Illustration : Noémie Ross

Leibniz
1646-1716

Les notations que nous utilisons en calcul différentiel et intégral sont en bonne partie inspirées de celles de Leibniz. Pour en comprendre les raisons, il faut comparer sa notation à celle de Newton.

Leibniz
Les notations modernes

Pour qu'une notation soit adoptée par la communauté mathématique, il faut qu'elle représente bien les concepts, qu'elle soit simple d'utilisation et que son écriture se prête bien à l'expression des propriétés.

Dans sa méthode des fluxions, Newton a développé une notation qui consistait à ajouter un point au-dessus de la lettre représentant la variable dont il souhaitait déterminer la fluxion (ou taux de variation par rapport au temps). Pour lui, toutes les variables varient continûment et uniformément dans le temps. Pour déterminer le taux de variation d'une variable par rapport à une autre, il devait d'abord déterminer les fluxions de chacune des variables, puis en calculer le rapport. Ainsi, pour déterminer le taux de variation de y par rapport à x de $y = x^3$, Newton pose :

$$\begin{aligned} y+\dot{y}o &= \left(x+\dot{x}o\right)^3 \\ &= x^3+3x^2\dot{x}o+3x\dot{x}^2o^2+\dot{x}^3o^3 \end{aligned}$$

Puisque $y = x^3$, il reste :

$$\dot{y}o = 3x^2\dot{x}o+3x\dot{x}^2o^2+\dot{x}^3o^3$$

En divisant chaque membre de l'équation par o, il obtient :

$$\dot{y} = 3x^2\dot{x}+3x\dot{x}^2o+\dot{x}^3o^2$$

En négligeant alors les termes contenant le petit intervalle de temps o, il obtient :

$$\dot{y} = 3x^2\dot{x}$$

Ayant obtenu la relation entre les fluxions, il reste à déterminer le taux de variation de y par rapport à x, qui est le quotient des fluxions, soit :

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3x^2$$

L'utilisation de cette notation est inutilement compliquée, mais elle a permis à Newton de contourner le problème de l'indétermination de la forme 0/0 en comparant toute variation à un mouvement. Il faisait appel à la notion intuitive qu'une variation, comme un mouvement, se fait de façon continu et uniforme pour déterminer le quotient des fluxions. La notation de Newton a continué à être utilisée pendant environ un siècle en Grande-Bretagne et est encore parfois utilisée en physique pour représenter le taux de variation par rapport au temps, mais elle ne s'est jamais largement répandue.

Sur le continent européen, la notation adoptée a été celle de Leibniz. Celui-ci concevait dx et dy comme de petits accroissements des variables x et y respectivement. Leur rapport donnait une mesure du taux de variation de l'une par rapport à l'autre.

Dans la notation moderne, nous utilisons la lettre grecque Δ (delta) pour désigner la petite variation et le taux de variation moyen sur un petit intervalle est noté :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La notation *dy/dx* est réservée à la limite de ce rapport lorsque Δx tend vers 0, soit :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Par exemple, pour déterminer la dérivée de la fonction $y = x^3$, on note :

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3xh\right) \\
&= 3x^2.
\end{aligned}$$

La notation *dy/dx* présente divers avantages. Elle permet d'exprimer simplement les propriétés par rapport aux opérations algébriques :

$$\frac{d}{dx}(ku) = k\frac{du}{dx} \quad \text{où } k \text{ est une constante}$$

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Cette notation permet également de représenter les dérivées des fonctions usuelles, comme la fonction puissance :

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}.$$

La notation de Leibniz permet une représentation très imagée des taux manipulés. Par exemple, si $y = f(x)$, le taux de variation de y par rapport à x se note :

$$\frac{dy}{dx}$$

Si $x = g(t)$, le taux de variation de x par rapport à t se note :

$$\frac{dx}{dt}$$

De plus, elle se comporte souvent comme une fraction ordinaire. Par exemple, si $y = f(x)$ et $x = g(t)$, alors y est une fonction composée de t et la dérivée de y par rapport à t est obtenue par la dérivation en chaîne, soit :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

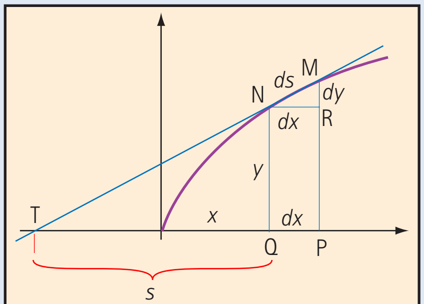
Même si la dérivée est la limite d'un rapport lorsque Δx, ou Δt, tend vers 0, elle se comporte comme le rapport de deux quantités finies.

De plus, si $y = f(x)$ est une fonction inversible, son inverse est $x = f^{-1}(y)$ et la dérivée de la fonction inverse est la réciproque de la dérivée de la fonction, soit :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

Dans ce cas également, la notation se comporte comme une fraction ordinaire.

La notation de Leibniz s'est révélée plus souple à utiliser que celle de Newton. De plus, Leibniz n'a pas tenté de contourner le problème de l'indétermination par l'analogie intuitive du mouvement continu. Il a abordé le problème par les différences et s'est inspiré du triangle caractéristique de la courbe pour tenter de donner un sens au rapport de deux infiniment petits.



Les trois côtés infinitésimaux du triangle NMR sont parfaitement déterminés par la similitude avec le triangle TNQ formé par la sous-tangente TQ, l'ordonnée QN et la longueur du segment TN de la tangente. Le rapport de deux infiniment petits a toujours une valeur finie, soit le rapport de deux segments finis, soit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{TQ}} = \frac{y}{t}$$

où t est la longueur de la sous-tangente.