(x + v) &= x^2 + sx + vx + sv\\ &= x^2 + (s + v)x + sv.\end{aligned}$$

Pour factoriser un trinôme, on doit effectuer le cheminement inverse, c'est-à-dire appliquer la procédure suivante.

PROCÉDURE

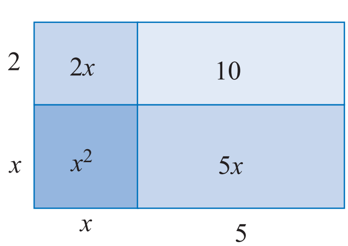
Factorisation d'un trinôme de la forme $x^2 + bx + c$

1. Chercher deux nombres dont la somme est b et le produit est la constante c.
2. Exprimer b comme la somme de ces deux nombres.
3. Effectuer une double mise en évidence.

EXEMPLE 1.1.12

Factoriser les trinômes :

a) $x^2 + 7x + 10$ b) $x^2 - x - 20$



■ ***Solution***

a) On cherche deux nombres dont le produit est 10 et dont la somme est 7, les nombres sont 2 et 5 répondent à cette condition. On peut écrire

$$\begin{aligned}x^2 + 7x + 10 &= x^2 + 2x + 5x + 10\\ &= x(x + 2) + 5(x + 2)\\ &= (x + 2)(x + 5).\end{aligned}$$

b) On cherche deux nombres dont le produit est –20 et dont la somme est –1, les nombres sont –5 et 4 satisfont à cette condition. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} x^2 - x - 20 &= x^2 - 5x + 4x - 20 \\ &= x(x-5) + 4(x-5) \\ &= (x-5)(x+4). \end{aligned}$$

Forme : $ax^2 + bx + c$

En effectuant le produit des deux facteurs $(rx + s)$ et $(ux + v)$, on obtient :

$$(rx + s)(ux + v) = rux^2 + (rv + su)x + sv.$$

Factorisation_03

On constate que les nombres dont la somme donne le coefficient de x, soit $rv + su$, ont comme produit :

$$(rv)(su) = (ru)(sv)$$

c'est-à-dire le produit de la constante par le coefficient de x^2. On obtient donc $b = rv + su$ et $ac = rvsu$. Pour factoriser, on doit faire le cheminement inverse, on doit donc appliquer la procédure suivante.

PROCÉDURE

Factorisation d'un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$

1. Chercher deux nombres dont la somme est b et le produit est ac.
2. Exprimer b comme la somme de ces deux nombres.
3. Effectuer une double mise en évidence.

EXEMPLE 1.1.13

Factoriser les trinômes :

a) $3x^2 + 23x + 14$ b) $15x^2 - 77x + 10$.

Solution

a) On cherche deux nombres dont le produit est 42 et dont la somme est 23. C'est le cas des nombres 2 et 21. On peut écrire :

$$\begin{aligned} 3x^2 + 23x + 14 &= 3x^2 + 21x + 2x + 14 \\ &= 3x(x+7) + 2(x+7) \\ &= (x+7)(3x+2). \end{aligned}$$

b) On cherche deux nombres dont le produit est 150 et dont la somme est –77. C'est le cas des nombres –2 et –75. On peut écrire :

$$\begin{aligned} 15x^2 - 77x + 10 &= 15x^2 - 2x - 75x + 10 \\ &= x(15x-2) - 5(15x-2) \\ &= (15x-2)(x-5). \end{aligned}$$

Division de polynômes

Polynômes_04

Pour diviser un polynôme par un autre de moindre degré, on ordonne en ordre décroissant le dividende et le diviseur, puis on divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur pour obtenir le premier terme du quotient. On multiplie alors tout le diviseur par ce premier terme du quotient et on soustrait du dividende le produit obtenu. On poursuit la même démarche jusqu'à ce que l'on obtienne 0 ou un reste qui n'est pas divisible par le premier terme du diviseur.

EXEMPLE 1.1.14

Diviser $p(x)$ par $s(x)$.

a) $p(x) = 6x^4 - 4x^3 + 24x - 8$ et $s(x) = 2x^3 - 5x + 8$

b) $p(x) = 2x^3 - 11x^2 + 19x - 12$ et $s(x) = x - 3$

Solution

a)
$$\begin{array}{r|l} 6x^4 - 4x^3 + 24x - 8 & 2x^3 - 5x + 8 \\ \cline{2-2} -(6x^4 - 15x^2 + 24x) & 3x - 2 \\ \cline{1-1} -4x^3 + 15x^2 - 8 & \\ -(-4x^3 + 10x - 16) & \\ \cline{1-1} 15x^2 - 10x + 8 & \end{array}$$

Donc, $q(x) = 3x - 2$ et $r(x) = 15x^2 - 10x + 8$.

b)
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 11x^2 + 19x - 12 & x - 3 \\ \cline{2-2} -(2x^3 - 6x^2) & 2x^2 - 5x + 4 \\ \cline{1-1} -5x^2 + 19x - 12 & \\ -(-5x^2 + 15x) & \\ \cline{1-1} 4x - 12 & \\ -(4x - 12) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc, $q(x) = 2x^2 - 5x + 4$ et $r(x) = 0$.

REMARQUE

Lorsque le reste d'une division est 0, cela signifie que le diviseur est un facteur du polynôme. Ainsi, on a :

$$2x^3 + 11x^2 + 19x - 12$$
$$= (x - 3)(2x^2 - 5x + 4).$$

Zéros et factorisation

Factorisation_04

Facteur d'un polynôme

Soit $p(x)$ et $q(x)$, deux polynômes en x, le polynôme $q(x)$ est un **facteur** de $p(x)$ si et seulement si $q(x)$ divise $p(x)$ sans reste (c'est-à-dire que le reste est 0).

En posant $x = 3$ dans le polynôme $p(x) = 2x^3 - 11x^2 + 19x - 12$, on obtient :

$$2 \times 3^3 - 11 \times 3^2 + 19 \times 3 - 12 = 54 - 99 + 57 - 12 = 0.$$

Ce résultat est dû au fait que $(x - 3)$ est un facteur de $2x^3 - 11x^2 + 19x - 12$. En effet,

$$2x^3 - 11x^2 + 19x - 12 = (x - 3)(2x^2 - 5x + 4).$$

Le facteur $(x - 3)$ s'annule en posant $x = 3$. On a alors une multiplication par 0 qui donne 0. De plus, lorsqu'on multiplie des polynômes entre eux, la constante du produit est le produit des constantes. Ainsi :

$$(x - 2)(x + 3)(2x + 5) = 2x^3 + 7x^2 - 7x - 30.$$

On peut dégager de ces observations une procédure pour trouver les zéros entiers d'un polynôme qui doivent être des diviseurs de la constante.

PROCÉDURE

Factorisation à l'aide des zéros

1. Chercher un zéro entier du polynôme en considérant d'abord les plus petits diviseurs de la constante.
2. Chaque fois qu'un zéro est trouvé, décomposer en facteurs par division de polynômes pour simplifier la recherche.

EXEMPLE 1.1.15

Factoriser le polynôme $2x^3 + 7x^2 - 7x - 30$.

Solution

Les diviseurs de –30 sont ±1, ±2, ±3, ...

On peut repérer les zéros par substitution :

$$p(1) = 2\times1^3 + 7\times1^2 - 7\times1^1 - 30 = -28,$$
$$p(-1) = 2\times(-1)^3 + 7\times(-1)^2 - 7\times(-1)^1 - 30 = -18,$$
$$p(2) = 2\times2^3 + 7\times2^2 - 7\times2^1 - 30 = 0.$$

Puisque $p(2) = 0$, alors 2 est un zéro de $p(x)$, et $p(x)$ est divisible par $x - 2$. En procédant à la division, on obtient :

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3 + 7x^2 - 7x - 30 & x - 2 \\ \cline{3-3}
 & -(2x^3 - 4x^2) & 2x^2 + 11x + 15 \\ \cline{2-2}
 & 11x^2 - 7x - 30 & \\
 & -(11x^2 - 22x) & \\ \cline{2-2}
 & 15x - 30 & \\
 & -(15x - 30) & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

On peut donc écrire :

$$2x^3 + 7x^2 - 7x - 30 = (x - 2)(2x^2 + 11x + 15).$$

Il ne reste qu'à factoriser le trinôme. On cherche deux nombres dont le produit est 30 et dont la somme est 11. C'est le cas de 5 et 6. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 11x + 15 &= 2x^2 + 5x + 6x + 15 \\ &= x(2x + 5) + 3(2x + 5) \\ &= (2x + 5)(x + 3). \end{aligned}$$

La factorisation complète donne :

$$2x^3 + 7x^2 - 7x - 30 = (x - 2)(2x + 5)(x + 3).$$

REMARQUE

Dès que l'on trouve un zéro, on effectue la division par ce facteur pour simplifier le problème.

