3 APPLICATIONS *de la* DÉRIVÉE

Résoudre des problèmes faisant appel à la dérivée de fonctions algébriques.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- la détermination de la fonction dérivée;
- l'utilisation de la dérivée d'une fonction algébrique pour résoudre des problèmes faisant appel au taux de variation ponctuel;
- l'utilisation de la dérivée pour estimer une valeur par approximation affine ou pour calculer une différentielle;
- l'analyse de l'évolution d'un phénomène en ayant recours aux dérivées première et seconde du modèle le décrivant.

OBJECTIFS

3.1 Utiliser la fonction dérivée pour déterminer le taux ponctuel d'une fonction algébrique en un point d'abscisse *c.*

3.2 Calculer des valeurs approchées en utilisant un modèle d'approximation affine.

3.3 Calculer des valeurs approchées en utilisant une différentielle.

3.1 Dérivée et taux de variation

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer assez facilement la dérivée d'une fonction algébrique. Dans cette section, nous utilisons cette dérivée dans des applications diverses. Les applications présentées dans ce chapitre sont valides pour toute fonction dérivable. Nous les rencontrerons également dans l'étude de fonctions transcendantes.

Introduction

La fonction dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ est la fonction qui décrit le taux de variation ponctuel en fonction de l'abscisse du point. On peut donc utiliser la fonction dérivée pour calculer un taux ponctuel. De plus, graphiquement, le taux de variation ponctuel en un point $(c; f(c))$ est la pente de la tangente en ce point. On peut donc avoir recours à la fonction dérivée pour déterminer la pente de la tangente à une courbe et utiliser celle-ci pour déterminer l'équation de la tangente en ce point.

DerivApplic01

PROCÉDURE

Évaluation du taux de variation en un point d'abscisse *c*

1. Trouver f', la dérivée de la fonction.
2. Calculer $f'(c)$, l'image de c par la fonction dérivée.

EXEMPLE 3.1.1

DerivApplic02

On lance une balle verticalement avec une vélocité initiale de 30 m/s. La position de la balle par rapport au sol est décrite par :

$$s = 30t - 4{,}9t^2 \text{ mètres.}$$

a) Trouver la fonction dérivée. Que décrit cette fonction ?

b) Trouver le taux de variation instantané de la position s à 1 seconde. Quelle est la signification physique de ce taux ?

c) Trouver le taux de variation instantané de la position s à 4 secondes. Quelle est la signification physique de ce taux ?

d) À quel moment la balle sera-t-elle arrêtée avant d'amorcer sa descente ?

e) À quel moment la balle touchera-t-elle le sol ?

f) Trouver la fonction décrivant le taux de variation instantané de la vitesse au temps t.

Solution

a) C'est une fonction polynomiale et, en utilisant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(30t - 4{,}9t^2\right) = 30\frac{d}{dt}(t) - 4{,}9\frac{d}{dt}\left(t^2\right) = 30 - 9{,}8t.$$

Cette fonction décrit le taux de variation ponctuel de la fonction s au temps t, c'est-à-dire la vitesse de la balle au temps t. On peut donc noter la fonction :

$$v(t) = 30 - 9{,}8t \text{ m/s.}$$

b) Le taux de variation instantané de s à 1 seconde est :

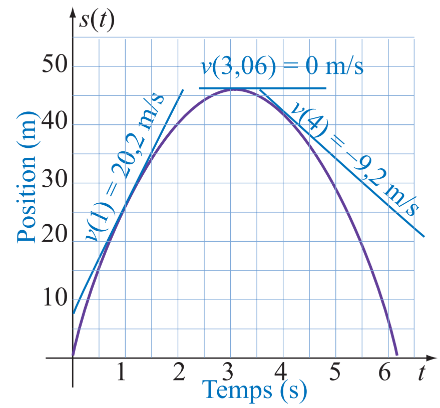
$$v(1) = 30 - 9{,}8 \times 1 = 20{,}2 \text{ m/s}.$$

Ce taux représente la vitesse de la balle à 1 seconde. Il est positif, ce qui signifie que la distance augmente; la balle s'éloigne du point de référence, donc elle monte.

c) Le taux de variation instantané de s à 4 secondes est :

$$v(4) = 30 - 9{,}8 \times 4 = -9{,}2 \text{ m/s}.$$

Ce taux représente la vitesse de la balle à 4 secondes. Il est négatif, ce qui signifie que la fonction décrivant la position est décroissante; la balle s'approche du point de référence, donc elle retombe.



d) La balle sera arrêtée lorsque sa vitesse sera nulle. On cherche donc pour quelle valeur de t on a :

$$v(t) = 30 - 9{,}8t = 0,$$

d'où : $t = 3{,}06$ s.

e) La balle touchera le sol lorsque la hauteur sera nulle, soit lorsque :

$$30t - 4{,}9t^2 = 0,$$

d'où : $t(30 - 4{,}9t) = 0.$

Cela donne $t = 0$ s, l'instant initial, et $t = 6{,}12$ s, l'instant de l'impact au sol.

f) Le taux de variation de la vitesse par rapport au temps est donné par la dérivée de la fonction vitesse. Puisque :

$$v(t) = 30 - 9{,}8t \text{ m/s},$$

on a donc : $a(t) = v'(t) = -9{,}8 \text{ m/s}^2$.

L'accélération est constante et négative; elle est donc contraire au mouvement initial et aura pour effet de ralentir et d'arrêter la balle puis de la faire retomber. C'est l'accélération due à la gravité.

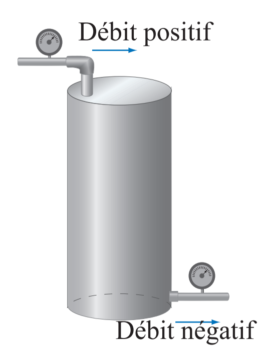
EXEMPLE 3.1.2

Un réservoir est muni d'un dispositif électronique qui contrôle l'ouverture d'une vanne dès que le volume de liquide est inférieur à 5 litres. Le volume de liquide qui s'ajoute est décrit par :

$$V(t) = \frac{20t+5}{t+1} \text{ L},$$

où t est le temps en minutes mesuré à partir de la mise en marche du système de remplissage.

DerivApplic03SCN



a) Déterminer la fonction décrivant le débit durant la période de remplissage.

b) Calculer le débit à l'instant où le système se met en marche.

c) Calculer le débit 5 minutes après la mise en marche, dix minutes après la mise en marche.

d) Que constatez-vous en observant ces différents taux?

Solution

a) Le volume de liquide est décrit par une fonction rationnelle. On a :

$$u = 20t + 5 \text{ et } v = t + 1,$$

d'où : $u' = 20$ et $v' = 1$.

On trouve donc :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{20\times(t+1)-(20t+5)\times 1}{(t+1)^2}$$

$$= \frac{20t+20-20t-5}{(t+1)^2} = \frac{15}{(t+1)^2}.$$

La fonction dérivée qui décrit le débit, est donc :

$$D(t) = V'(t) = \frac{15}{(t+1)^2}\ \text{L/min}.$$

b) Au temps $t = 0$ min, le débit est :

$$D(0) = \frac{15}{(0+1)^2}\ \text{L/s} = 15\ \text{L/min}.$$

c) Au temps $t = 5$ min, le débit est :

$$D(5) = \frac{15}{(5+1)^2}\text{L/min} = \frac{15}{36}\text{L/s} \approx 0{,}42\ \text{L/min}.$$

Au temps $t = 10$ min, le débit est :

$$D(10) = \frac{15}{(10+1)^2}\ \text{L/min} = \frac{15}{121}\ \text{L/min} \approx 0{,}12\ \text{L/min}.$$

d) Le débit diminue à mesure que le réservoir se remplit.

TIC

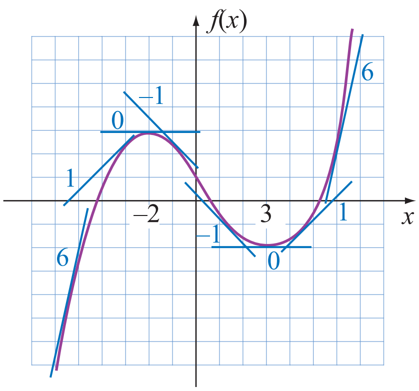
```
> restart;
> V:=t->(20*t+5)/(t+1);
> dV:=D(V);
> débit:=simplify(dV(t));
> plot({V(t),dV(t)},t=0..4,y=-10..20);
```

Puis on fait exécuter.

Dans ce cas, il n'est nul besoin d'indiquer qu'il y a une discontinuité puisque celle-ci est à $t = -1$ et que le modèle ne s'applique que pour $t > 0$.

Dérivée nulle

La dérivée fournit de l'information intéressante sur la variation de la fonction et, le cas échéant, sur le phénomène physique qu'elle décrit. Considérons le graphique d'une fonction polynomiale comme celui ci-contre. On constate que, lorsque le taux de variation ponctuel est positif, la fonction est croissante, puisque ce taux est la pente de la tangente. Lorsque le taux ponctuel est négatif, la fonction est décroissante. De plus, dans cet exemple, la frontière entre un intervalle de croissance et un intervalle de décroissance est une valeur pour laquelle la tangente est horizontale, c'est-à-dire un point pour lequel la pente de la tangente est nulle. Pour trouver ces points, il suffit de trouver pour quelles valeurs de la variable indépendante la dérivée s'annule.



Nous allons nous intéresser tout particulièrement aux points où la tangente est horizontale ainsi qu'aux intervalles de croissance et de décroissance. Il est important de savoir comment les trouver rapidement. Considérons un exemple.

REMARQUE

Ces réflexions intuitives ne sont valides que pour une fonction polynomiale. Nous verrons plus loin que la frontière entre un intervalle de croissance et un intervalle de décroissance n'est pas toujours une valeur pour laquelle la tangente est horizontale.

DerivApplic05

EXEMPLE 3.1.3

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x.$$

a) Déterminer la fonction dérivée.

b) Trouver en quels points la tangente est horizontale.

c) Trouver dans quels intervalles la fonction est croissante, décroissante.

■ ***Solution***

a) La fonction f est un polynôme et sa dérivée est :

$$f'(x) = 3x^2 - 36x + 96.$$

b) La tangente est horizontale lorsque la dérivée est nulle. On cherche donc x tel que :

$$3x^2 - 36x + 96 = 0.$$

Il s'agit d'une équation quadratique que l'on peut résoudre par décomposition en facteurs :

$$(3x - 12)(x - 8) = 0.$$

En égalant successivement à 0 chacun des facteurs, on trouve $x = 4$ et $x = 8$.

c) Ces deux valeurs divisent le domaine de la fonction en trois intervalles : $]-\infty; 4[$, $]4; 8[$ et $]8; \infty[$. Pour savoir si la pente de la tangente est positive ou négative dans ces intervalles, il suffit de calculer la pente pour une valeur quelconque dans chacun de ces intervalles. Dans l'intervalle $]-\infty; 4[$, calculons la pente de la tangente à $x = 0$. On trouve alors :

$$f'(0) = 3 \times 0^2 - 36 \times 0 + 96 = 96.$$

La pente de la tangente est positive, donc la fonction est croissante dans l'intervalle $]-\infty; 4[$.

