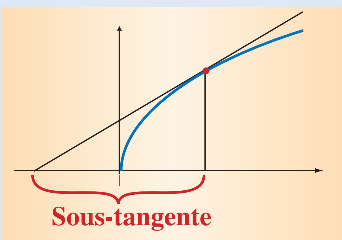
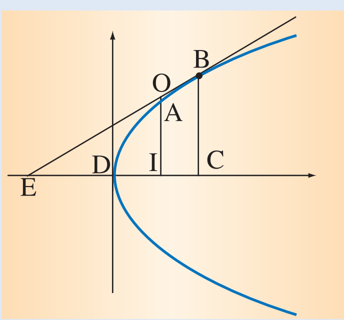
Pierre de Fermat
1601-1665

Constatant que la tangente est entièrement déterminée si le point de rencontre de celle-ci avec un axe est connu, Fermat applique sa méthode des valeurs extrêmes pour déterminer ce point. Il s'agit en fait de déterminer la longueur de la sous-tangente, c'est-à-dire de la projection de la tangente sur l'axe.

Pierre de Fermat

Recherche de la tangente





Recherche de la tangente

Vers 1632, Fermat applique sa méthode des extremums à la recherche des tangentes. Constatant que pour définir la tangente, il faut en connaître deux points, il cherche à déterminer le point de rencontre de celle-ci avec l'axe horizontal. Pour déterminer le point d'intersection avec l'axe horizontal, il détermine la longueur de la projection de la tangente sur l'axe horizontal entre le point de tangence et le point d'intersection. Cette projection était appelée la *sous-tangente*.

Considérons la parabole $y^2 = px$, dont le graphique est donné ci-contre, et un point B quelconque de la courbe. Notons $(x; y)$ les coordonnées du point B et considérons un point O proche de B sur la tangente.

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AI}^2}{\overline{DI}} = p \text{ et } \frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}} < \frac{\overline{OI}^2}{\overline{DI}}$$

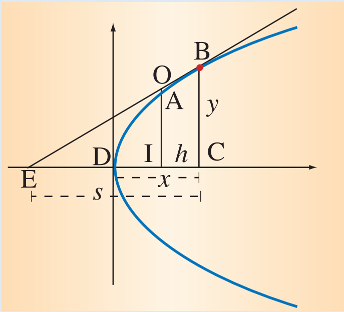
Si le point O se déplace sur la tangente, le rapport :

$$\frac{\overline{OI}^2}{\overline{DI}}$$

atteint sa valeur minimale lorsque O et B coïncident. Par sa méthode des valeurs extrêmes, Fermat doit égaler les deux rapports.

Notons $(x - h; y - k)$ les coordonnées du point A. Puisque les points A et B sont sur la courbe, leurs coordonnées satisfont l'équation de celle-ci, soit :

$$\frac{y^2}{x} = \frac{(y-k)^2}{x-h} = p$$



De plus, puisque les triangles EOI et EBC sont semblables, les côtés homologues sont proportionnels, et on a :

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{EI}} = a$$

D'où l'on obtient :

$$\overline{BC} = a\overline{EC} \text{ et } \overline{OI} = a\overline{EI}$$

Lorsque le point O est proche du point B, ses coordonnées sont très proches de celle du point A, on a alors :

$$y = as \text{ et } y - k \approx a(s - h)$$

où s est la longueur de la sous-tangente. En substituant dans

$$\frac{y^2}{x} = \frac{(y-k)^2}{x-h} = p,$$

$$\frac{a^2s^2}{x}=\frac{a^2(s-h)^2}{x-h}$$

d'où : $s^2(x-h)=d(x-h)^2$

et : $s^2x-s^2h = s^2x-2shx+h^2x$

$$-s^2h=-2shx+h^2x$$

$$s^2=2sx-hx$$

Posant $h = 0$, $s^2 = 2sd$ puis en divisant par s, on obtient :

$$s=2d$$

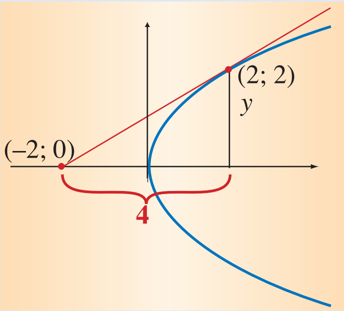
La longueur de la sous-tangente est égale à $2x$, où x est l'abscisse du point B.

Il est à noter que ce résultat est valide pour toutes les paraboles de la forme $y^2 = px$ et pour tous les points de la courbe.

Application du résultat

En utilisant le résultat de Fermat, on peut déterminer le point d'intersection de la tangente avec l'axe horizontal, puis calculer la pente de celle-ci.

Considérons la parabole $y^2 = 2x$ et le point de coordonnées (2; 2) sur cette courbe. Par le résultat de Fermat, la longueur de la sous-tangente est égale à deux fois l'abscisse de ce point, soit $s = 4$. Par conséquent, l'intersection de la tangente et de l'axe des x est le point (–2; 0).



Connaissant ces deux points, on peut facilement calculer la pente de la tangente, on obtient :

$$m_T=\frac{2-0}{2-(-2)}=\frac{1}{2}$$

On remarque l'importance de la géométrie analytique dans la méthode de Fermat.

Cas d'une fonction

En appliquant la méthode de Fermat à une fonction, la sous-tangente est sur l'axe vertical.

Considérons la fonction définie par l'équation $y = px^3$ et deux points A et B de la courbe proches l'un de l'autre. On a alors :

$$\frac{y}{x^3}=\frac{y-k}{(x-h)^3}=p$$

De plus, puisque les triangles EOD et EBC sont semblables, les côtés homologues sont proportionnels, et on a :

$$\frac{x}{s}=a \text{ et } \frac{x-h}{s-k}\approx a$$

d'où $x = as$ et $(x - h) \approx a(s - k)$. En substituant dans

$$\frac{y}{x^3}=\frac{y-k}{(x-h)^3}=p\,,$$

on obtient : $\dfrac{y}{a^3s^3}\approx\dfrac{y-k}{a^3(s-k)^3}$

Par la méthode des valeurs extrêmes, on considère que les rapports sont égaux et on obtient en simplifiant :

$$y(s-k)^3=s^3(y-k)$$

On développe, on simplifie et on divise par k. Il reste :

$$-3s^2y+3sky+k^2y=-s^3$$

En posant $k = 0$, on obtient :

$$-3s^2y=-s^3$$

On isole et on obtient $s = 3y$.

Par conséquent, la longueur de la sous-tangente est trois fois l'ordonnée du point de tangence.

Par exemple, si le point de tangence sur la courbe $y = x^3$ est (2; 8), la longueur de la sous-tangente s est 24. Le point d'intersection de la tangente avec l'axe vertical est alors (0; –16) et la pente de la tangente est :

$$m_T=\frac{-16-8}{0-2}=\frac{-24}{-2}=12$$

Connaissant la relation entre l'ordonnée d'un point et la longueur de sa sous-tangente, on peut déterminer l'intersection avec l'axe des y de n'importe quel point de la courbe.

Remarque

Au début de la géométrie analytique, on ne faisait pas de distinction entre une fonction et une relation, de plus, on utilisait un seul axe qui était horizontal. L'axe vertical est venu plus tard.