Exercices 1.2

1. Éliminer les parenthèses des expressions suivantes et effectuer les calculs ou opérations possibles :
   a) $2 - [4 + (2 - 3) - (5 + 6)]$
   b) $7 + [3 - (6 - 1) - (5 + 6)]$
   c) $x - [y + (x + y)]$
   d) $x - [y - (x + y)]$
   e) $2x - [3y + (x - 5y)]$
   f) $2xy - [3xy + (7 - 5xy)]$
   g) $-2(a + c) + 3[(b - c) + 3(c - a)]$
   h) $3(a - 2c) - 2[(b - c) + 2(c - a) - a]$
   i) $(4xy + 3x - 2) - (2xy - x + 2y - 3)$
   j) $-2x^2y(4xy + 2x^2y - x + 2)$

2. Dans les expressions suivantes, regrouper et mettre en évidence les termes en x de même puissance.
   a) $ax^2 + 7x^3 - 2a^2x^2 + 3bx - 6a^2x^3 + 5x$
   b) $6bx^2 - 2x^3 - a^2x^2 - 2ax + 6ax^3 + 7bx$

3. Simplifier les expressions suivantes sachant que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
   a) $\dfrac{3a^2b}{27ab^2}$
   b) $\dfrac{24a^4b^5}{18a^2b^2}$
   c) $\dfrac{36a^2b}{27a^5b^3}$
   d) $\dfrac{81a^2bc^3}{36ab^3}$

4. Mettre les fractions au même dénominateur et effectuer les opérations indiquées :
   a) $\dfrac{3}{8}+\dfrac{7}{12}-\dfrac{5}{9}$
   b) $\dfrac{5}{2}+\dfrac{7}{3}-\dfrac{4}{8}$
   c) $\dfrac{11}{1}+\dfrac{7}{24}+\dfrac{9}{15}$
   d) $\dfrac{3}{a}-\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}$
   e) $\dfrac{c}{a^2b}-\dfrac{2a}{b^2c}+\dfrac{b}{ac}$
   f) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{3x}{2}+\dfrac{5x}{7}$
   g) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}$
   h) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}$
   i) $\dfrac{3}{x^2}-2-\dfrac{5}{x}$
   j) $\dfrac{8}{x^2y^2}-\dfrac{1}{2}$

5. Simplifier et évaluer les expressions suivantes à l'aide des règles d'utilisation des exposants. Exprimer les réponses à l'aide d'exposants positifs.
   a) $3^4 \times 3^{-2}$
   b) $4^2 \times 2^{-3}$
   c) $5^4 \times 5^{-4}$
   d) $(x^3y^2) \times (x^{-2}y^{-1})$
   e) $\dfrac{2^2}{5^{-1}}$
   f) $\dfrac{6^2}{2^3}$
   g) $(3^{-2})^{-3}$
   h) $\left(\dfrac{1}{x^{-1}}\right)^{-3}$
   i) $\left(\dfrac{2^{-3}}{3^{-2}}\right)^{-2}$
   j) $\left(\dfrac{a^{-3}}{a^2b^{-1}}\right)^{-1}$
   k) $\left(\dfrac{x^{-3}}{y^{-2}}\right)\left(\dfrac{x^2y^{-1}}{x^2+y}\right)$
   l) $\left(\dfrac{4^{-3}}{3^{-2}}\right)\left(\dfrac{x^2y^{-1}}{x^{-2}}\right)$
   m) $(4x^2y^{-1})^{-1}(2x^3y^{-2})$
   n) $3^{-2}x^2(x^2y)^{-2}$
   o) $a^{-2}x^2\,(b^2x)^{-2}$
   p) $a^{-n}x^{2n}(a^2x)^{-2}$

6. Calculer la valeur numérique des expressions suivantes pour les valeurs indiquées (sous forme de fraction simplifiée).
   a) $\dfrac{a^{-3}}{b^{-2}}$ pour $a = 2$ et $b = 4$
   b) $\dfrac{a^2b^{-1}}{c}$ pour $a = 3$, $b = 2$ et $c = 5$
   c) $(xy^{-2})^{-3}$ pour $x = 1/2$ et $y = 3/2$
   d) $(2x^2y^{-1})^{-1}$, pour $x = 5/3$ et $y = 2/9$

7. Utiliser les exposants pour simplifier les expression suivantes.
   a) $\sqrt{4}$
   b) $\sqrt{-16}$
   c) $\sqrt[3]{27}$
   d) $\sqrt[3]{-64}$
   e) $\sqrt[4]{16}$
   f) $\sqrt[3]{-729}$
   g) $\sqrt{a^2b^{-4}}$
   h) $\sqrt[3]{125a^{-3}}$
   i) $\sqrt[3]{a^3b^{-6}}$
   j) $\sqrt[4]{a^4b^{-2}} \times \sqrt{a^2b}$

8. Simplifier et évaluer les expressions suivantes en utilisant les exposants fractionnaires.

a) $\sqrt[6]{x^3y^2}$

b) $\left(16^{-1}\right)^{1/4}$

c) $(243)^{-2/5}$

d) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-1/3}$

e) $\left(\dfrac{27}{125}\right)^{-2/3}$

f) $\left(\dfrac{243}{32}\right)^{-2/5}$

g) $\left(\dfrac{9^3}{x^2}\right)^{-1/2}$

h) $\left(\dfrac{81x^2}{16}\right)^{-3/4}$

i) $\left(\dfrac{216x^3}{8y^6}\right)^{-2/3}$

j) $\left(\dfrac{a^{-3}b^6}{125}\right)^{1/3}$

k) $\left(\dfrac{a^2b^{-4}}{36}\right)^{1/2}$

l) $\left(\dfrac{12a^2}{25b}\right)^{1/2}$

9. Écrire les radicaux suivants sous leur forme la plus simple.

a) $\sqrt{72}$

b) $\sqrt{98}$

c) $\sqrt{196}$

d) $\sqrt{500}$

e) $\sqrt[3]{81a^3}$

f) $\sqrt[3]{27a^2b}$

g) $\sqrt[3]{-32a^4}$

h) $\sqrt[3]{54a^2b^{-1}}$

10. Effectuer les opérations demandées à l'aide des règles d'utilisation des exposants (sans calculatrice).

a) $\sqrt{12}+\sqrt{108}-\sqrt{75}$

b) $\sqrt{80}+\sqrt{5}-\sqrt{180}$

c) $3\sqrt{5}\times 4\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{2x}\times 2\sqrt{3x}$

e) $x\sqrt{5}\times x^2\sqrt{2}$

f) $2\sqrt{5}\left(3\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right)$

g) $\sqrt[3]{5a}\times\sqrt{2b}$

h) $a\sqrt{3}\times a\sqrt[3]{2}$

i) $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

j) $\dfrac{x\sqrt{3x}}{\sqrt{5x}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

11. Effectuer les opérations indiquées.

a) $(3x^2y + 2xz + 2y^3) + (5x^2y - 4xz + 3y^3 - 4)$

b) $(7x^2 + 2xz + 2y^3) - (4x^2 - 2xz + 4y^3 + 2)$

c) $(2x^2y + 3xy + 4y^2) + (5x^2y - 6xy - 7y^2)$

d) $(5x^2y + 3xy + 4y^2) - (3x^2y + 2xy - 6y^2)$

12. Déterminer le polynôme défini par la somme de $p(x)$ et $q(x)$ si :

$$p(x) = 2x^3 + 5x - 5$$
$$q(x) = 5x^3 - 3x^2 - 6x + 18$$

13. Déterminer le polynôme défini par la différence de $p(x)$ et $q(x)$ si :

$$p(x) = 4x^4 + 2x^3 - 5$$
$$q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$$

14. Effectuer les produits suivants.

a) $(x + 4)(x - 6)$

b) $(2x - 5)(x + 7)$

c) $(x + 6)(3x - 2)$

d) $(2x - 1)(3x - 4)$

e) $(x + 2)(3x - 1)(x - 3)$

f) $(2x + 1)(2x - 3)(3x + 2)(x + 5)$

g) $(3x^2 - 2y)\,(3x^2 + 2y)$

h) $(2x^2 + 3y)\,(2x^2 + 3y)$

i) $(2xy - 3x + 5y)(2xy - 3x - 5y)$

15. Déterminer le polynôme défini par le produit de $p(x)$ et $q(x)$ si :

$$p(x) = 2x^2 - 8 \text{ et } q(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

16. Calculer les valeurs numériques demandées.

a) $p(-1)$ et $p(2)$ si $p(x) = 2x^2 + 3x - 5$

b) $p(-1)$, $p(1)$ et $p(2)$ si $p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 3x + 1$

c) $p(0)$, $p(1)$ et $p(4)$ si $p(x) = -2x^2 - 3x + 1$

17. Montrer que les valeurs données sont des zéros du polynôme $p(x)$.

a) 2, –5/2 et –3; $p(x) = 2x^3 + 7x^2 - 7x - 30$

b) –1, 1 et 5/2; $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 5$

18. Montrer que b est un zéro de $x^2 - b^2$ et que $x - b$ est un facteur de ce binôme.

19. Une expression de la forme $a^2 - b^2$ est appelée **différence de carrés**. Montrer qu'une différence de carrés est toujours décomposable en un produit de deux facteurs.