En calculant la pente de la tangente à $x = 5$, on trouve :

$$f'(5) = 3 \times 5^2 - 36 \times 5 + 96 = -9.$$

La pente de la tangente est négative, donc la fonction est décroissante dans l'intervalle $]4; 8[$.

En calculant la pente de la tangente à $x = 10$, on trouve :

$$f'(10) = 3 \times 10^2 - 36 \times 10 + 96 = 36.$$

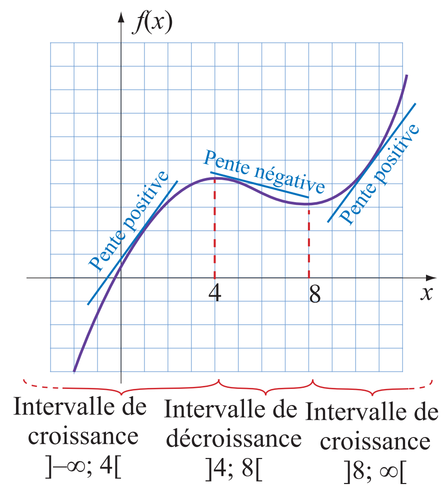
La pente de la tangente est positive, donc la fonction est croissante dans l'intervalle $]8; \infty[$. La représentation graphique de cette fonction est donnée ci-contre.

REMARQUE

Une équation quadratique peut être résolue par la décomposition en facteurs ou par l'expression générale :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

qui donne les deux racines de l'équation (dans l'exemple, ce sont les *zéros* de la fonction dérivée).



PROCÉDURE

Tangente horizontale

1. Trouver la fonction dérivée f'.
2. Trouver les zéros de la fonction dérivée (ce sont les abscisses des points cherchés).
3. Calculer l'ordonnée de chacun des points où la tangente a une pente nulle (c'est l'image par la fonction f des zéros de la fonction dérivée f').

PROCÉDURE

Intervalles de croissance et de décroissance (fonction polynomiale)

1. Trouver la fonction dérivée f'.
2. Trouver les zéros de la fonction dérivée.
3. Identifier les intervalles dont les frontières sont les zéros de la fonction dérivée.
4. Évaluer le taux de variation en un point de chacun des intervalles.
5. Analyser le résultat des calculs et en tirer les conclusions.

REMARQUE

On sait que l'équation d'une droite de pente a passant par un point $(c; f(c))$ est :

$$y - f(c) = a(x - c)$$

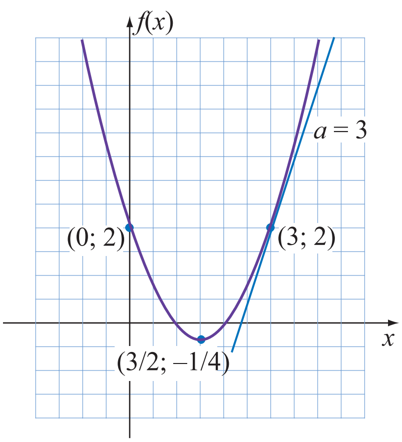
Lorsque la droite cherchée est la tangente à la courbe d'une fonction $f(x)$ en un point $(c; f(c))$, sa pente est $a = f'(c)$, on obtient par substitution la forme générale :

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

qui donne $y = f(c) + f'(c)(x - c)$.

GéométrieAnalytique02

DerivApplic06



Équation de la tangente

Déterminer l'équation de la tangente signifie Déterminer l'équation d'une droite dont la pente et un point sont connus. Il s'agit donc de trouver les paramètres a et b de l'équation $y = ax + b$.

EXEMPLE 3.1.4

Trouver l'équation de la droite tangente au graphique de la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

au point d'abscisse 3 et représenter graphiquement cette droite.

Solution

Le point d'abscisse 3 est le point $(3; f(3))$, or :

$$f(3) = (3)^2 - (3 \times 3) + 2 = 2.$$

On connaît donc un point de la droite tangente, et pour trouver son équation, on doit déterminer sa pente. Or, cette pente est le taux de variation ponctuel de la fonction. La fonction dérivée est :

$$f'(x) = 2x - 3.$$

et la pente de la tangente au point d'abscisse 3 est donnée par :

$$f'(3) = 2 \times 3 - 3 = 3.$$

Le taux de variation ponctuel au point d'abscisse 3 est égal à 3. On cherche donc l'équation de la droite passant par le point (3; 2) et dont la pente est 3. Puisque la pente est 3, on a $a = 3$. L'équation de la tangente est de la forme $y = 3x + b$. Pour trouver le paramètre b, on peut substituer les coordonnées du point (3; 2) dans la forme $y = 3x + b$ on obtient $2 = 3 \times 3 + b$ d'où l'on tire $b = -7$.

L'équation de la tangente est donc :

$$y = 3x - 7.$$

Équation de la normale

La droite perpendiculaire à la tangente en un point est appelée la **normale** en ce point. On a parfois à trouver l'équation de la normale. En particulier, dans un réservoir ou un piston, la pression s'exerce perpendiculairement à la paroi, c'est-à-dire selon la normale. De même, dans les phénomènes de réflexion, l'angle d'incidence et l'angle de réflexion sont déterminés à partir de la normale à la courbe. Trouver l'équation de la normale signifie trouver l'équation d'une droite dont un point est connu, le point de tangence, et dont la pente est obtenue en se servant du fait que le produit des pentes de droites perpendiculaires est égal à –1 ($a_1 a_2 = -1$).

PROCÉDURE

Équation de la tangente ou de la normale au point d'abscisse c

1. Calculer l'ordonnée du point en évaluant la fonction à $x = c$.
2. Trouver la fonction dérivée.
3. Calculer la pente de la tangente en évaluant $a_T = f'(c)$ ou la pente de la normale $a_N = -1/f'(c)$, selon le cas.
4. Trouver l'équation de la droite passant par le point $(c; f(c))$ et dont la pente a été calculée en 3.

EXEMPLE 3.1.5

Trouver l'équation de la droite normale au graphique de la fonction définie par $f(x) = 1/x$ au point d'abscisse 2 et représenter graphiquement cette droite.

Solution

DerivApplic07

Le point d'abscisse 2 est le point $(2; f(2))$, or $f(2) = 1/2$. Le point de tangence est donc $(2; 1/2)$. En dérivant, on trouve :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)=-1\times x^{-2}=\frac{-1}{x^2}.$$

La fonction dérivée est donc :

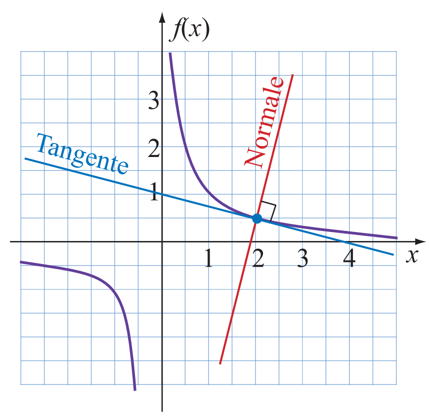
$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}.$$

La pente de la tangente au point d'abscisse 2 est :

$$a_T = f'(2)=\frac{-1}{2^2}=\frac{-1}{4}.$$

et la pente de la normale est :

$$a_N=\frac{-1}{f'(2)}=\frac{-1}{-1/4}=4.$$



On cherche donc l'équation de la droite de pente 4 passant par le point $(2; 1/2)$, ce qui donne :

$$y = 4x + b.$$

En substituant les coordonnées du point dans cette expression, on a :

$$\frac{1}{2}=4\times 2+b=8+b,$$

d'où l'on tire $b = -15/2$ ou $-7{,}5$. L'équation de la normale est donc :

$$y = 4x - 7{,}5.$$

3.2 EXERCICES

1. Soit la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x) = 2x^3 + 9x.$$

   a) Déterminer sa fonction dérivée.

   b) Calculer la pente de la tangente à la fonction f aux points d'abscisse –1, 0 et 2.

   c) Déterminer les points de tangence horizontale.

   d) Trouver dans quels intervalles la fonction est croissante, décroissante.

2. On lance un projectile verticalement avec une vélocité de 147 m/s. La position du projectile mesurée à partir du sol est décrite par :

$$s = 147t - 4{,}9t^2 \text{ mètres.}$$

   a) Déterminer la fonction dérivée. Que décrit cette fonction ?

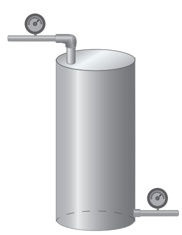
   b) Trouver le taux de variation instantané de s par rapport à t à 1 seconde. Quelle est la signification physique de ce taux de variation ?

   c) Trouver le taux de variation instantané de s par rapport à t à 20 secondes. Quelle est la signification physique de ce taux de variation ?

   d) À quel moment le projectile sera-t-il arrêté avant d'amorcer sa retombée ?

   e) À quel moment le projectile touchera-t-il le sol ? quelle sera sa vitesse d'impact au sol ?

3. L'ingénieur de la municipalité a estimé que le volume d'eau dans le réservoir municipal sur une période de 24 heures était donné par :



$$V = 2\,000 - 135t + 27t^2 - t^3 \text{ m}^3,$$

où t est le temps en heures mesuré à partir de minuit.

   a) Déterminer la fonction dérivée.

   b) En donner l'interprétation physique.

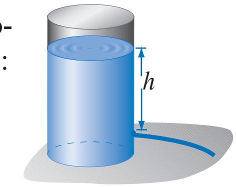
   c) Calculer le débit à $t = 1$ h et $t = 4$ h.

   d) À quel(s) moment(s) le débit est-il nul ?

   e) Calculer V lorsque le débit est nul.

   f) Durant quelles périodes le volume est-il croissant ? décroissant ?

4. L'équation de Bernoulli régissant le mouvement des liquides incompressibles décrit la vitesse d'éjection de l'eau par une petite ouverture aménagée dans la paroi d'un réservoir à une profondeur h de la façon suivante :



$$v = (2gh)^{1/2} \text{ m/s.}$$

En considérant $g = 9{,}82$ m/s^2,

$$v = 4{,}43\ h^{1/2} \text{ m/s.}$$

La vitesse d'éjection n'est pas constante; à mesure que le liquide est éjecté, la hauteur h diminue et la vitesse d'éjection également.

   a) Déterminer la fonction dérivée.

   b) Quelle est la signification physique de cette dérivée ?

   c) Calculer le taux de variation de la vitesse d'éjection lorsque la différence de hauteur est de 4 m.

   d) Calculer le taux de variation de la vitesse d'éjection lorsque la différence de hauteur est de 2 m.

   e) Calculer le taux de variation de la vitesse d'éjection lorsque la différence de hauteur est de 1 m.

5. Le volume de liquide dans un réservoir est décrit sur une période de 24 heures, par le modèle mathématique :

$$V(t) = 0{,}06t^3 - 2{,}22t^2 + 21{,}25t + 10 \text{ kL},$$

où V est le volume de liquide en kilolitres (kL) et t est le temps en heures (h) mesuré à partir de minuit.

   a) Déterminer la fonction dérivée.

   b) Quelle est la signification physique de cette dérivée ?

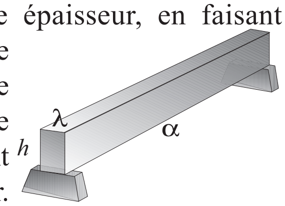
   c) Calculer le taux de variation à 5 h et à 10 h.

   d) À quel(s) moment(s) le taux de variation est-il nul ?

   e) Calculer le niveau de liquide lorsque le taux de variation est nul.

   f) Durant quelles périodes le niveau de liquide est-il croissant ? Décroissant ?

6. Une entreprise a mis au point un nouveau matériau pour fabriquer des poutres. On a soumis des poutres de même largeur, même épaisseur, en faisant varier la distance α entre les supports de la poutre pour déterminer la charge que ces poutres pouvaient supporter sans se déformer. On a établi que cette charge est décrite en fonction de la distance α entre les supports par :



$$C(\alpha)=\frac{96\,000}{\alpha}\text{ kg, où }\alpha\text{ est en mètres (m).}$$

a) Déterminer la fonction dérivée.

b) Quelle est la signification physique de cette dérivée ?

c) Calculer le taux de variation de la charge lorsque la distance entre les supports de la poutre est de 9 m. Interpréter ce résultat dans le contexte.

d) Calculer le taux de variation de la charge lorsque la distance entre les supports de la poutre est de 12 m, de 15 m.

7. Le département de la recherche de l'entreprise a également fait subir des tests à des poutres de même largeur, même longueur, mais de différentes épaisseurs h. On a ainsi établi que la charge que les poutres peuvent supporter est décrite en fonction de l'épaisseur h par

$C(h) = 6{,}5h^2$ kg, où h est en centimètres (cm).

a) Déterminer la fonction dérivée.

b) Quelle est la signification physique de cette dérivée ?

c) Calculer le taux de variation de la charge lorsque l'épaisseur de la poutre est de 9 cm. Interpréter ce résultat dans le contexte.

d) Calculer le taux de variation de la charge lorsque l'épaisseur est de 10 cm, de 12 cm.

8. Le département de la recherche de l'entreprise a également fait subir des tests à des poutres de même longueur, même épaisseur, mais de différentes largeurs λ. On a ainsi établi que la charge que les poutres peuvent supporter est décrite en fonction de la largeur λ par :

$C(\lambda) = 180\lambda$ kg, où λ est en centimètres (cm).

a) Déterminer la fonction dérivée.

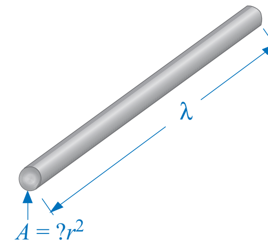
b) Quelle est la signification physique de cette dérivée ?

c) Calculer le taux de variation de la charge lorsque la largeur de la poutre est de 9 cm. Interpréter ce résultat dans le contexte.

9. On a déterminé que la résistance d'un fil électrique d'une longueur constante dépend de son diamètre, la relation est :

$$R(\alpha)=\frac{9\times10^{-2}}{\alpha^2}\ \Omega,$$

où α est en millimètres.



a) Déterminer la fonction dérivée.

b) Quelle est la signification physique de cette dérivée.

c) Calculer le taux de variation de la résistance pour un diamètre de 0,8 mm.

d) Calculer le taux de variation de la résistance pour un diamètre de 1,4 mm.

10 On a déterminé que la résistance d'un fil électrique de diamètre constant dépend de sa longueur, la relation est :

$R(\lambda) = 0{,}04\lambda\ \ \Omega$, où λ est en mètres (m).

a) Déterminer la fonction dérivée.

b) Quelle est la signification physique de cette dérivée.

c) Calculer le taux de variation de la résistance pour une longueur de 10 m, de 15 m.

11. Soit la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 3$.

a) Déterminer l'équation de la sécante passant par les points d'abscisses $x = 2$ et $x = 3$.

b) Déterminer l'équation de la tangente et de la normale au graphique de la fonction à $x = 2$.

c) Représenter graphiquement la fonction, la sécante, la tangente et la normale.

12. Soit la fonction $f(x) = 1/x$.

a) Déterminer l'équation de la sécante passant par les points d'abscisses $x = 1$ et $x = 2$.

b) Déterminer l'équation de la tangente et de la normale au graphique de la fonction à $x = 1$.

c) Représenter graphiquement la fonction, la sécante, la tangente et la normale.

13. Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x$.

a) Déterminer l'équation de la droite tangente au graphique de la fonction aux points d'abscisses –2 et 2.

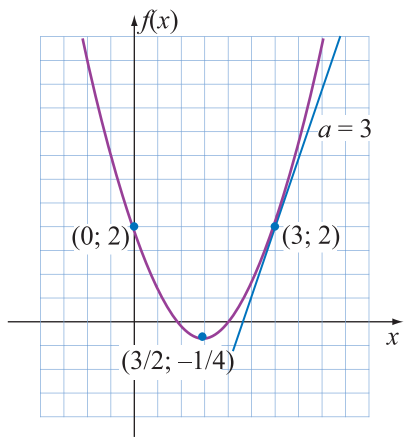
b) Représenter graphiquement la fonction et les tangentes.

c) Déterminer en quels points la tangente est horizontale.

3.3 Approximation et différentielle

Dans cette section, nous présentons les notions de modèle d'approximation affine et de différentielle.

Approximation affine



On applique une procédure d'approximation affine lorsque, connaissant le modèle mathématique décrivant un phénomène, on lui substitue un modèle affine pour calculer des correspondances dans le voisinage d'un point de la courbe. Considérons la figure ci-contre qui représente le graphique de la fonction polynomiale :

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 3 est :

$$y = 3x - 7.$$

Au voisinage du point de tangence, cette droite s'éloigne peu de la courbe. Dans une démarche d'approximation affine, on utilise cette équation de tangente pour calculer des correspondances au voisinage du point de tangence $(3; f(3)) = (3; 2)$.

Pour calculer des correspondances au voisinage d'un autre point de la courbe, il faut déterminer un autre modèle affine, c'est-à-dire l'équation de la tangente en cet autre point. L'approximation affine au voisinage d'un point $(c; f(c))$ consiste donc à déterminer l'équation de la tangente en ce point. Le modèle affine local est alors :

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$

DerivApplic08

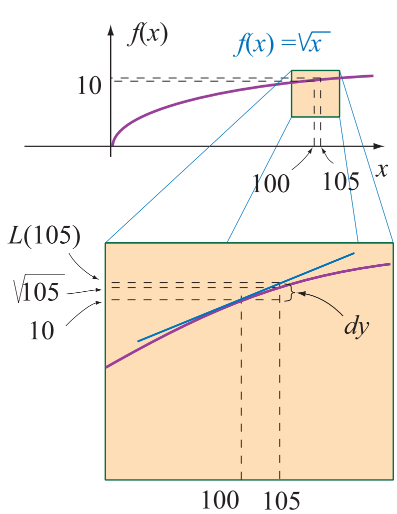
EXEMPLE 3.3.1

Estimer la valeur de $\sqrt{105}$ par approximation affine.

Solution

Pour estimer cette valeur par approximation affine, on considère la fonction :

$$f(x) = \sqrt{x}.$$



et un point de la courbe assez rapproché de $\sqrt{105}$ mais dont on peut facilement extraire la racine. On prendra donc le point d'abscisse 100. On a alors :

$$f(100) = \sqrt{100} = 10.$$

Déterminons la fonction dérivée :

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

En évaluant celle-ci à $x = 100$, on obtient :

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{100} = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20}.$$

Le modèle affine est :

$$L(x) = f(100) + f'(100) \times (x - 100),$$

soit :

$$L(x) = 10 + \frac{1}{20}(x - 100).$$

En évaluant pour $x = 105$, on obtient :

$$L(105) = 10 + \frac{1}{20}(105 - 100) = 10 + \frac{5}{20} = 10 + \frac{1}{4} = 10{,}25.$$

On estime donc que $\sqrt{105} \approx 10{,}25$.

REMARQUE

En extrayant la racine de 105 avec une calculatrice, on obtient :

10,24695...

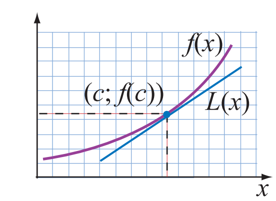
Le modèle d'approximation affine donne un résultat intéressant.

Approximation affine d'une fonction dérivable

Soit f, une fonction dérivable en $x = c$. La fonction d'**approximation affine** de f au point $(c; f(c))$ est la fonction $L(x)$ définie par :

$$L(x) = f(c) + f'(c)\,(x - c).$$

Le point $(c; f(c))$ est le **centre de l'approximation**.



EXEMPLE 3.3.2

Un réservoir est muni d'un dispositif électronique qui contrôle l'ouverture d'une vanne dès que le volume de liquide est inférieur à 5 litres. Le volume est décrit par :

$$V(t) = \frac{60t + 5}{t + 1} \text{ L.}$$

où t est le temps en minutes mesuré à partir de la mise en marche du système de remplissage.

a) Déterminer un modèle d'approximation affine du volume de liquide en prenant $t = 5$ min comme centre d'approximation.

b) Utiliser ce modèle pour estimer le volume de liquide dans le réservoir 7 minutes après la mise en marche du système de remplissage.

c) Estimer l'augmentation du volume de liquide dans le réservoir entre la cinquième et la huitième minute.

DerivApplic09SCN

REMARQUE

Dans l'exemple 3.3.1, le centre de l'approximation est (100; 10). On a choisi ce point comme centre parce que 100 est la valeur la plus proche de 105 dont on peut facilement extraire la racine. Un point moins rapproché de $x = 105$ aurait donné une moins bonne précision. Ainsi, en considérant plutôt le point (121; 11) comme centre d'approximation, on a $f'(a) = 1/22$ et la fonction d'approximation affine est :

$$L(x) = f(121) + \frac{1}{22}(x - 121)$$

On trouve alors $L(105) = 10{,}272727...$

Solution

a) Le modèle d'approximation affine est de la forme générale :

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c) \text{ ou } L(t) = V(c) + V'(c)(t - c).$$

Puisque $V'(t) = \dfrac{55}{(t+1)^2}$, on a, dans le contexte du problème,

$c = 5$, $f(c) = V(5) = 305/6 = 50{,}83$ et $f'(c) = V'(5) = 55/36$.

En substituant ces valeurs dans la forme générale, on obtient :

$$L(t) = \frac{305}{6} + \frac{55}{36}(t - 5) \text{ L.}$$

b) Pour estimer cette valeur par approximation affine, on calcule $L(7)$. Cela donne :

$$L(7) = \frac{305}{6} + \frac{55}{36}(7 - 5) = \frac{305}{6} + \frac{55}{36} \times 2 = \frac{970}{18} = 53{,}88...$$

On estime qu'à 7 min le volume de liquide est d'environ 53,9 L.

c) On peut estimer la variation Δy de la variable dépendante d'une fonction à l'aide de la fonction d'approximation affine. Dans le contexte du problème posé, on peut estimer la variation du volume de liquide pour un temps autour de 5 minutes en considérant :

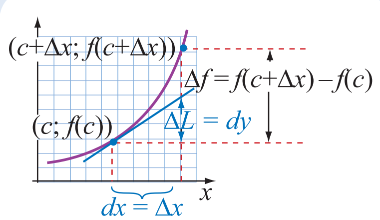
$L(t) - V(c) = V'(c)\ (t - c)$ qui donne $L(t) - \frac{305}{6} = \frac{55}{36}(t-5)$ L.