20. Décomposer les polynômes suivants en un produit de facteurs.

a) $24x - 48x^2y$
b) $a^3 - ab^2$
c) $4a^3 - a$
d) $x^3 - 5x^2y$
e) $12 - 48x^2y^2$
f) $4x^3 - 8x^2y + 16xy$
g) $25x^3y - 5x^2y^2 + 10x^4y^3$
h) $16a^3b^2 - 4a^2b^3 + 12ab^3$
i) $x^3y - x^2y + 4xy - 4y$
j) $16a^3b^2 - 4a^2b^3 + 12a - 3b$
k) $6y - 4xy - 15x + 10x^2$
l) $18a^2 - 30b + 6a^2b - 10b^2$
m) $x^3 - x^2 - x + 1$
n) $2x^3 - 4x^2 + 4x - 8$
o) $3x^3 + 12x^2 - 5x - 20$
p) $10xy^2 - 6x^3 + 5y^3 - 3x^2y$
q) $10ax^2 + 16ax + 15x + 24$
r) $2x^2y^3 + 8y^3 - 5x^2 - 20$

21. Décomposer en facteurs les trinômes suivants, de la forme $x^2 + bx + c$.

a) $x^2 + x - 56$
b) $x^2 - 13x + 42$
c) $x^2 - 4x - 96$
d) $x^2 - 8x + 16$
e) $x^2 - 3x - 28$
f) $x^2 - 4x - 77$
g) $x^2 + 11x + 30$
h) $x^2 - 2x - 35$
i) $x^2 + 21x + 90$
j) $x^2 + 14x + 49$
k) $x^2 - 14x + 48$
l) $x^2 + 6x - 72$

22. Décomposer en facteurs les trinômes suivants de la forme $ax^2 + bx + c$.

a) $2x^2 + 9x - 35$
b) $3x^2 + 23x - 36$
c) $6x^2 - x - 77$
c) $5x^2 + 37x - 24$
e) $6x^2 + 19x - 20$
f) $12x^2 + 26x + 12$
g) $2x^2 - x - 21$
h) $4x^2 - 24x + 35$
i) $6x^2 - 31x - 77$
j) $10x^2 + 46x - 84$
k) $6x^2 - 15x - 54$
l) $6x^2 + 37x + 56$

23. Montrer que b est un zéro de $x^3 - b^3$ et que $x - b$ est un facteur de ce binôme.

24. Montrer que $-b$ est un zéro de $x^3 + b^3$ et que $x + b$ est un facteur de ce binôme.

25. Montrer qu'une expression de la forme $a^3 - b^3$ est toujours divisible par le binôme $a - b$.

26. Montrer qu'une expression de la forme $a^3 + b^3$ est toujours divisible par le binôme $a + b$.

27. En utilisant les résultats des numéros 19 et 23 à 26, décomposer les polynômes suivants en un produit de facteurs.

a) $x^2 - 16$
b) $4x^2 - 49$
c) $8x^3 + 27y^3$
d) $27x^3 - 8y^3$
e) $a^2 - 64$
f) $9a^2 - 16b^2$
g) $8x^3y^6 + 216x^3y^3$
h) $1 - x^3$
i) $a^4 - b^4$
j) $16a^4 - 81y^4$
k) $a^2b^2 + 1$
l) $a^4b^4 - 1$

28. Effectuer les divisions suivantes et indiquer si le diviseur est un facteur du polynôme divisé.

a) $(2x^3 - 3x^2 + 10x - 18) \div (2x - 3)$
b) $(4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 7) \div (2x^2 + 3x - 2)$
c) $(x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 21) \div (x^2 + 3)$
d) $(x^4 + 4x^2 - 12) \div (x^2 - 3)$
e) $(2x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 16x + 8) \div (2x - 4)$
f) $(x^3 + 2x^2 - 11x + 20) \div (x + 5)$
g) $(6x^3 - 19x^2 + 22x - 8) \div (3x - 2)$
h) $(x^3 + 27) \div (x + 3)$

29. Déterminer les zéros entiers des polynômes en x suivants et utiliser la division pour factoriser ces polynômes.

a) $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$
b) $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$
c) $p(x) = 3x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 8x + 4$

1.3 Équations et inéquations

Une équation est une expression algébrique comportant le signe d'égalité et une inéquation est une expression algébrique comportant un signe d'inégalité. On doit souvent, dans une équation ou une inéquation, isoler une variable. C'est le cas lorsqu'on veut résoudre une équation ou une inéquation ne comportant qu'une seule variable. Dans une équation à deux variables, le fait d'isoler une des variables met en évidence le lien entre les variables. Ce lien peut être une relation ou une fonction.

Équations du premier degré

Équations_01

Équation

Une **équation** est une expression algébrique comportant une ou des variables et le symbole d'égalité.

Ainsi l'expression $2x + 3 = 7$ est une équation.

Solution et ensemble solution

On appelle **solution d'une équation** toute valeur de la variable satisfaisant l'équation.

On appelle **ensemble solution** d'une équation l'ensemble formé de toutes les solutions de l'équation.

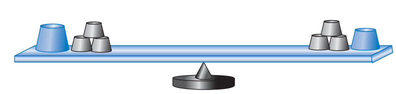
On dit que deux équations sont **équivalentes** lorsqu'elles ont le même ensemble solution.

Résoudre une équation signifie trouver les solutions de cette équation, ou encore trouver l'**ensemble solution** de cette équation. Pour résoudre une équation du premier degré à une variable, on construit une équation équivalente où la variable est isolée. On peut construire une équation équivalente à une équation donnée en effectuant les transformations suivantes :

1. Additionner une même valeur aux deux membres de l'équation.
2. Soustraire une même valeur aux deux membres de l'équation.
3. Multiplier les deux membres de l'équation par une même valeur non-nulle.
4. Diviser les deux membres de l'équation par une même valeur non-nulle.

REMARQUE

On compare souvent les transformations possibles pour résoudre des équations aux modifications que l'on peut apporter aux masses sur une balance pour conserver l'équilibre.



On peut ajouter ou enlever une même masse de chaque côté, multiplier ou diviser la masse de chaque côté par une même valeur.

EXEMPLE 1.3.1

Trouvez l'ensemble solution de l'équation

$$\frac{x+3}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{3x-5}{12} + \frac{1}{4}.$$

Solution

Le plus petit commun multiple des dénominateurs est 12. On prend donc ce nombre comme dénominateur commun. En mettant toutes les fractions au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{6(x+3)}{12}-\frac{4(x-2)}{12}=\frac{3x-5}{12}+\frac{3}{12}.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par 12, on a :

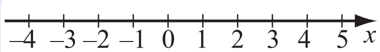
$$6(x + 3) - 4(x - 2) = 3x - 5 + 3.$$

En appliquant la distributivité, on obtient :

$$6x + 18 - 4x + 8 = 3x - 2; \text{ d'où } x = 28.$$

Droite réelle

Dans le cas d'une inéquation, il est commode de représenter l'ensemble solution sur la droite réelle.



Droite réelle

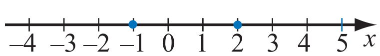
Droite réelle

La **droite réelle** est une droite comportant une origine, représentée par 0 et dont chaque point est associé au nombre qui représente la distance de ce point à l'origine. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Ordre dans les réels

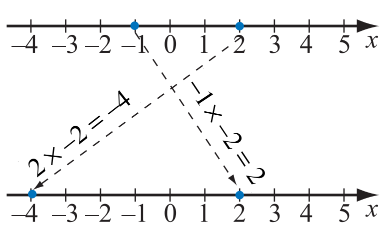
On dit qu'un nombre réel a est plus petit qu'un nombre réel b s'il existe un nombre $c > 0$ tel que $a + c = b$. Symboliquement, a est plus petit que b s'écrit $a < b$.

La droite réelle permet d'illustrer une propriété fondamentale de l'inégalité. Dans la figure ci-contre, les nombres de l'inégalité $-1 < 2$ sont représentés sur une droite réelle.



Représentation de –1 et 2 sur la droite réelle

En multipliant les deux nombres de cette inégalité par –2, on obtient les nombres 2 et –4. Si on compare les positions de ces nombres sur la droite réelle, on constate que l'ordre a été inversé. On a en effet $2 > -4$ ou encore $-4 < 2$. On peut généraliser cette observation par l'énoncé suivant :



Multiplication par un nombre négatif

Lorsqu'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif, le sens de l'inégalité est inversé.

Pour tout a et $b \in \mathbb{R}$ et $c < 0$, si $a < b$ alors $ac > bc$.

Démonstration

$a < b \Rightarrow$ il existe $d > 0$ tel que $a + d = b$

$\Rightarrow (a + d)c = bc$ En multipliant chaque membre par $c < 0$.

$\Rightarrow ac + dc = bc$

$\Rightarrow ac = bc - dc,$

$\Rightarrow ac > bc$, puisque $-dc > 0$.

Intervalles sur la droite réelle

Soit l'ensemble défini par $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$. L'ensemble solution de l'inéquation $x \leq 3$ est formé de tous les nombres réels plus petits ou égaux à 3. On peut également représenter cet ensemble par $]-\infty; 3]$, qui se lit « l'intervalle de moins l'infini à 3 ». Cet intervalle est représenté ci-contre sur la droite réelle.

Représentation de $]-\infty; 3]$

Le point à l'extrémité du segment de la demi-droite signifie que le nombre correspondant fait partie de l'ensemble. Cela se produit lorsqu'on a une inéquation comportant le signe $\leq$ ou $\geq$. On dit alors que l'intervalle est « **fermé** à 3 ». Dans la notation de l'intervalle, cela se traduit par un crochet tourné vers l'intérieur de l'intervalle. Lorsque le point à l'extrémité de la demi-droite ne fait pas partie de l'ensemble solution, on emploie un petit cercle au lieu d'un point. Cela se produit lorsqu'on a une inéquation comportant le signe $<$ ou $>$. On dit alors que l'intervalle est **ouvert**. Dans la notation de l'intervalle, cela se traduit par un crochet tourné vers l'extérieur de l'intervalle. Lorsque l'intervalle s'étend à l'infini ou à moins l'infini, le crochet est toujours vers l'extérieur. Ainsi, on note $]2; \infty[$ l'intervalle ouvert de 2 à l'infini qui, en écriture ensembliste, est $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$. L'intervalle est ouvert à 2, ce qui signifie que la variable ne peut pas prendre la valeur 2; elle peut cependant être égale à toute valeur légèrement supérieure à 2.

Inéquation

On appelle **inéquation** une expression algébrique comportant une ou des variables et un symbole d'inégalité ($<$, $>$, $\geq$, $\leq$).

On appelle **solution d'une inéquation** toute valeur de la variable pour laquelle l'inéquation est vérifiée.

PROCÉDURE

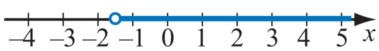
Résoudre une inéquation

On utilise les propriétés des inégalités pour construire une inéquation équivalente où la variable est isolée. Les transformations employées sont :

1. Additionner une même valeur aux deux membres de l'inéquation.
2. Soustraire une même valeur aux deux membres de l'inéquation.
3. Multiplier les deux membres de l'inéquation par une même valeur non nulle. Si la valeur est négative, le sens de l'inégalité est inversé.
4. Diviser les deux membres de l'inéquation par une même valeur non nulle. Si la valeur est négative, le sens de l'inégalité est inversé.

Équations_04

Représentation de]–∞; 2]



Représentation de]–3/2; ∞[

EXEMPLE 1.3.2

Résoudre les inéquations suivantes. Donner l'ensemble solution en notation ensembliste et en notation par intervalle, et le représenter graphiquement.

a) $3x - 2 \leq 4$ b) $5 - 2x < 8$

Solution

a) En additionnant 2 à chaque membre de l'inéquation, on obtient

$$3x \leq 6.$$

En divisant par 3 chaque membre de l'inéquation, on obtient :

$$x \leq 2.$$

L'ensemble solution est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ en notation ensembliste et $]-\infty; 2]$ en notation par intervalle. Il est représenté graphiquement ci-contre.

b) En soustrayant 5 à chaque membre de l'inéquation, on obtient

$$-2x < 3.$$

En divisant par –2 chaque membre de l'inéquation, on a :

$$x > -3/2.$$

L'ensemble solution est $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3/2\}$ en notation ensembliste et $]-3/2; \infty[$ en notation par intervalle. Il est représenté graphiquement ci-contre.

Équations du second degré

Équations_02

Les premières démarches pour résoudre les équatiosn quadratique sont dues au mathématicien Al-Khawarizmi.

NH Al-Khawarizm01

NH Al-Khawarizm02

Équation quadratique

Une **équation quadratique** est une équation du second degré à une inconnue. Elle peut s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ où } a \neq 0.$$

Lorsque les coefficients b et c sont différents de zéro, on dit que l'équation est **complète** et, lorsque l'un de ces deux coefficients est nul, on dit que l'équation est **incomplète**.

Pour résoudre une équation quadratique, on a recours à la factorisation lorsque celle-ci est possible. Pour que le produit des facteurs soit nul, il faut que l'un ou l'autre des facteurs soit nul. On pose donc chaque facteur égal à 0 et il suffit ensuite de résoudre chacune des équations du premier degré ainsi obtenue.

EXEMPLE 1.3.3

Résoudre les équations suivantes par factorisation.

a) $4x^2 - 144 = 0$ b) $4x^2 - 36x = 0$ c) $x^2 - 4x - 21 = 0$

Solution

a) En divisant par 4 chaque membre de l'équation, on obtient

$$x^2 - 36 = 0.$$

En décomposant cette différence de carrés en facteurs, on a

$$(x + 6)(x - 6) = 0.$$

Dans l'ensemble des nombres réels, le produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un ou l'autre des deux facteurs est nul (**intégrité des nombres réels**). Il y a donc deux possibilités :

$x + 6 = 0$; donc $x = -6$ ou $x - 6 = 0$; donc $x = 6$.

Ainsi, l'ensemble solution est $\{-6; 6\}$.

b) En factorisant le binôme, on obtient

$$4x(x - 9) = 0.$$

En vertu de l'intégrité des nombres réels, on peut écrire :

$4x = 0$; donc $x = 0$ ou encore $x - 9 = 0$; donc $x = 9$.

Ainsi, l'ensemble solution est $\{0; 9\}$.

c) En décomposant en facteurs, obtient

$$(x + 3)(x - 7) = 0.$$

En vertu de l'intégrité des nombres réels, on peut écrire :

$x + 3 = 0$; donc $x = 3$ ou encore $x - 7 = 0$; donc $x = 7$.

Ainsi, l'ensemble solution est $\{-3; 7\}$.

REMARQUE

On peut également résoudre l'équation $x^2 - 36 = 0$ en isolant x^2 pour obtenir

$$x^2 = 36.$$

Les valeurs de x dont le carré donne 36 sont -6 et 6, ce qu'on écrit :

$$x = \pm 6.$$

Complétion du carré

La complétion du carré est une méthode qui vise à transformer une équation quadratique de façon à obtenir un carré parfait, c'est-à-dire un trinôme qui est le carré d'un binôme. Le carré du binôme $x + b$ est

$$(x + b)(x + b) = x^2 + 2bx + b^2.$$

On remarque une relation intéressante entre le coefficient de x et la constante. En effet, en divisant le coefficient de x par 2 et en élevant le résultat au carré, on obtient la constante du trinôme. Cette relation est utile pour résoudre une équation quadratique.

EXEMPLE 1.3.4

Résoudre l'équation suivante par complétion du carré :

$$3x^2 + 20x - 32 = 0.$$

Solution

Pour appliquer la procédure de complétion du carré, il faut que le coefficient de x^2 soit 1. On divise donc chaque membre de l'équation par 3, ce qui donne

$$x^2 + \frac{20}{3}x - \frac{32}{3} = 0.$$

En additionnant et en soustrayant le carré de la demie du coefficient de x, on obtient :

$$x^2 + \frac{20}{3}x + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \frac{32}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = 0.$$

Les trois premiers termes forment alors un carré parfait qu'on peut factoriser :

$$\left(x+\frac{10}{3}\right)^2-\frac{32}{3}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=0.$$

En mettant au même dénominateur, on obtient :

$$\left(x+\frac{10}{3}\right)^2-\frac{96}{9}-\frac{100}{9}=0;\ \text{donc}\ \left(x+\frac{10}{3}\right)^2-\frac{196}{9}=0.$$

En décomposant en facteurs cette différence de carrés, on a :

$$\left(x+\frac{10}{3}-\frac{14}{3}\right)\left(x+\frac{10}{3}+\frac{14}{3}\right)=0;\ \text{donc}\ \left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{24}{3}\right)=0.$$

En vertu de l'intégrité des nombres réels, le produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un ou l'autre des deux facteurs est nul. En posant chacun des facteurs égal à 0 et en résolvant les deux équations du premier degré, on obtient que les solutions $x = -8$ et $x = 4/3$. L'ensemble solution est donc $\{-8; 4/3\}$.

Solution générale d'une équation quadratique

Équations_03

On peut appliquer la procédure de complétion du carré pour obtenir la solution générale d'une équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$.

THÉORÈME

Solution générale d'une équation quadratique

Les **solutions** de l'équation quadratique de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Démonstration

Pour démontrer ce résultat, il suffit de résoudre l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ par complétion du carré. Pour rendre unitaire le coefficient de x^2, on divise chaque membre de l'équation par a

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

En complétant le carré, on obtient

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}.$$

Les trois termes du membre de gauche forment un carré parfait, que l'on peut factoriser directement. En mettant de plus les termes du membre de droite au même dénominateur, on obtient

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

En extrayant la racine de chaque membre de l'équation, on a

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

En isolant x dans cette expression, on obtient la forme générale des solutions d'une équation quadratique, soit

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

REMARQUE
Cette méthode permet de résoudre toutes les équations quadratiques, même celles dont les racines sont des nombres irrationnels ou des nombres complexes.

EXEMPLE 1.3.5

Résoudre l'équation quadratique

$$x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Solution

On ne peut trouver deux nombres entiers dont le produit est –1 et la somme est –4. Pour résoudre l'équation, il faut donc appliquer la méthode générale de résolution.

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{5})}{2} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

L'ensemble solution est donc $\{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$. En exprimant ces valeurs en décimales, on peut les situer sur la droite réelle, on trouve :

$$2 - \sqrt{5} = -\,0{,}236\ldots \text{ et } 2 + \sqrt{5} = 4{,}236\ldots$$

CARACTÉRISTIQUES

Existence de solutions

Lors de l'application de la méthode générale de résolution d'une équation quadratique, on distingue trois cas selon que l'expression sous le radical, soit $b^2 - 4ac$, est positive, nulle ou négative.

Deux racines réelles distinctes

Lorsque l'expression $b^2 - 4ac$ est positive, on peut en extraire la racine. Il existe alors deux racines réelles.

Une racine double

Lorsque l'expression $b^2 - 4ac$ est égale à 0, l'équation admet une seule racine, soit $x = -b/(2a)$.

Aucune racine réelle

Lorsque l'expression $b^2 - 4ac$ est négative, on ne peut en extraire la racine, car la racine carrée d'un nombre négatif n'est pas définie dans l'ensemble des nombres réels. Il n'y a donc pas de racine réelle.

REMARQUE
Lorsqu'une équation quadratique a une racine double, le trinôme est un carré parfait. On dit alors que la racine est d'**ordre** 2 ou que la racine est **double**.

REMARQUE
Lorsque $b^2 - 4ac < 0$, l'équation quadratique a des racines complexes.

Inéquations quadratiques

Équations_05

Pour déterminer l'ensemble solution d'une inéquation quadratique, on détermine d'abord les racines de l'équation quadratique, puis on procède à l'étude des signes.

REMARQUE
On peut également déterminer les bornes des intervalles par la méthode générale de résolution d'une équation quadratique.

EXEMPLE 1.3.6

Résoudre les équations quadratiques suivantes et représenter graphiquement leur ensemble solution.

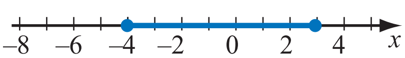
a) $x^2 + x - 12 \leq 0$ b) $x^2 + x - 20 > 0$

Solution

a) En factorisant l'expression quadratique, on obtient

$$(x + 4)(x - 3) \leq 0.$$

Pour que le produit des binômes soit négatif, il faut que l'un des facteurs soit négatif et l'autre positif. Le changement de signe d'un produit a lieu lorsqu'un des facteurs s'annule. Le premier facteur s'annule à $x = -4$, et le second à $x = 3$. Ces deux valeurs divisent la droite réelle en trois intervalles : $]-\infty; -4[$, $]-4; 3[$ et $]3; \infty[$. On procède à l'étude des signes du produit dans un tableau comportant une ligne pour chacun des facteurs et une ligne pour le produit de ceux-ci. On détermine le signe de chacun des facteurs dans chaque intervalle et la règle des signes permet de déterminer le signe du produit.