Ainsi, à $t = 8$ min, on a $L(8) - \frac{305}{6} = \frac{55}{36}(8-5) = \frac{55}{12} = 4{,}583...$

On peut donc estimer que durant cet intervalle de temps, l'augmentation du volume de liquide est d'environ 4,6 L.

Différentielle

Dans l'exemple précédent, la variation réelle ΔV du volume est la différence des images, soit $\Delta V = V(8) - V(5) = 3{,}05$ L On a estimé cette valeur en calculant $L(8) - V(5) = 4{,}6$ L. Cette estimation est appelée une **différentielle** et est notée dV.



Différentielle

Soit f, une fonction dérivable définie par $y = f(x)$. Une petite variation de la variable indépendante est appelée **différentielle** de x et notée dx. La variation correspondante de la variable dépendante est appelée **différentielle** de y et notée dy. La différentielle de y au voisinage d'un point d'abscisse x peut être estimée par :

$$dy = f'(x)\ dx.$$

La différentielle dy est une variable dépendante, elle dépend de x et de dx.

La variation réelle Δy au voisinage de c est la différence des images entre les points $(c; f(c))$ et $(c + \Delta x; f(c + \Delta x))$, soit :

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c).$$

En pratique, on calcule une valeur approchée de cette variation par la différentielle, soit :

$$dy = \Delta L = L(c + \Delta x) - f(c) = f'(c)\ dx.$$

Lorsque dx est petit, la valeur estimée, dy, est assez proche de la variation réelle, Δy.

Différentielle et calcul d'incertitude

Une des applications importantes de la différentielle est le calcul d'incertitude. Lorsqu'on mesure une grandeur physique, il y a toujours une incertitude sur cette mesure qui se répercute dans les calculs et il faut souvent déterminer l'incertitude sur le résultat de ce calcul. L'incertitude peut être donnée en grandeur absolue ou en pourcentage. On peut également, avec la différentielle, déterminer la précision avec laquelle il faut prendre la mesure pour que l'incertitude sur le résultat du calcul ne dépasse pas un pourcentage donné.

EXEMPLE 3.3.3

On mesure l'arête d'un cube et on obtient 15 cm.

a) Déterminer le volume de ce cube.

b) Si la mesure de l'arête est exacte à 2 % près, déterminer l'incertitude sur le calcul du volume.

c) Déterminer l'incertitude relative exprimée en pourcentage.

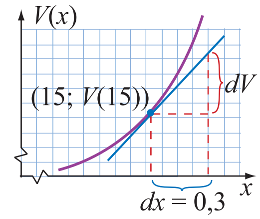
DerivApplic10

REMARQUE

Le volume d'un cube est donné par :

$$V = x^3$$

où x est la mesure de l'arête. Graphiquement, le volume peut être représenté en fonction de la longueur de son arête de la façon suivante :



L'incertitude dx sur la mesure de l'arête entraîne une incertitude sur le calcul du volume qui est approximée par la différentielle dV. L'incertitude relative est le rapport dV/V.

Solution

a) Le volume du cube est donné par $V = x^3$, où x est la longueur de l'arête. On trouve donc :

$$V = (15)^3 = 3375 \text{ cm}^3.$$

b) Si la mesure de l'arête est exacte à 2 % près, cela signifie qu'il y a une incertitude de 2 % × 15 = 0,3 cm sur la longueur de l'arête. La différentielle du volume est alors donnée par :

$$dV = V'(x)\, dx = 3x^2\, dx.$$

où x = 15 cm et dx = 0,3 cm. En substituant, on obtient :

$$dV|_{15;\,0,3} = 3 \times 15^2 \times 0,3 = 202,5.$$

On peut donc conclure que l'incertitude sur le calcul du volume est de ±202,5 cm^3.

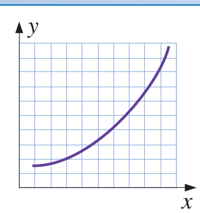
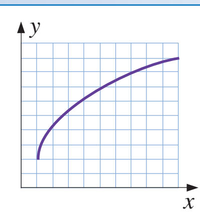
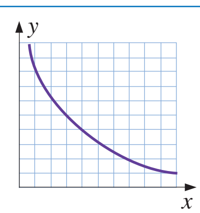
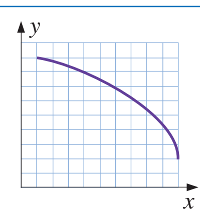
c) L'incertitude relative est le rapport de l'incertitude sur le volume calculé, ce qui donne :

$$\frac{dV}{V} = \frac{202,5}{3375} = 0,06.$$

On a donc une incertitude relative de 6%.

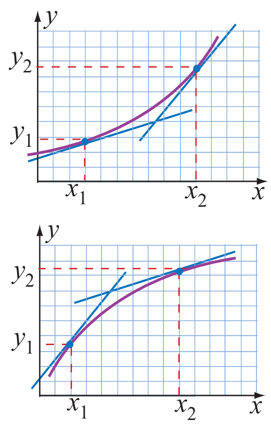
Notion de concavité

La valeur estimée par la différentielle peut être plus grande ou plus petite que la variation réelle selon la forme de la courbe. Les courbes (ou portions de courbes) peuvent avoir seulement quatre formes et celles-ci sont décrites par les notions de croissance et de concavité. Ces formes et leur description verbale sont données dans le tableau suivant.

TABLEAU SYNTHÈSE		
	Concave vers le haut	Concave vers le bas
Croissante		
Décroissante		

Caractéristique algébrique de la concavité

Pour caractériser algébriquement la notion de concavité, on doit également avoir recours au taux de variation de la fonction. Ce que l'on constate, en observant une portion de courbe concave vers le haut, c'est que le taux de variation augmente lorsque la valeur de la variable indépendante augmente, c'est-à-dire si on parcourt la courbe de la gauche vers la droite. De plus, lorsqu'on observe une portion de courbe concave vers le bas, le taux de variation diminue lorsque la valeur de la variable indépendante augmente.



Concavité et taux de variation

- Une fonction est **concave vers le haut** sur un intervalle si son taux de variation ponctuel augmente lorsque la valeur de la variable indépendante augmente dans cet intervalle. Graphiquement, la tangente est toujours au-dessous de la courbe dans cet intervalle.

- Une fonction est **concave vers le bas** dans un intervalle si son taux de variation ponctuel diminue lorsque la valeur de la variable indépendante augmente dans cet intervalle. Graphiquement, la tangente est toujours au-dessus de la courbe dans cet intervalle.

Utilisons la notion de concavité de la courbe dans l'analyse du mouvement d'un mobile en déplacement rectiligne.

EXEMPLE 3.3.4

DerivApplic11SCN

La position d'un mobile en mouvement par rapport à un point fixe est donnée par :

$$s(t) = t^3 - 18t^2 + 96t \text{ m.}$$

a) Calculer la position du mobile au temps 0.

b) Déterminer la fonction décrivant la vitesse du mobile au temps t.

c) Trouver la fonction décrivant l'accélération du mobile au temps t.

d) Quelle est la vitesse du mobile au temps 0? Quelle est son accélération?

e) Déterminer à quels moments le mobile est arrêté. Indiquer sa position et son accélération à ces instants.

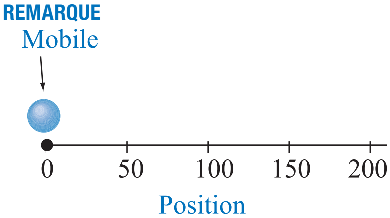
f) Expliquer pourquoi le mobile change de position entre ces deux instants puisque sa vitesse est nulle.

g) Déterminer à quel moment l'accélération du mobile est nulle. Indiquer la position et la vitesse du mobile en cet instant.

h) Représenter graphiquement la fonction décrivant la position du mobile, la fonction décrivant sa vitesse et la fonction décrivant son accélération dans l'intervalle [0; 10].

i) Décrire le comportement du mobile dans l'intervalle de temps [0; 10].

REMARQUE



Au temps 0 s, le mobile est au point de référence puisque $s(0) = 0$.

■ ***Solution***

a) Au temps $t = 0$, la position du mobile est donnée par $s(0)$, on a :

$$s(0) = 0^3 - 18 \times 0^2 + 96 \times 0 = 0 \text{ m.}$$

La distance du mobile au point fixe servant d'origine étant nulle, le mobile est au point d'origine.

b) La vitesse est le taux de variation de la position par rapport au temps; elle est donc donnée par la dérivée de la fonction décrivant la position. La fonction s est un polynôme et sa dérivée est :

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 36t + 96 \text{ m/s.}$$

c) L'accélération est le taux de variation de la vitesse; elle est donc donnée par la dérivée de la fonction vitesse (ou la dérivée seconde de la fonction position, nous la noterons a ou s''). On a donc :

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 36 \text{ m/s}^2.$$

d) Au temps 0, la vitesse du mobile est :

$$v(0) = s'(0) = 3 \times 0^2 - 36 \times 0 + 96 = 96 \text{ m/s.}$$

Son accélération est :

$$a(0) = v'(0) = s''(0) = 6 \times 0 - 36 = -36 \text{ m/s}^2.$$

e) Le mobile est arrêté lorsque sa vitesse est nulle. On cherche donc t tel que :

$$3t^2 - 36t + 96 = 0.$$

Il s'agit d'une équation quadratique que l'on peut résoudre par décomposition en facteurs, ce qui donne :

$$(3t - 12)(t - 8) = 0.$$

En égalant successivement à 0 chacun des facteurs, on trouve $t = 4$ s et $t = 8$ s. Le mobile est donc arrêté à 4 secondes et à 8 secondes.

On peut trouver la position à l'aide de la fonction s, ce qui donne à $t = 4$ s :

$$s(4) = 4^3 - 18 \times 4^2 + 96 \times 4 = 160 \text{ m.}$$

L'accélération à cet instant est :

$$a(4) = 6 \times 4 - 36 = -12 \text{ m/s}^2.$$

À 8 secondes, on a :

$$s(8) = 8^3 - 18 \times 8^2 + 96 \times 8 = 128 \text{ m,}$$

$$a(8) = 6 \times 8 - 36 = 12 \text{ m/s}^2.$$

f) Le mobile est arrêté à 4 s, mais son accélération est -12 m/s^2; il va donc se mettre en mouvement pour se rapprocher du point fixe. Pour qu'il s'arrête à nouveau à 8 s, il faut que l'accélération change de sens durant l'intervalle [4; 8]. Cette accélération s'opposera au mouvement et arrêtera à nouveau le mobile. Pour que l'accélération change de sens, c'est-à-dire passe de négative à positive, elle doit s'annuler durant l'intervalle.

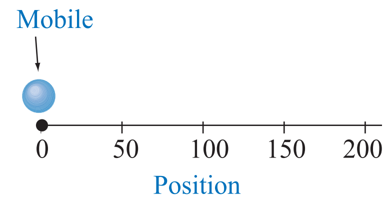
g) On cherche l'instant t pour lequel :

$$a(t) = 6t - 36 = 0 \text{ m/s}^2.$$

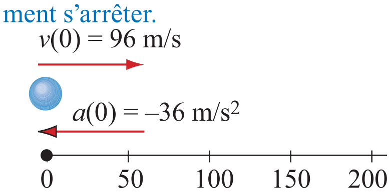
Ce qui donne $t = 6$ s.

On peut trouver la position à l'aide de la fonction s, ce qui donne :

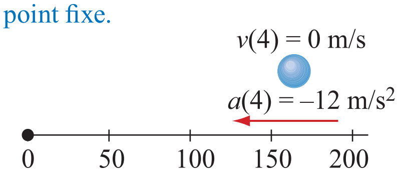
$$s(6) = 6^3 - 18 \times 6^2 + 96 \times 6 = 144 \text{ m.}$$



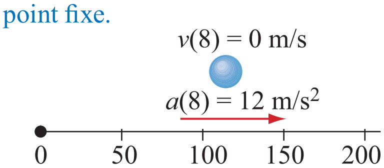
Au temps 0 s, le mobile est au point fixe; il a une vitesse de 96 m/s. Il se déplace donc vers la droite. Son accélération est de -36 m/s^2. L'accélération est de signe contraire à la vitesse; elle a donc pour effet de diminuer la vitesse du mobile qui va éventuellement s'arrêter.



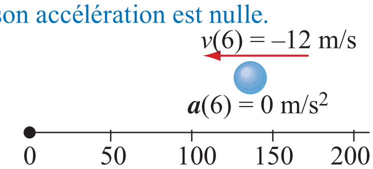
Au temps 4 s, le mobile est à 160 m à droite du point fixe. Il est arrêté mais son accélération est de -12 m/s^2. L'accélération va avoir pour effet de mettre le mobile en mouvement vers la gauche. Il va donc s'approcher du point fixe.



Au temps 8 s, le mobile est à 128 m à droite du point fixe. Il est arrêté mais son accélération est de 12 m/s^2. L'accélération va avoir pour effet de mettre le mobile en mouvement vers la droite. Il va donc s'éloigner du point fixe.



Au temps 6 s, le mobile est à 144 m à droite du point fixe. Sa vitesse est -12 m/s. Il s'approche du point fixe et son accélération est nulle.



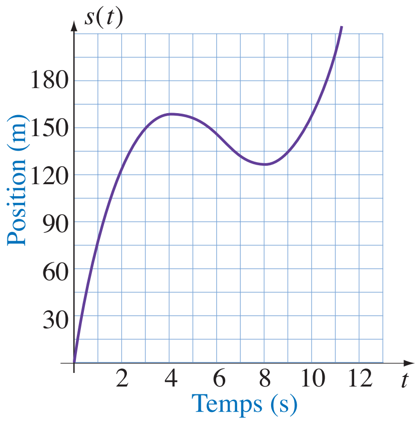
La vitesse est :

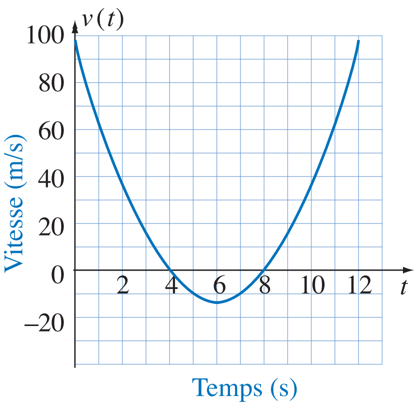
$$v(6) = 3 \times 6^2 - 36 \times 6 + 96 \text{ m/s} = -12 \text{ m/s}.$$

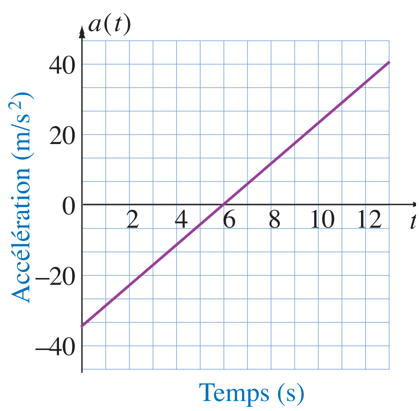
h) Le tableau ci-dessous contient les valeurs calculées pour analyser la trajectoire du mobile. On peut, à l'aide de ces données, esquisser le graphique des différentes fonctions en cause dans cette analyse : la fonction décrivant la position, la fonction décrivant la vitesse et la fonction décrivant l'accélération.

COMPORTEMENT DU MOBILE

t (s)	0	2	4	6	8	10
s (m)	0	128	160	144	128	160
v (m/s)	96	36	0	–12	0	36
a (m/s^2)	–36	–24	–12	0	12	24



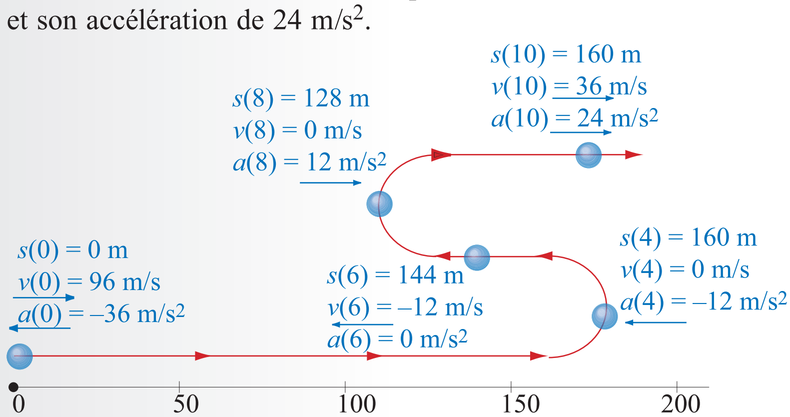




En comparant ces graphiques, on voit bien que le mobile s'éloigne du point fixe lorsque la vitesse est positive et qu'il s'en rapproche lorsque la vitesse est négative. La tangente à la fonction décrivant la position est horizontale lorsque la vitesse est nulle.

De la même façon, lorsque l'accélération est négative, la vitesse diminue et lorsque l'accélération est positive, la vitesse augmente. La tangente à la fonction décrivant la vitesse est horizontale lorsque l'accélération est nulle.

i) Le mobile part du point de référence à 0 s, il se dirige vers la droite mais il est décéléré et s'arrête à 4 s. Il a alors parcouru 160 m. Puisqu'il a toujours une accélération négative, il va se mettre en mouvement à nouveau pour revenir vers le point fixe. Son accélération change de sens à 6 s. Il est alors à 144 m du point fixe et s'en approche à une vitesse de 12 m/s. L'accélération étant maintenant positive, elle est de sens contraire au déplacement et le mobile va ralentir à nouveau et s'arrêter à 8 s. Il est alors à 128 m du point fixe et a une accélération de 12 m/s^2. Il va repartir vers la droite puisque son accélération est positive. Il ne s'arrêtera plus car son accélération s'annule seulement à 6 s et l'accélération et la vitesse sont de même sens à partir de ce moment. À 10 s, il est à 160 m du point fixe, sa vitesse est de 36 m/s et son accélération de 24 m/s^2.



REMARQUE

Lorsque la dérivée seconde qui décrit l'accélération est négative, la vitesse diminue. La dérivée première est donc décroissante et la courbe représentant la fonction est concave vers le bas.

Lorsque l'accélération est positive, la vitesse augmente. La dérivée première est donc croissante et la courbe $s(t)$ est concave vers le haut.

PROCÉDURE

Analyse de la trajectoire rectiligne d'une particule

1. Trouver la dérivée première $s\,'(t)$ (c'est la fonction décrivant la vitesse au temps t).
2. Trouver la dérivée seconde $s\,''(t)$ (c'est la fonction décrivant l'accélération au temps t).
3. Trouver à quels moments la vitesse est nulle (ce sont les zéros de la dérivée première).
4. Trouver à quels moments l'accélération est nulle (ce sont les zéros de la dérivée seconde).
5. Déterminer, en respectant l'ordre de la droite réelle, les intervalles délimités par les zéros de la dérivée première et de la dérivée seconde.
6. Évaluer la dérivée première et la dérivée seconde dans chacun des intervalles.
7. Interpréter les résultats selon le contexte.

Esquisse du graphique de la dérivée

On détecte intuitivement des liens très étroits entre le graphique d'une fonction et sa dérivée. Ainsi, lorsque la fonction est croissante, la dérivée est positive et lorsque la fonction est décroissante, sa dérivée est négative. De plus, lorsque la fonction est concave vers le bas, la dérivée est décroissante, par conséquent, la dérivée seconde est négative. Lorsque la fonction est concave vers le haut, la fonction dérivée est croissante par conséquent, la dérivée seconde est positive.

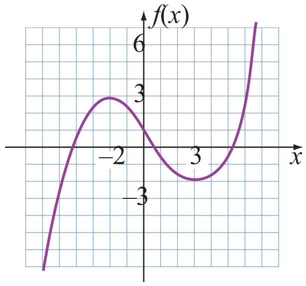
DerivApplic12

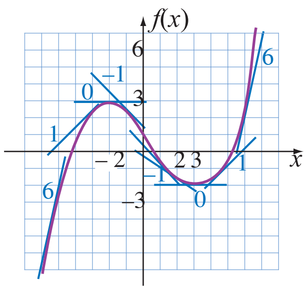
L'analyse du graphique d'une fonction permet d'esquisser le graphique de la fonction dérivée en tenant compte de ces constatations intuitives. La procédure que nous allons suivre est également applicable pour esquisser le graphique de la dérivée seconde après avoir esquissé celui de la dérivée première.

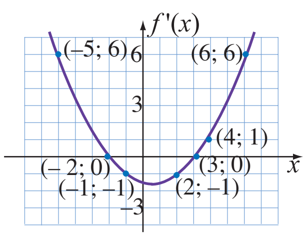
PROCÉDURE

Esquisse du graphique de la fonction dérivée

1. Identifier les zéros de la fonction dérivée et les situer dans le système d'axes. Ce sont les points où la tangente est horizontale.
2. Identifier les asymptotes verticales de la dérivée, si elle en a (les asymptotes verticales de la fonction sont des asymptotes verticales de la dérivée, mais celle-ci peut en avoir d'autres).
3. Identifier les intervalles où la dérivée est positive et les intervalles où la dérivée est négative (ce sont les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction).
4. Trouver l'abscisse des valeurs optimales locales de la dérivée (ce sont les abscisses des points où la tangente est la plus abrupte).
5. Utiliser ces renseignements pour esquisser le graphique de la dérivée.







EXEMPLE 3.3.5

Le graphique ci-contre est celui d'une fonction *f*. Construire, à l'aide de points stratégiques, le graphique de sa fonction dérivée.

Solution

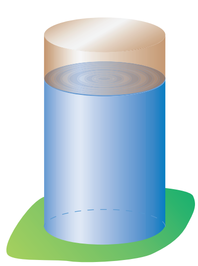
On peut d'abord identifier les points où la tangente est horizontale; ce sont les points d'abscisse –2 et 3. La fonction dérivée s'annule en chacun de ces points; ce sont donc les zéros de la fonction dérivée.

Dans l'intervalle]–∞; –2], la pente de la tangente à la courbe est positive et sa valeur diminue lorsque le point de tangence considéré s'approche de –2.