Ensemble-solution : [–4; 3]

Étude des signes

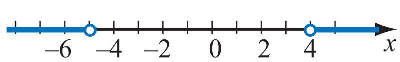
Facteurs	$]-\infty; -4[$	-4	$]-4; 3[$	3	$]3; \infty[$
$x + 4$	–	0	+	+	+
$x - 3$	–	–	–	0	+
$(x + 4)(x - 3)$	+	0	–	0	+

On constate que le produit des facteurs est négatif ou nul dans l'intervalle $[-4; 3]$ par conséquent tous les éléments de cet intervalle vérifient l'inéquation. L'ensemble solution est donc l'intervalle $[-4; 3]$ qui est représenté ci-contre.

b) En factorisant l'expression quadratique, on obtient

$$(x + 5)(x - 4) > 0.$$

On procède à l'étude des signes.



Ensemble-solution
$]-\infty; -5[\cup]4; \infty[$

Étude des signes

Facteurs	$]-\infty; -5[$	-5	$]-5; 4[$	4	$]4; \infty[$
$x + 5$	–	0	+	+	+
$x - 4$	–	–	–	0	+
$(x + 5)(x - 4)$	+	0	–	0	+

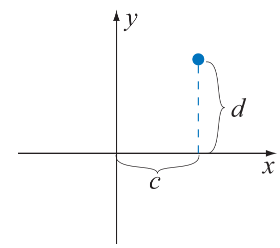
Les bornes de l'intervalle ne sont pas dans l'ensemble solution car l'inéquation est définie à l'aide du symbole >. L'ensemble solution est donc $]-\infty; -5[\cup]4; \infty[$. Cet ensemble est représenté ci-contre.

Éléments de géométrie analytique

GeoAnalytique_01

Plan cartésien

Un **plan cartésien** est un plan défini par deux droites réelles perpendiculaires dont les origines coïncident. Chacun des points du plan est caractérisé par un couple de nombres dont la première composante correspond à la distance du point à l'axe vertical, et la deuxième composante à la distance à l'axe horizontal. Ainsi la représentation graphique du couple (c; d) est le point du plan représenté ci-contre.



Plan cartésien

En géométrie analytique, on doit souvent déterminer la distance entre deux points ou la pente du segment de droite joignant ces points.

Distance entre deux points

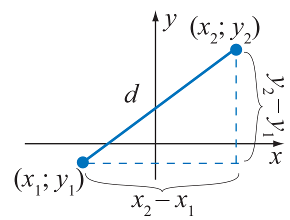
Soit (x_1; y_1) et (x_2; y_2), deux points d'un plan cartésien. La **distance** entre ces deux points est

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Pente d'un segment de droite

Soit (x_1; y_1) et (x_2; y_2), deux points d'un plan cartésien tels que $x_1 \neq x_2$. On définit la **pente** du segment de droite joignant ces deux points comme le rapport

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Distance et pente

REMARQUE

La distance entre deux points d'un plan cartésienest la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la pente du segment de droite est le rapport des côtés de l'angle droit.

EXEMPLE 1.3.7

Déterminer si les trois points $A(-1; -4)$, $B(1; 2)$ et $C(2; 5)$ sont sur la même droite.

■ ***Solution***

Si les trois points sont sur une même droite, alors la pente du segment reliant les points A et C est égale à la pente du segment reliant les points A et B ou B et C. En calculant ces pentes on trouve :

$$\text{Pente de } AC : \frac{5-(-4)}{2-(-1)} = \frac{9}{3} = 3.$$

$$\text{Pente de } AB : \frac{2-(-4)}{1-(-1)} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\text{Pente de } BC : \frac{5-2}{2-1} = \frac{3}{1} = 3.$$

Les trois points sont donc sur une même droite puisque les pentes respectives des segments reliant n'importe quelle paire de points sont égales.

Lieu géométrique d'une équation

On appelle **lieu géométrique** d'une équation la figure formée par l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'équation.

On peut classer les problèmes de géométrie analytique en deux catégories :

– Étant donné une équation, trouver le lieu géométrique correspondant.
– Étant donné un lieu géométrique défini par une propriété géométrique, trouver l'équation correspondante.

GeoAnalytique_02

Équation d'une droite

Pour déterminer l'équation d'une droite, on doit pouvoir calculer la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite.

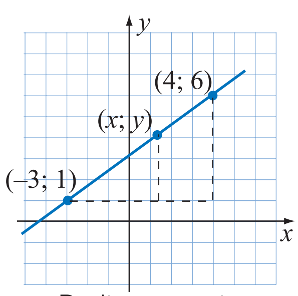
Relations_06

EXEMPLE 1.3.8

Représenter graphiquement la droite passant par les points (–3; 1) et (4; 6) et trouver l'équation de cette droite.

Solution

La représentation graphique des points et de la droite est donnée ci-contre.



Droite passant par (–3; 1) et (4; 6)

Pour qu'un point $(x; y)$ soit sur la même droite que (–3; 1) et (4; 6), il faut que la pente du segment reliant $(x ; y)$ et (–3; 1) soit égale à la pente du segment reliant (–3; 1) et (4; 6). Sous forme algébrique, cette condition s'écrit :

$$\frac{y-1}{x-(-3)} = \frac{6-1}{4-(-3)} = \frac{5}{7} \quad ; \text{ donc } \quad \frac{y-1}{x+3} = \frac{5}{7}.$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$7(y - 1) = 5\,(x + 3)$$
$$7y - 7 = 5x + 15$$
$$7y = 5x + 22.$$

En isolant la variable y, on a :

$$y = \frac{5}{7}x + \frac{22}{7}.$$

Équation d'un cercle

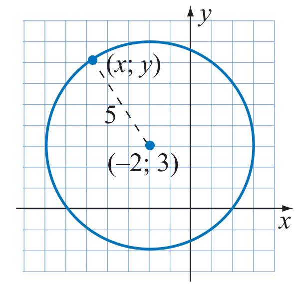
GeoAnalytique_03

GeoAnalytique_04

Un cercle est l'ensemble des points qui sont à une distance donnée d'un point donné appelé centre du cercle.

EXEMPLE 1.3.9

Représenter graphiquement le cercle de rayon 5 centré à (–2; 3) et trouver l'équation de ce cercle.



Solution

La représentation graphique du cercle est donnée ci-contre.

Par définition, le cercle est l'ensemble des points qui sont à une distance de 5 unités du point (–2; 3). Donc,

$$\sqrt{(x-(-2))^2+(y-3)^2}=5,$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=25.$$

En développant, on obtient $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$.

Équations à deux inconnues

Équation du premier degré à deux inconnues

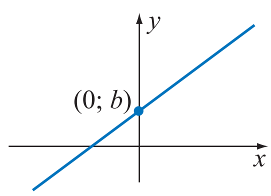
Une **équation du premier degré à deux inconnues** est une équation de la forme

$$Ax + By + C = 0.$$

En isolant y dans cette équation, on obtient :

$$y=\frac{-A}{B}x-\frac{C}{B} \quad \text{ou} \quad y=ax+b.$$

Le graphique d'une telle équation est une droite dont la pente est a et l'ordonnée à l'origine est b.



Droite dont l'ordonnée à l'origine est b

Le fait d'isoler la variable y dans une équation à deux inconnues permet d'expliciter la relation entre les variables.

EXEMPLE 1.3.10

Isoler la variable y dans les équations suivantes :

a) $2x - 3y - 8 = 0$

b) $xy - 4 = 0$

c) $x^2 - y - 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4 = 0$

Solution

a) En isolant y, on obtient $y=\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$.

On reconnaît l'équation d'une droite dont la pente est 2/3 et l'ordonnée à l'origine est –8/3.

b) En isolant y, on obtient $y=\frac{4}{x}$.

c) La relation obtenue en isolant y est $y = x^2 - 4$.

d) La relation obtenue en isolant y est $y=\pm\sqrt{4-x^2}$.

REMARQUE

On note que en b) et en d), la relation n'est pas définie pour toutes les valeurs de x, car la division par zéro et l'extraction de la racine carrée d'un nombre négatif ne sont pas définies. De plus, en d), à chaque valeur de x pour laquelle la relation est définie, correspond plus d'une valeur correspondante pour y,

On a recours aux équations à deux inconnues pour décrire le lien entre deux variables dont les valeurs sont en relation.

REMARQUE
Lorsqu'on parle de relation, ou de fonction, on parle d'une correspondance entre les éléments de deux ensembles. Dans les cas étudiés dans le présent ouvrage, il s'agit de deux ensembles de nombres.

Relation

On appelle **relation** de A dans B tout ensemble de couples $(c; d)$ tel que $c \in A$ et $d \in B$.

L'ensemble A est appelé **ensemble de départ** et B, **ensemble d'arrivée** de la relation.

Le premier élément d'un couple $(c; d)$ de la relation est appelé **préimage** de d par la relation et le deuxième élément du couple est appelé **image** de c par la relation.

Domaine et codomaine d'une relation

On appelle **domaine d'une relation** l'ensemble des valeurs qui sont préimage dans au moins un couple de la relation.

On appelle **codomaine d'une relation** l'ensemble des valeurs qui sont image dans au moins un couple de la relation.