Dans l'intervalle [–2; 3], la pente de la tangente à la courbe est négative puisque la fonction est décroissante. Sa valeur est proche de 0 au voisinage de –2 et elle diminue en s'éloignant de –2. La valeur se rapproche à nouveau de 0 lorsque le point de tangence considéré s'approche de 3. Le point où la tangente semble être la plus abrupte est le point d'abscisse 1/2. Puisque la fonction est décroissante dans l'intervalle, la dérivée atteint donc une valeur minimale dans cet intervalle à $x = 1/2$.

Dans l'intervalle [3; ∞[, la pente de la tangente est positive et sa valeur augmente lorsque le point de tangence considéré s'éloigne de 3. On peut estimer graphiquement la valeur de la pente en différents points de la courbe pour avoir une idée de l'ordre de grandeur des images par la fonction dérivée des abscisses de ces points. En reportant ces valeurs sur un papier quadrillé et en esquissant le graphique suggéré par ces points, on a la représentation ci-contre.

Application, quotient de fonctions



EXEMPLE 3.3.6

Un réservoir d'eau est muni d'un dispositif électronique qui contrôle l'ouverture d'une vanne dès que le volume de liquide est inférieur à 5 litres. Le volume est décrit par

$$V(t) = \frac{20t+5}{t+1} \text{ L},$$

où t est le temps en secondes mesuré à partir du déclenchement du système de remplissage.

a) Déterminer la fonction décrivant le débit durant la période de remplissage.

b) Calculer le débit à l'instant où le système se met en marche.

c) Calculer le débit 5 secondes après la mise en marche; 10 secondes après la mise en marche.

d) Que constatez-vous en observant ces différents taux?

Solution

a) Le volume d'eau est décrit par une fonction rationnelle $f = u/v$ où

$$u = 20t + 5 \text{ et } v = t + 1$$

Puisque $u' = 20$ et $v' = 1$,

on trouve

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{20 \times (t+1) - (20t+5) \times 1}{(t+1)^2}$$

$$= \frac{20t + 20 - 20t - 5}{(t+1)^2} = \frac{15}{(t+1)^2}.$$

La fonction dérivée, ou fonction débit, est donc

$$D(t) = V'(t) = \frac{15}{(t+1)^2} \text{ L/s.}$$

La dérivée n'existe pas à $t = -1$, mais cette valeur ne fait pas partie du domaine de validité du modèle.

b) Au temps $t = 0$ s, le débit est

$$D(0) = \frac{15}{(0+1)^2} = 15 \text{ L/s.}$$

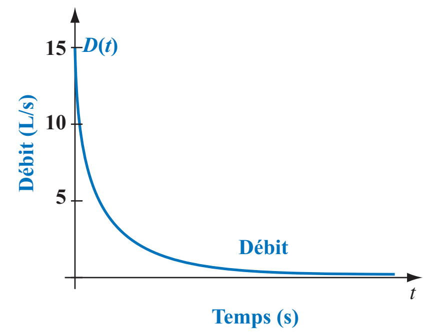
c) Au temps $t = 5$ s, le débit est

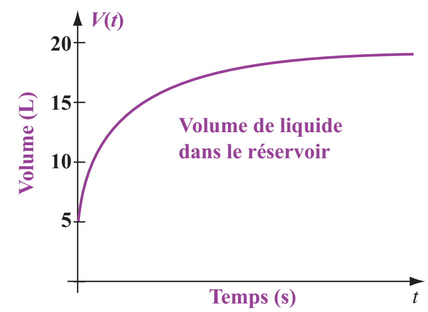
$$D(5) = \frac{15}{(5+1)^2} = \frac{15}{36} = 0{,}417 \text{ L/s.}$$

Au temps $t = 10$ s, le débit est

$$D(10) = \frac{15}{(10+1)^2} = \frac{15}{121} = 0{,}124 \text{ L/s.}$$

d) On constate que le débit diminue à mesure que le réservoir se remplit.





Le débit diminue à mesure que le réservoir se rempli.

Retour sur l'apprentissage

En généralisant à un point $(x; f(x))$ l'approche développée pour déterminer le taux de variation ponctuel en un point $(c; f(c))$, nous avons obtenu la fonction dérivée. Cette fonction dérivée, notée f', est la fonction qui décrit le taux de variation ponctuel en un point d'abscisse x de la fonction f. Cela signifie qu'il suffit de déterminer la fonction dérivée et de calculer l'image de l'abscisse d'un point par cette fonction pour connaître le taux de variation ponctuel en ce point. Graphiquement, ce taux de variation ponctuel est la pente de la tangente à la courbe en ce point.

À l'aide de la fonction dérivée, on peut rapidement repérer les points où la tangente est horizontale puisqu'en ces points le taux de variation ponctuel est nul. On peut alors déterminer les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas de la fonction. Cela permet une analyse de l'évolution du phénomène modélisé à l'aide de cette fonction.

L'éventail de fonctions simples que l'on peut actuellement dériver rapidement est assez restreint. Il nous faudra dans le prochain chapitre élargir notre éventail de fonctions simples en déterminant la dérivée des fonctions $f(x) = e^x$ et $f(x) = \ln x$ ainsi que des fonctions trigonométriques.

Un peu *d'histoire*

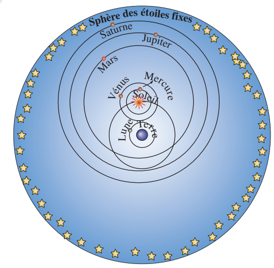
LES CONIQUES DEVIENNENT DES TRAJECTOIRES

Le modèle géocentrique imaginé par Eudoxe et adopté par Aristote a subi diverses modifications pour « sauver les apparences » c'est-à-dire pour tenir compte des phénomènes observés sans renier les postulats sur lesquels était fondé le système. Apollonius, Hipparque et Ptolémée ont introduit divers artifices : l'excentricité, l'épicycle, le déférent et le point équant, pour rendre compte des irrégularités des mouvements planétaires. Au Moyen Âge, ce système est adopté par l'Église qui en fait un dogme de foi. Avec le temps, le système est devenu très complexe et les calculs aussi. Cette complexité suscite le questionnement chez les savants, même les plus croyants.

Le modèle de Copernic simplifie l'explication de certains phénomènes célestes, comme le mouvement rétrograde des planètes. Cependant, Copernic conserve les mouvements circulaires à vitesse constante et pour expliquer les mouvements planétaires, il a recours lui aussi aux épicycles et déférents. Globalement, son système est aussi complexe que celui hérité de Ptolémée. De plus, comme Jean Buridan l'a fait remarquer, la rotation diurne de la Terre n'est pas compatible avec la théorie du mouvement d'Aristote. Selon cette théorie, l'objet qu'on laisse tomber du sommet d'une tour devrait tomber en s'éloignant de la tour si celle-ci est entraînée par la rotation de la Terre. Le mouvement orbital de la Terre n'est pas lui non plus compatible avec la théorie du mouvement d'Aristote. Selon cette théorie, le corps lourd (grave) que l'on lance se déplace plus vite et plus loin que le corps léger ayant reçu la même impulsion. Par conséquent, si la Terre était en mouvement dans l'espace, les corps légers à sa surface devraient tomber dans son sillage puisqu'ils ne peuvent se déplacer aussi vite que la Terre qui est beaucoup plus lourde.

L'implantation d'un nouveau paradigme ne saurait être le fait d'un seul individu, il faut que d'autres scientifiques adoptent le nouveau mode de pensée, l'approfondissent, l'ajustent et construisent de nouvelles représentations des phénomènes familiers.

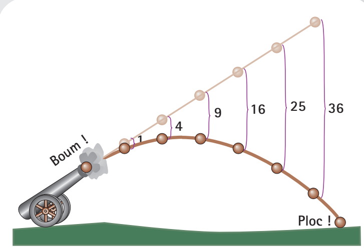
Lequel des deux modèles est conforme à la réalité ? L'astronome danois Tycho Brahe (NH Brahe01, Observations de Tycho) imagine une méthode pour les départager en mesurant la parallaxe de Mars (NH Brahe02). Contrairement à ses attentes, ses mesures désignent le modèle de Copernic. Ne pouvant se résoudre, par conviction religieuse, à envisager que la Terre ne puisse être au centre de l'Univers, il élabore un modèle dans lequel les cinq planètes connues sont en révolution sur des orbites circulaires centrées au Soleil. La Lune et le Soleil sont en révolution sur des orbites circulaires centrées sur la Terre. Tycho Brahe est obligé de renoncer au concept de sphères de cristal qui, comme des pelures d'oignon, entourent la Terre et sont entraînées par la rotation de la sphère des fixes dont le mouvement serait dû à un moteur externe, moteur que les théologiens ont associé à Dieu. Ne possédant pas la formation mathématique nécessaire pour démontrer la validité de son modèle, Brahe fait appel à Johannes Kepler (NH Kepler01, Kepler_Modèle). Celui-ci se rend à Prague en 1601 pour analyser les observations de Brahe qui meurt peu après l'arrivée de Kepler. Dans son étude de la trajectoire de Mars, Kepler constate qu'il doit tenir compte de la déviation des rayons lumineux par l'atmosphère terrestre dans l'interprétation des observations de Tycho Brahe (NH Kepler02, Kepler_Lois). Il étudie alors l'optique et s'intéresse à la normale à une courbe conique qui est la droite à partir de laquelle est décrit le comportement de la lumière dans les phénomènes de réflexion et de réfraction.



Modèle de Tycho Brahe

En poursuivant son étude de l'orbite de Mars, Kepler constate que celle-ci ne peut être circulaire et énonce ses trois lois du mouvement planétaire dans lesquels les orbites planétaires sont des ellipses (NH Kepler03). La direction du mouvement devient la tangente à la trajectoire, mais comment déterminer la tangente en un point quelconque d'une ellipse ?

Pendant que Kepler s'intéresse à l'orbite de Mars, Galilée (NH Galilée01) remet en question la théorie du mouvement d'Aristote qui constitue un argument important en défaveur de l'héliocentrisme . Galilée comprend qu'il faut développer une théorie du mouvement en accord avec l'héliocentrisme. Il s'attaque donc à ce problème en développant une approche expérimentale qui ouvre la voie à la science moderne (NH Galilée02, Galilée-Chute des corps, Galilée-Composition des mouvements, Galilée_Projectile).



Trajectoire parabolique d'un boulet de canon

Galilée comprend aussi qu'il faut, comme Brahe l'a fait, scruter les cieux pour détecter des preuves de la justesse du modèle héliocentrique. Entendant parler d'une lunette présentée à Venise par un Hollandais, il comprend l'avantage que cela représente par rapport aux techniques traditionnelles d'observation. Il construit des « lunettes » à l'aide desquelles il fait plusieurs observations confirmant le modèle héliocentrique (NH Galilée03, Galilée-Observations), comme les phases de Vénus, les satellites de Jupiter et la surface accidentée de la Lune qui ne peut plus être considérée comme une sphère parfaite tel que le prétendaient les aristotéliciens.

3.4 Exercices

1. Estimer la valeur des expressions suivantes par approximation affine.

   a) $\sqrt{125}$ c) $\sqrt[3]{68}$
   b) $\sqrt{119}$ d) $\sqrt[3]{60}$

2. On mesure l'arête d'un réservoir cubique et on obtient 270 cm.

   a) Déterminer le volume en centimètres cubes de ce réservoir.
   b) Si la mesure de l'arête est exacte à 1 % près, déterminer l'incertitude sur le calcul du volume.
   c) Déterminer l'incertitude relative exprimée en pourcentage.

3. Le médecin Jean-Louis Marie Poiseuille (1799-1869), auteur de mémoires sur la circulation sanguine, a déterminé, en 1844, les caractères essentiels de la loi régissant l'écoulement laminaire des fluides visqueux dans les tuyaux cylindriques. Il a ainsi déterminé que la vitesse du sang au centre d'une artère de rayon r est modélisée par :
$$v(r) = cr^2,$$
où c est une constante. Déterminer l'incertitude en pourcentage que l'on commet en calculant la vitesse à partir de ce modèle si l'incertitude sur la mesure de r est de 10%

4. Poiseuille a également modélisé par $V(r) = kr^4$, le volume de fluide circulant dans un petit tube sous une pression fixe, par unité de temps. On utilise cette formule en médecine pour déterminer l'augmentation du débit sanguin résultant d'une dilatation d'une artère obstruée. Déterminer la variation approximative du débit sanguin si on augmente le rayon de 10%.

5. La période d'oscillation d'un pendule est donnée par :
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$
où T est la période en secondes et L, la longueur (m) du pendule et g = 9,8 m/s^2 est l'accélération gravitationnelle. Quelle est la variation approximative de la période si on augmente la longueur du pendule de 5%.

6. Selon la relation de Boyle, le volume V occupé par un gaz est inversement proportionnel à la pression p exercée sur celui-ci, $V = k/p$. Déterminer la variation approximative du volume si on augmente la pression de 10%.

7. La position par rapport à un point fixe d'une particule excitée électriquement est donnée par
$s(t) = t^3 - 9t^2$ m où t est en secondes.

   a) Déterminer la fonction décrivant la vitesse de la particule au temps t.
   b) Calculer la vitesse à 0 s, 1 s et 7 s.
   c) Déterminer la fonction décrivant l'accélération de la particule.
   d) Calculer l'accélération à 0 s, 1 s et 7 s.
   e) Décrire la trajectoire de la particule.

8. La position par rapport à un point fixe d'une particule excitée électriquement est donnée par :
$s(t) = t^3 - 12t^2$ m où t est en secondes.

   a) Déterminer la fonction décrivant la vitesse de la particule au temps t.
   b) Calculer la vitesse à 0 s, 5 s et 10 s.
   c) Déterminer la fonction décrivant l'accélération de la particule au temps t.
   d) Calculer l'accélération à 0 s, 5 s et 10 s.
   e) Décrire la trajectoire de la particule.

9. La position par rapport à un point fixe d'une particule excitée électriquement est donnée par :
$s(t) = t^3 - 12t^2 + 21t$ m, où t est en secondes.

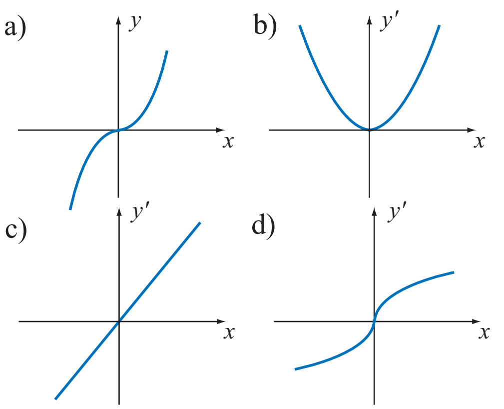
   a) Déterminer la fonction décrivant la vitesse de la particule au temps t.
   b) Calculer la vitesse à 0 s, 1 s et 5 s.
   c) Déterminer la fonction décrivant l'accélération de la particule au temps t.
   d) Calculer l'accélération à 0 s, 1 s et 5 s.
   e) Décrire la trajectoire de la particule.

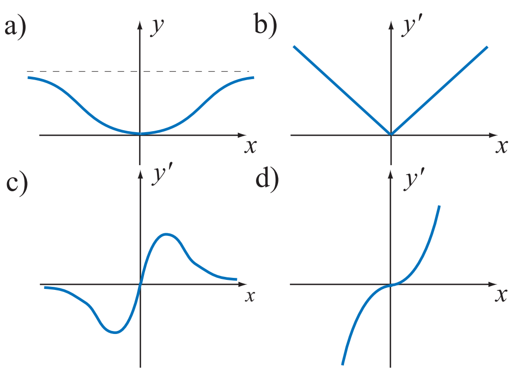
10. La position par rapport à un point fixe d'une particule excitée électriquement est donnée par :
$s(t) = t^3 - 15t^2 + 48t + 6$ m, où t est en secondes.

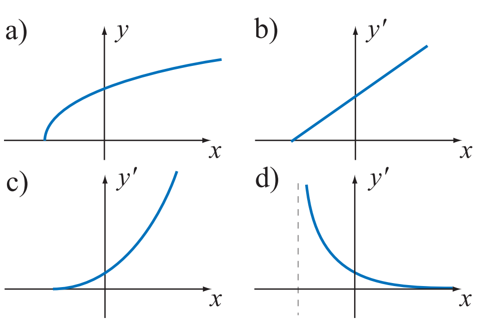
    a) Déterminer la fonction décrivant la vitesse de la particule au temps t.
    b) Calculer la vitesse à 0 s, 5 s et 10 s.

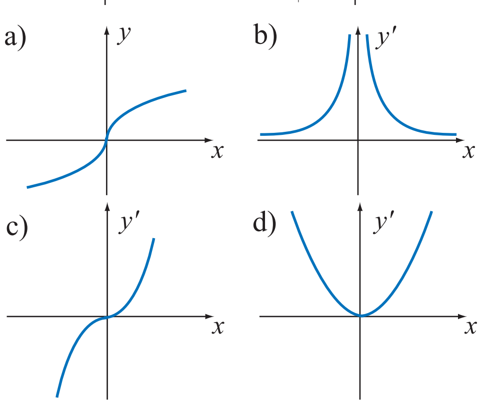
c) Déterminer la fonction décrivant l'accélération de la particule au temps t.
d) Calculer l'accélération à 0 s, 5 s et 10 s.
e) Décrire la trajectoire de la particule.

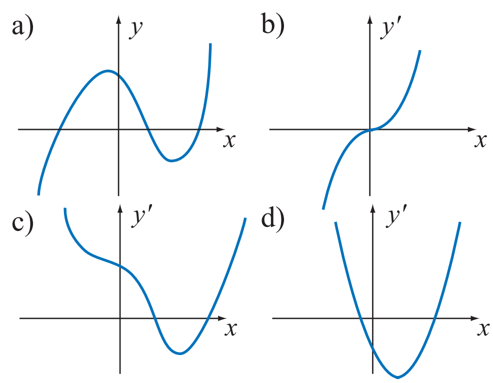
Dans les numéros suivants, repérer parmi les graphiques b, c ou d celui qui représente la dérivée de la fonction dont le graphique est donné en a.

11. 

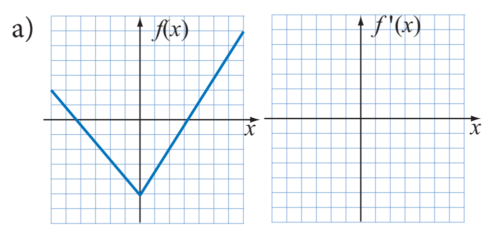
12. 

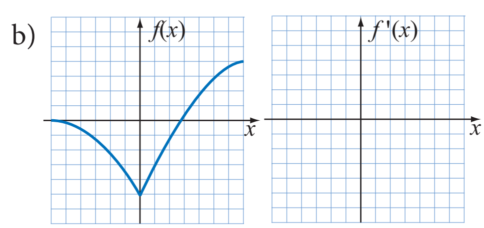
13. 

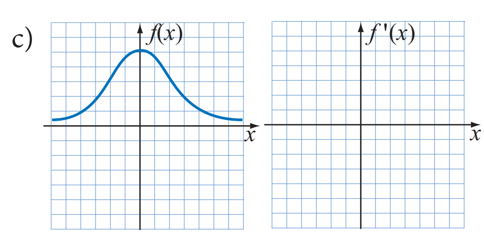
14. 

15. 

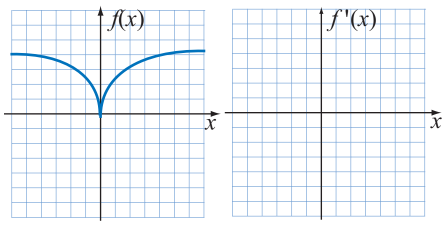
16. On donne le graphique d'une fonction. Construire, à l'aide de points stratégiques, le graphique de la dérivée. Indiquer les discontinuités de la fonction dérivée.



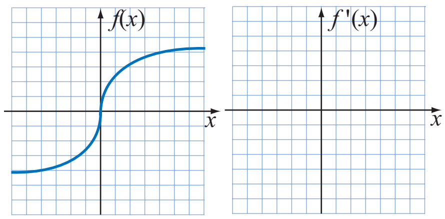




d)

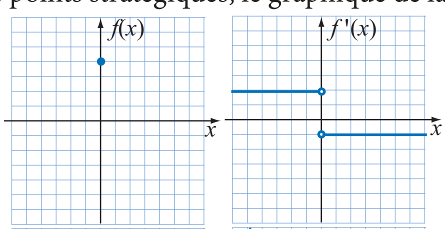


e)

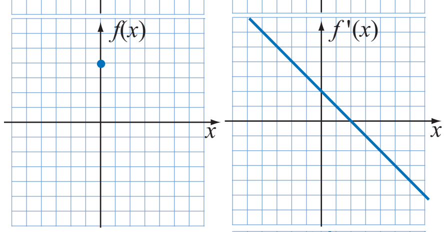


17. On donne l’ordonnée à l’origine de la fonction ainsi que le graphique de sa dérivée. Construire, à l’aide de points stratégiques, le graphique de la fonction.

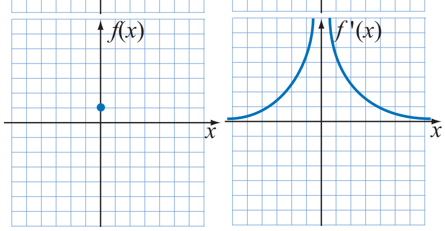
a)



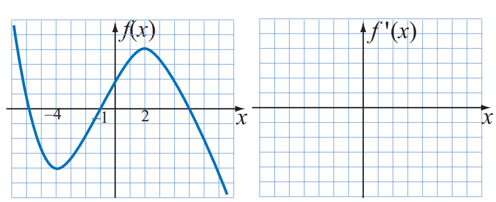
b)



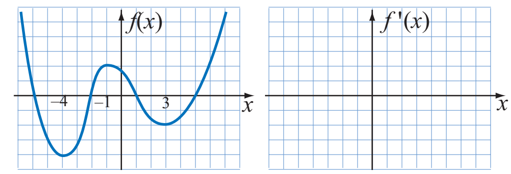
c)



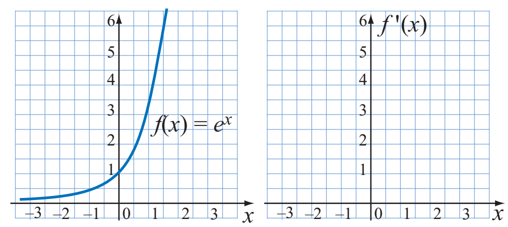
18. Le graphique ci-dessous est celui d’une fonction polynomiale. Construire, à l’aide de points stratégiques, le graphique de sa dérivée.