Représentations

La représentation d'une relation sous la forme d'un tableau ou d'une liste de couples est une représentation en **extension**. La description en **compréhension** d'une relation consiste en l'énoncé d'une **règle de correspondance**. En associant à chaque couple d'une relation un point dans un système de référence cartésien, on obtient une **courbe** qui est la **représentation graphique** de la relation.

REMARQUE
Dans la recherche des zéros d'une fonction, il faut résoudre une équation. La démarche à suivre dépend du type d'équation.

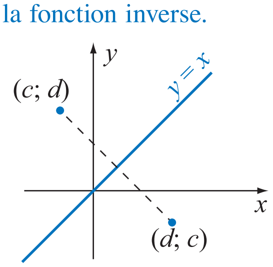
Fonction

Une **fonction** est une relation pour laquelle chaque élément du domaine a une et une seule image.

Zéros et ordonnée à l'origine d'une fonction

Les **zéros** d'une fonction sont les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.
L'**ordonnée à l'origine** est l'image de 0 par la fonction.

REMARQUE
Dans les applications, on utilise généralement la première lettre de la grandeur physique pour désigner la variable et on n'intervertit pas les symboles pour écrire la règle de correspondance de la relation réciproque ou de la fonction inverse.



Relation réciproque et fonction inverse

Soit f une fonction. On appelle **relation réciproque** de f, la relation formée des couples réciproques de la fonction f. Lorsque la relation réciproque d'une fonction est elle-même une fonction, on l'appelle **fonction inverse** et on la note f^{-1}.

Puisque le couple réciproque d'un couple $(c; d)$ est le couple $(d; c)$, on obtient la règle de correspondance de la relation réciproque d'une fonction f en isolant la variable indépendante dans la règle de correspondance de f. Selon l'usage, en mathématiques, on emploie la lettre x pour désigner la variable indépendante. C'est pourquoi, après avoir isolé celle-ci, on intervertit x et y pour écrire la règle de correspondance de la relation réciproque. On peut construire rapidement le graphique de la relation réciproque puisque, dans un système cartésien, les couples réciproques sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Relations_03

Relations_05

EXEMPLE 1.3.11

Déterminer la règle de correspondance de la relation réciproque de chacune des fonctions suivantes. Donner le domaine de la relation réciproque et esquisser son graphique et dire si c'est une fonction.

a) $y = x^2 + 2$ b) $y = x^3 + 1$

Solution

a) Pour déterminer la règle de correspondance de la relation réciproque, on isole la variable x dans l'équation $y = x^2 + 2$.
On obtient $x^2 = y - 2$ et $x = \pm\sqrt{y-2}$. En intervertissant la désignation des variables, on a la règle de correspondance de la relation réciproque

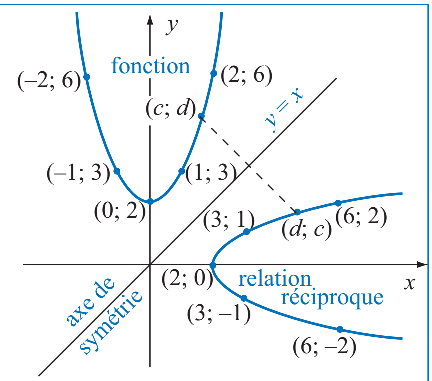
$$y = \pm\sqrt{x-2}.$$

Le domaine de cette relation est l'ensemble des valeurs de x telles que $x - 2 \geq 0$, soit l'intervalle $[2; \infty[$.
Pour esquisser le graphique, on pourrait calculer des correspondances, mais il est plus simple de représenter d'abord la fonction $f(x) = x^2 + 2$, puis de construire le graphique de la relation réciproque par symétrie par rapport à la droite $y = x$. Le graphique de la fonction f est une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe des y et dont le sommet est $(0; 2)$. En se servant de la symétrie, on obtient le graphique représenté ci-contre.
La relation réciproque n'est pas une fonction, car certains des éléments du domaine ont deux images. C'est le cas, par exemple, de $x = 3$ qui est la préimage des couples $(3; 1)$ et $(3; -1)$.

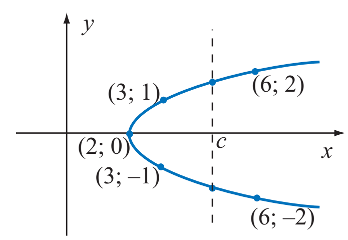
b) Pour déterminer la règle de correspondance de la relation réciproque, on isole la variable x dans l'équation $y = x^3 + 1$. On obtient $x^3 = y - 1$ et $x = \sqrt[3]{y-1}$. En intervertissant la désignation des variables, on obtient la règle de correspondance de la relation réciproque

$$y = \sqrt[3]{x-1}.$$

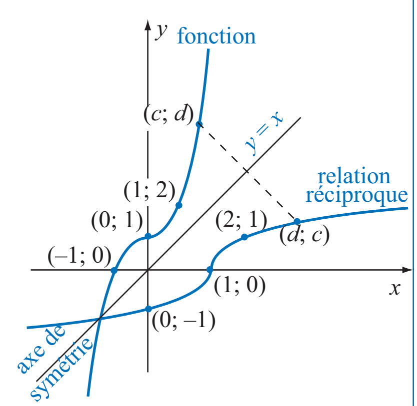
Puisqu'une racine impaire est définie pour tout nombre réel, le domaine de cette relation est l'ensemble des nombres réels.
Pour esquisser le graphique, on trace d'abord le graphique de la fonction $f(x) = x^3 + 1$, puis on construit celui de la relation réciproque par symétrie par rapport à la droite $y = x$. On obtient ainsi le graphique représenté ci-contre.
La relation réciproque est une fonction.



Représentation par symétrie



Relation réciproque
$y = \pm\sqrt{x-2}$



Fonction inverse
$y = \sqrt[3]{x-1}$

Systèmes d'équations

SystemeEquations_01

Un système d'équations à deux inconnues est formé d'au moins deux équations renfermant ces inconnues. Lorsque les deux équations sont du premier degré, elles sont représentées graphiquement par des droites et, si celles-ci ont des pentes différentes, elles sont concourantes. En résolvant un système de deux équations à deux inconnues, on détermine le point d'intersection de leurs graphiques.

Résolution par réduction

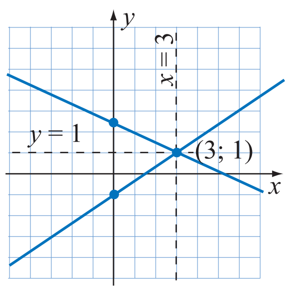
La méthode de résolution par réduction consiste à construire un système d'équations équivalent au système donné en éliminant des inconnues.

Relations_06

EXEMPLE 1.3.12

Représenter graphiquement les droites L_1 et L_2 et résoudre par réduction le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$$



■ ***Solution***

On peut construire un système équivalent dans lequel le coefficient de la variable x dans la deuxième équation sera nul en ajoutant –2 fois la première équation à la deuxième.

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \end{array}\begin{cases} x+2y=5 \\ 0x-7y=-7 \end{cases}$$

On isole y dans la deuxième équation en divisant chaque membre par –7

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \to L_2/(-7) \end{array}\begin{cases} x+2y=5 \\ 0x+y=1 \end{cases}$$

On annule le coefficient de y dans la première équation en ajoutant –2 fois la deuxième équation à la première

$$\begin{array}{r} L_1 \to L_1 - 2L_2 \\ L_2 \end{array}\begin{cases} x+0y=3 \\ 0x+y=1 \end{cases}$$

La solution est donc (3; 1).

SystemeEquations_02

Résolution par comparaison

La méthode de résolution par comparaison repose sur la comparaison des valeurs numériques des deux expressions d'une même variable. On procède en isolant une même variable dans chacune des équations et en posant l'égalité entre les deux expressions obtenues. Il suffit alors de résoudre l'équation résultante et de substituer la valeur obtenue dans l'une des équations initiales.

EXEMPLE 1.3.13

Résoudre par comparaison des ordonnées le système d'équations linéaires suivant.

$$2x - 3y = 3$$
$$3x + 2y = 24$$

Solution

En isolant y dans chacune des équations, on obtient

$$y = \frac{3-2x}{-3} \quad \text{et} \quad y = \frac{24-3x}{2}.$$

Les deux droites se rencontrent lorsque les deux expressions algébriques ont la même valeur numérique, c'est-à-dire si

$$\frac{3-2x}{-3} = \frac{24-3x}{2}.$$

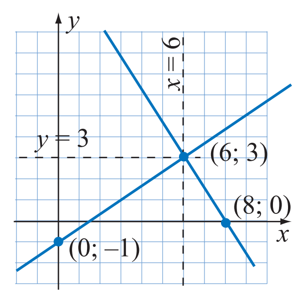
En effectuant le produit des extrêmes et des moyens, on a

$$6 - 4x = -72 + 9x.$$

En isolant x dans cette équation, on obtient

$$-13x = -78; \text{ donc } x = 6.$$

On peut alors substituer la valeur de x dans l'une des équations initiales et isoler la valeur de y correspondante. On trouve ainsi $y = 3$. La solution est donc le couple (6; 3).



Un peu *d'histoire*

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS

À l'époque babylonienne (v. ~1 700), on savait déjà résoudre certaines équations quadratiques. On rencontrait de telles équations pour déterminer le côté d'un carré dont l'aire est connue; par exemple, trouver le côté du carré dont l'aire est 24. Ces équations n'étaient cependant pas formulées symboliquement et le raisonnement pour les résoudre était décrit en mots et non par des manipulations de symboles.

Diophante d'Alexandrie vécut au IIIe siècle. Il est l'auteur d'un ouvrage, l'*Arithmétique*, qui à l'origine aurait compris 13 livres. Cependant, six livres seulement nous sont parvenus. Le premier contient des problèmes qui se ramènent à des équations du type $ax = b$ ou $ax^2 = b$, avec uniquement une solution positive, alors que les cinq autres livres portent sur des équations indéterminées. Diophante utilise des abréviations pour représenter les opérations d'addition et de soustraction, les puissances de nombres et la quantité inconnue d'une équation. Ces symboles étaient cependant très différents de ceux que nous employons maintenant.

Il existe une légende au sujet de Diophante. Une anthologie grecque (datant d'environ 500 de notre ère) rapporte que sa tombe portait l'épitaphe suivante (on trouve sur internet, http://www.bibmath.net/bios/index.php3?action=affiche&quoi=diophante, la traduction en alexandrins qui serait due à H. Eutrope et reprise par Emile Fourrey dans un ouvrage publié chez Vuibert, *Récréations mathématiques*) :

Passant, sous ce tombeau repose Diophante.
Ces quelques vers tracés par une main savante
Vont te faire connaître à quel âge il est mort.
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance;
Le douzième fut pris par son adolescence.
Des sept parts de sa vie, une encore s'écoula,
Puis s'étant marié, sa femme lui donna
Cinq ans après un fils, qui, du destin sévère,
Reçut de jours hélas! deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut.
Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.

1.4 Exercices

Équations du premier degré

1. Résoudre les équations du premier degré suivantes

   a) $7x + 13 = 10x - 2$

   b) $6x + 9 = 2x - 7$

   c) $2x + 7 = 3x - 6$

   d) $8x + 18 = 5x - 7$

   e) $\dfrac{4x-6}{8} + \dfrac{3x-2}{4} = 4$

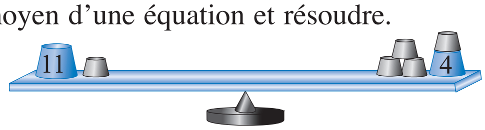
   f) $\dfrac{2x+3}{5} + \dfrac{3x-4}{4} = \dfrac{4x-5}{8}$

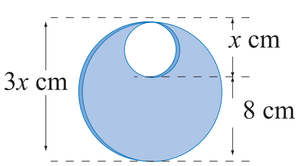
   g) $abx - cd = ab - cdx$

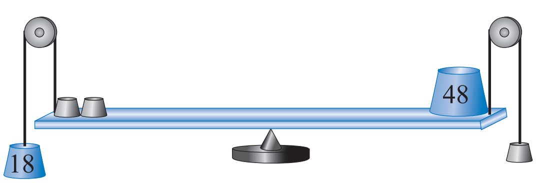
   h) $ax - a^2 = nx - an$

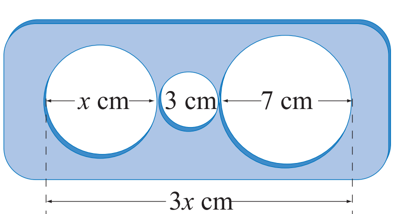
2. Sans résoudre l'équation, déterminer si le nombre 4 est une solution de $3x - 2 = 10$ et justifier la réponse.

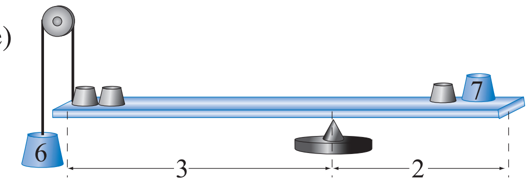
3. Décrire algébriquement la situation illustrée au moyen d'une équation et résoudre.

   a) 

   b) 

   c) 

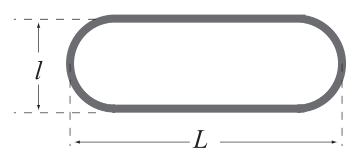
   d) 

   e) 

4. Un système de refroidissement de 40 litres est rempli d'un liquide constitué de 25% d'antigel. Quelle quantité de ce liquide doit-on retirer et remplacer par de l'antigel pur pour obtenir une concentration d'antigel de 45% ?

5. Durant une compétition, un groupe de cyclistes se déplace à une vitesse de 20 km/h. La camionnette transportant l'équipement lourd et la nourriture part à leur poursuite quarante-cinq minutes plus tard. Si sa vitesse est de 50 km/h, combien de temps lui faudra-t-il pour rejoindre le groupe et quelle sera alors la distance parcourue?

6. Une piste de course ovale a des extrémités semi-circulaires et des côtés droits. La longueur de l'ovale est le triple de sa largeur et le tour de piste mesure 600 m. Trouver la largeur et la longueur de l'ovale. (La longueur de la circonférence C est $C = 2\pi r$ où r est le rayon du cercle.)



7. Deux autobus quittent au même moment les terminus opposés d'une ligne de 372 km. Si leurs vitesses respectives sont de 70 et 85 km/h, combien de temps mettent-ils à se rencontrer?

8. Un réservoir est muni de deux conduites d'entrée. La première permet de remplir le réservoir en 12 heures et la deuxième en 8 heures. En combien de temps peut-on remplir le réservoir en utilisant les deux conduites ?

9. Un réservoir est muni de deux conduites d'entrée. La première de ces conduites peut remplir le réservoir en a heures et la deuxième en b heures. En combien de temps peut-on remplir le réservoir si les deux conduites sont en fonction?

10. Un cycliste parcourt 112 km en 6 h. Durant une partie du trajet il roule à 20 km/h et, durant l'autre partie, il roule à 16 km/h. Trouver le temps que le cycliste roule à chacune de ces vitesses.

Inéquations du premier degré

11. Sans résoudre l'inéquation, dire si le nombre c en est une solution et justifier la réponse.

a) $3x - 2 \leq 7$ et $c = 4$.

b) $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{x}{5} \leq \dfrac{5x}{4}$ et $c = 1$

c) $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{x}{5} \leq \dfrac{5x}{4}$ et $c = -1$

12. Résoudre les inéquations suivantes et exprimer l'ensemble solution en notation ensembliste et en notation par intervalle.

a) $x - 7 > -3x - 1$

b) $3 - 2x > 3x - 5$

c) $\dfrac{2x-3}{3} + \dfrac{x+4}{5} \leq \dfrac{x+2}{4}$

d) $\dfrac{3x-4}{2} < \dfrac{x+2}{4}$

e) $\dfrac{3x-2}{5} \geq \dfrac{2}{3}$

f) $\dfrac{x+2}{7} + \dfrac{1-2x}{3} < 4 + \dfrac{5-3x}{2}$

g) $\dfrac{3x-2}{4} \leq 2x - 8$

h) $\dfrac{x+2}{3} + \dfrac{1}{4} < \dfrac{2x-5}{3}$

13. Résoudre les systèmes d'inéquations suivants et exprimer l'ensemble solution en notation ensembliste et en notation par intervalle.

a) $\dfrac{x+3}{2} + 2 > \dfrac{4x-2}{3}$ et $6 - 2x \geq 4 - 3x$

b) $\dfrac{3-2x}{3} \leq \dfrac{2x-1}{5}$ et $2x - 5 < 7 - x$

14. Effectuer les opérations indiquées sur les intervalles et représenter le résultat graphiquement.

a) $]-3; 5] \cap [2; 6[$

b) $]-3; 1] \cap [4; 6[$

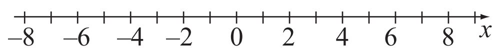
c) $]-3; 5] \cup [2; 6[$

d) $]-\infty; 4] \cap [2; \infty[$

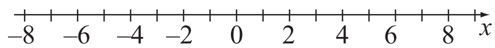
e) $]-\infty; 4] \cup [2; \infty[$

f) $]-\infty; 6[\cap]-2; \infty[$

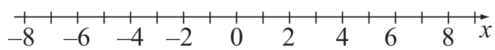
15. Définir en notation ensembliste et représenter graphiquement chacun des intervalles suivants.

a) 

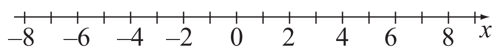
$[-3; 2] = \{x \in \mathbb{R} |$ $\}$

b) 

$[2; \infty[= \{x \in \mathbb{R} |$ $\}$

c) 

$]4; \infty[= \{x \in \mathbb{R} |$ $\}$

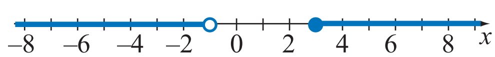
d) 

$]-\infty; -3] = \{x \in \mathbb{R} |$ $\}$

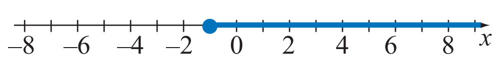
16. Définir en notation ensembliste et en notation d'intervalle chacun des intervalles représentés graphiquement.

a) 

$\{x \in \mathbb{R} |$ $\} =$

b) 

$\{x \in \mathbb{R} |$ $\} =$

c) 

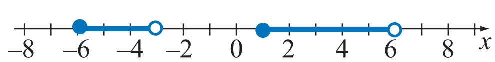
$\{x \in \mathbb{R} |$ $\} =$

d) 

$\{x \in \mathbb{R} |$ $\} =$

e) 

$\{x \in \mathbb{R} |$ $\} =$

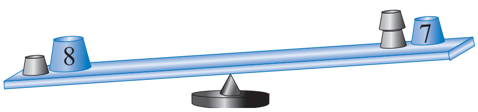
f) 

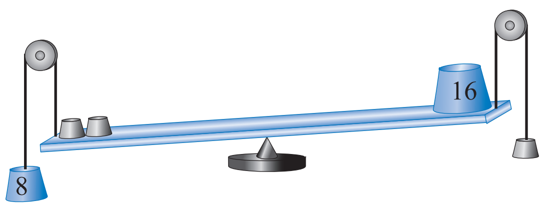
$\{x \in \mathbb{R} |$ $\} =$

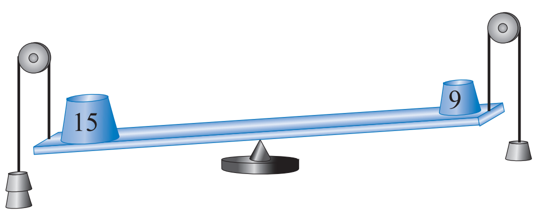
g) 

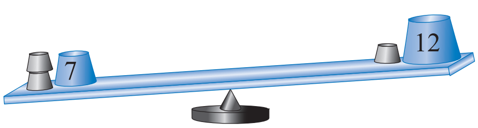
$\{x \in \mathbb{R} |$ $\} =$

17. Décrire la situation illustrée à l'aide d'une inéquation et trouver l'intervalle des valeurs que peut prendre la variable.