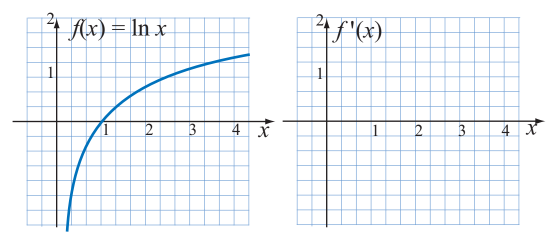
19. Le graphique ci-dessous est celui d’une fonction polynomiale. Construire, à l’aide de points stratégiques, le graphique de sa dérivée.



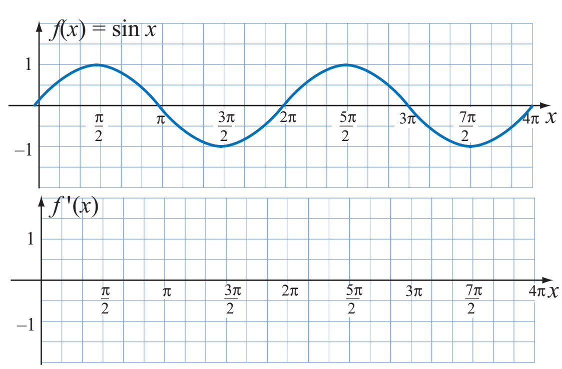
20. Le graphique ci-dessous est celui de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$. Construire, à l’aide de points stratégiques, le graphique de sa fonction dérivée et identifier la fonction obtenue.



21. Le graphique ci-dessous est celui de la fonction logarithmique $f(x) = \ln x$. Construire, à l’aide de points stratégiques, le graphique de sa fonction dérivée et identifier la fonction obtenue.

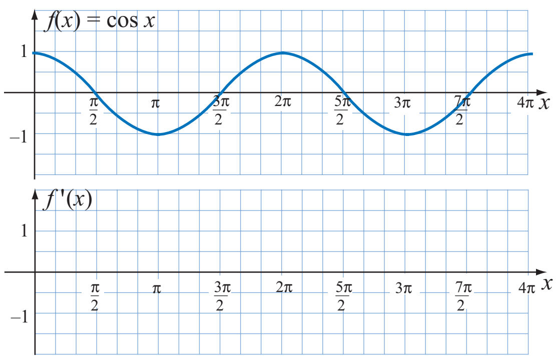


22. Le graphique ci-dessous est celui de la fonction $f(x) = \sin x$. Construire le graphique de sa dérivée et identifier cette fonction.

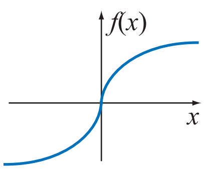


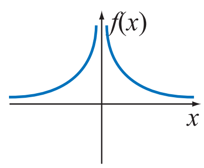
23. Le graphique ci-dessous est celui de la fonction $f(x)$

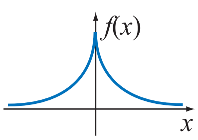
= cos x. Construire le graphique de sa dérivée et identifier cette fonction.

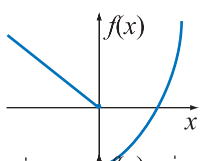


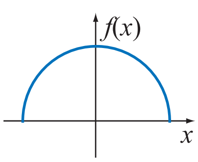
24. Esquisser le graphique de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

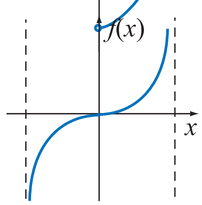
a)


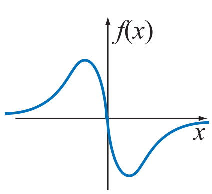
b)


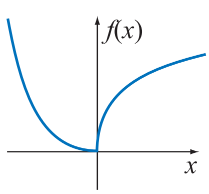
c)


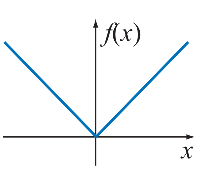
d)


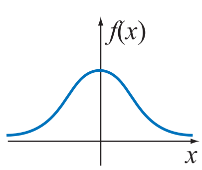
e)


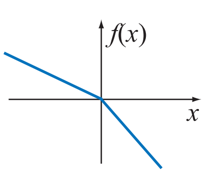
f)


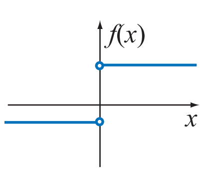
g)


h)


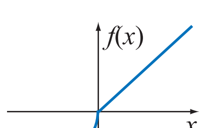
i)


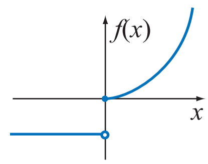
j)


k)


l)


m)

n)




25. Trouver la dérivée de la fonction définie par la règle de correspondance

$$f(x)=\frac{3x-2}{x+4}$$

a) Calculer le taux de variation au point d'abscisse –2. Comment interpréter le signe de ce taux de variation?
b) Calculer le taux de variation au point d'abscisse 3. Comment interpréter le signe de ce taux de variation?
c) La fonction est-elle partout dérivable?
d) Trouver la pente de la tangente au point d'abscisse 2.
e) Trouver l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

26. Trouver la dérivée de la fonction définie par la règle de correspondance

$$f(x)=\frac{x^2+12}{x-3}$$

a) Calculer le taux de variation au point d'abscisse –4. Comment interpréter le signe de ce taux de variation?
b) Calculer le taux de variation au point d'abscisse 1. Comment interpréter le signe de ce taux de variation?
c) La fonction est-elle partout dérivable?
d) Trouver la pente de la tangente au point d'abscisse –1.
e) Trouver l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

27. Trouver la dérivée de la fonction définie par la règle de correspondance

$$f(x)=\frac{3x^2}{x^2+5}.$$

a) Calculer le taux de variation au point d'abscisse –2. Comment interpréter le signe de ce taux de variation?
b) Calculer le taux de variation au point d'abscisse 1. Comment interpréter le signe de ce taux de variation?
c) La fonction est-elle partout dérivable?

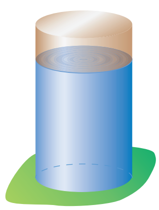
d) Trouver l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

28. Une particule se déplace horizontalement. La vitesse de cette particule est décrite par

$$v(t) = \frac{50}{t+3} \text{ m/s.}$$

a) Trouver la vitesse de la particule à 0 seconde.
b) Trouver l'accélération de la particule à 0 seconde.
c) Trouver l'accélération de la particule à 2 secondes.
d) L'accélération sera-t-elle toujours négative?
e) Si l'accélération est toujours négative, la particule va-t-elle s'arrêter pour changer de direction?

29. Un réservoir d'eau est muni d'un dispositif électronique qui contrôle l'ouverture d'une vanne dès que le volume de liquide est inférieur à cinq litres.



Le volume est décrit par

$$V(t) = \frac{30t+5}{t+0,5} \text{ m/s.}$$

où t est le temps en secondes mesuré à partir du déclenchement du système de remplissage.

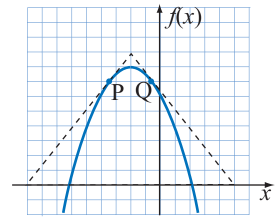
a) Déterminer la fonction décrivant le débit durant la période de remplissage.
b) Calculer le débit à l'instant où le système se met en marche.
c) Calculer le débit 5 secondes après la mise en marche; 10 secondes après la mise en marche.
d) Que constatez-vous en observant ces différents taux?

Exercices de synthèse

1 Soit la fonction définie par :

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3$$

Graphiquement, cette fonction est représentée par une parabole concave vers le bas. Considérons deux points P et Q de part et d'autre de l'axe de symétrie et à égale distance de celui-ci. Les tangentes en ces points forment avec l'axe horizontal un triangle isocèle.



Trouver les coordonnées des points P et Q pour lesquels ce triangle isocèle est rectangle.

2. Soit la fonction définie par :

$$f(x) = -x^2 - 15x - 36.$$

Trouver les coordonnées des points P et Q de telle sorte que les tangentes en ces points forment avec l'axe horizontal un triangle isocèle rectangle.

3. Trouver les paramètres a, b et c tels que la fonction définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ait un zéro à $x = 3$ et que la pente de la tangente au point (2; 7) soit égale à 5.

4. Soit la fonction $f(x) = x^3 - 14x$.

a) Déterminer en quels points la pente de la tangente au graphique de $f(x)$ est égale à -2.
b) Déterminer l'équation de chacune de ces tangentes.

5. Soit la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

a) Déterminer l'équation de la droite tangente au graphique de la fonction qui est parallèle à la droite $y = 2x - 3$.
b) Représenter graphiquement la fonction, la droite et la tangente.

6. Soit la fonction $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

a) Déterminer l'équation de la droite tangente au graphique de la fonction qui est parallèle à la droite $y = x - 8$.
b) Représenter graphiquement la fonction, la droite et la tangente.

7. Soit les fonctions $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 1$ et
$$g(x) = x^2 + 4x - 3.$$
   a) Déterminer l'abscisse des points pour lesquels la tangente au graphique de la fonction f est parallèle à la tangente au graphique de g.
   b) Déterminer l'équation de ces tangentes.
   c) Représenter graphiquement les fonctions et les tangentes.

8. La position par rapport à un point fixe d'une particule excitée électriquement est donnée par :
$$s(t) = t^4 - 12t^3 + 28t^2 + 10 \text{ m}$$
où t est mesuré en secondes. Analyser le comportement de la particule à l'aide des dérivées de la fonction $s(t)$.

9. Soit $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.
   a) Déterminer en quel(s) point(s) la tangente à la courbe est horizontale.
   b) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
   c) Déterminer l'équation de la tangente aux points d'abscisse −2 et 2.
   d) Déterminer dans quel(s) intervalle(s) la fonction est croissante, décroissante.
   e) Déterminer un modèle d'approximation affine à $x = 2$.
   f) À l'aide de ce modèle, estimer l'image de la fonction à $x = 1{,}5$.
   g) Estimer la variation de fonction dans l'intervalle [2; 2,5].
   h) Déterminer la différentielle de f dans l'intervalle [3; 3,4].

10. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{12}{x^2+3}$.
   a) Déterminer en quel(s) point(s) la tangente à la courbe est horizontale.
   b) Déterminer l'équation de la tangente aux points d'abscisse −3 et 3.
   c) Déterminer dans quel(s) intervalle(s) la fonction est croissante, décroissante.
   d) Déterminer un modèle d'approximation affine à $x = 1$.
   e) À l'aide de ce modèle, estimer l'image de la fonction à $x = 1{,}5$.
   f) Estimer la variation de fonction dans l'intervalle [1; 1,25].
   g) Déterminer la différentielle de f dans l'intervalle [3; 3,4].