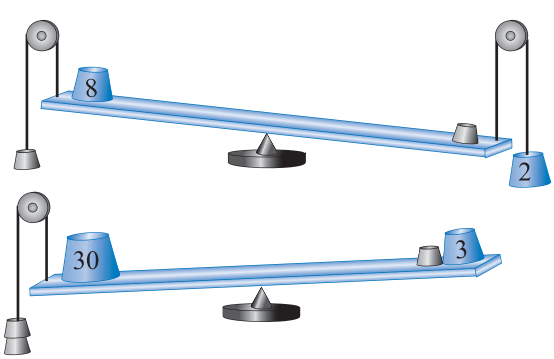
a)


b)


c)


d)


18. Décrire la situation illustrée à l'aide d'un système d'inéquations, trouver l'intervalle des valeurs que peut prendre la variable x et représenter graphiquement cet intervalle.



Équations quadratiques

19. Résoudre les équations quadratiques incomplètes suivantes.

a) $4x^2 - 64 = 0$
b) $27x^2 - 675 = 0$
c) $4x^2 + 20 = 0$
d) $5x^2 + 20x = 0$
e) $7x^2 - 19x = 0$
f) $3x^2 - 8 = 0$

20. Résoudre les équations quadratiques complètes suivantes par factorisation.

a) $x^2 + 4x - 45 = 0$
b) $x^2 + 20x + 51 = 0$
c) $x^2 - 20x + 84 = 0$
d) $2x^2 - 5x - 42 = 0$

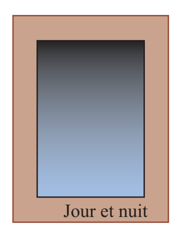
21. Résoudre les équations quadratiques complètes suivantes par complétion du carré.

a) $x^2 + 2x - 35 = 0$
b) $x^2 + 8x - 105 = 0$
c) $x^2 + 4x - 77 = 0$
d) $x^2 - 6x - 72 = 0$

22. Résoudre les équations quadratiques complètes suivantes par la méthode générale.

a) $x^2 - 5x - 84 = 0$
b) $2x^2 + 11x - 21 = 0$
c) $x^2 + 3x + 4 = 0$
d) $6x^2 - 7x - 20 = 0$

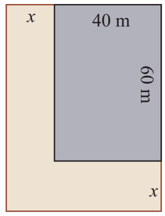
23. Une peinture et son cadre forment un rectangle de 90 cm par 120 cm. Sachant que l'aire du cadre est égale à l'aire de la toile peinte, trouver la largeur du cadre.



24. La somme des périmètres respectifs de deux carrés est de 56 cm et la somme des aires de ces carrés est de 106 cm^2. Trouver les dimensions des carrés.

25. Un rectangle a un périmètre de 128 cm et une aire de 768 cm^2. Trouver les dimensions de ce rectangle.

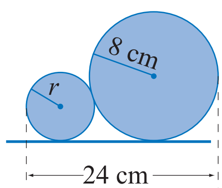
26. Le propriétaire de l'usine qui vous emploie souhaite doubler la superficie de son immeuble en construisant des annexes de même largeur l'une sur le côté et l'autre à l'arrière pour former un L.



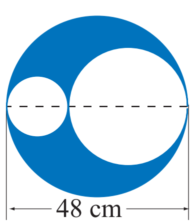
Il vous demande de trouver la largeur des annexes à construire pour obtenir la superficie désirée. L'immeuble mesure actuellement 40 m par 60m.

27. Trouver la longueur des côtés d'un triangle rectangle dont :
   a) l'hypoténuse mesure 35 cm, la somme des deux autres côtés étant de 49 cm.
   b) l'hypoténuse mesure 78 cm, la somme des deux autres côtés étant de 102 cm.

28. Trouver le rayon r du petit cercle de la figure suivante.



29. La somme des aires des deux cercles intérieurs de la figure suivante est égale au trois quarts de l'aire du cercle extérieur. Calculer le diamètre du plus petit cercle.



Inéquations quadratiques

30. Résoudre par factorisation les inéquations quadratiques suivantes.
   a) $x^2 - 2x - 15 < 0$
   b) $x^2 + 8x + 7 \leq 0$
   c) $x^2 + x - 6 > 0$
   d) $x^2 - 8x + 12 \geq 0$

Éléments de géométrie analytique

31. Trouver le périmètre du triangle dont les sommets sont (–2; 1), (3; 4) et (6; –1). Montrer que ce triangle est un triangle rectangle et en calculer l'aire.

32. Montrer que le point (3; –2) appartient à la droite passant par les points (1; 1) et (5; –5) et qu'il est équidistant de ceux-ci.

33. Trouver la pente et l'équation de la droite passant par les points donnés.
   a) (–2; –1) et (2; 4)
   b) (–5; 2) et (2; 1)

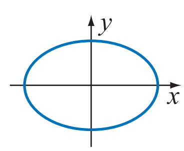
34. Trouver les points dont l'abscisse est 6 et dont la distance au point (2; 1) est de cinq unités.

35. Déterminer l'équation du cercle de rayon 5 centré en (3; –2).

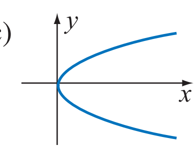
Relations et fonctions

36. Dire si les graphiques suivants représentent des fonctions ou de simples relations.

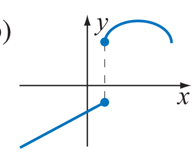
a)



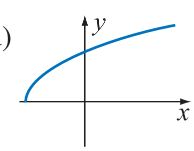
c)



b)



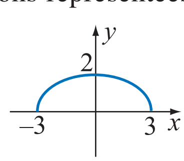
d)



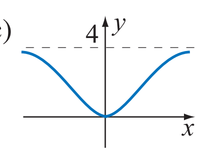
37. Déterminer si les équations suivantes définissent des fonctions.
   a) $3x + 4y - 5 = 0$
   b) $x^2 + 4y + 4 = 0$
   c) $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$
   d) $xy + 4y - 2x = 0$

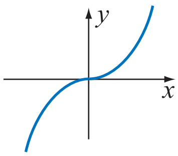
38. Déterminer le domaine et le codomaine des fonctions représentées par les graphiques suivants.

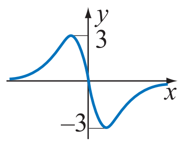
a)



c)



b) 

d) 

39. Trouver les zéros et l'ordonnée à l'origine des fonctions définies par les règles de correspondance suivantes.

a) $f(x) = 5x - 2$

b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{2x+5}$

d) $f(x) = \sqrt{x+5}$

e) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

g) $f(x) = \sqrt{9-x}$

h) $f(x) = \dfrac{5}{x-2}$

40. Trouver la préimage de c par la fonction dont la règle de correspondance est donnée.

a) $c = 5$, $f(x) = x^2 + x - 7$

b) $c = 7$, $f(x) = 3x - 2$

41. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}.$$

a) Trouver la préimage de 4 par la fonction f.

b) Trouver la préimage de 2 par la fonction f.

c) Les valeurs 4 et 2 font-elles partie du codomaine de la fonction?

d) Trouver la préimage d'un élément y quelconque par la fonction f.

e) Dire à quelle condition un élément y fait partie de l'image de la fonction.

42. Déterminer le domaine et le codomaine des fonctions définies par :

a) $f(x) = \sqrt{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{x-9}{x-2}$

43. Trouver le domaine et le codomaine des fonctions définies par les règles de correspondance suivantes.

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

c) $f(x) = 2^x$

d) $f(x) = x^3$

e) $f(x) = x^2 - 3x$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

g) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

h) $f(x) = \sqrt{14-3x}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

j) $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x-5}$

Systèmes d'équations

44 Résoudre par réduction les systèmes d'équations linéaires suivants.

a) $2x - 3y - 13 = 0$
$3x + 5y + 9 = 0$

b) $3x - y = 18$
$4x + 2y = 14$

c) $2x + 3y = 11$
$4x + 5y = 17$

d) $2x - 7y = -9$
$5x + 8y = 54$

45. Résoudre par comparaison les systèmes d'équations linéaires suivants.

a) $3x - 2y = -5$
$2x - 5y = 4$

b) $3x - 2y = 7$
$4x + 2y = 28$

c) $7x + y = 40$
$x + 8y = -10$

d) $3x - 7y = 7$
$x - 2y = 3$

46. Trouver les points d'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ et de la droite d'équation $x + y + 1 = 0$.

47. Trouver les points d'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 13$ et de la droite d'équation $x + y - 1 = 0$.

48. Trouver les points d'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$ et de la droite d'équation $x - y + 1 = 0$.

49. Déterminer les points d'intersection de la droite d'équation $x + y + 4 = 0$ et du cercle d'équation $x^2 + y^2 + 6x - 14y - 6 = 0$.