CHAPITRE 3

ARITHMÉTIQUE *des* GRANDEURS PHYSIQUES

Manipuler les grandeurs physiques selon les exigences technologiques.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- la conversion correcte de grandeurs dans divers systèmes de mesure;
- le choix pertinent du nombre de chiffres significatifs;
- la réalisation d'opérations arithmétiques, le résultat comportant un nombre approprié de chiffes significatifs, compte tenu des règles de propagation de l'incertitude;
- le calcul correct des incertitudes absolue et relative en tenant compte des règles de propagation des incertitudes;
- l'utilisation correcte des rapports et proportions dans la résolution de problèmes.

OBJECTIFS

3.1 Utiliser correctement les règles de présentation des résultats de calculs sur des nombres arrondis.

3.2 Effectuer le calcul de l'incertitude sur le résultat d'opérations.

3.3 Utiliser les propriétés des rapports et des proportions dans la conversion d'unités de mesure.

3.4 Utiliser les propriétés des rapports et proportions dans la résolution de problèmes concrets nécessitant la manipulation d'unités de mesure.

Grandeurs et incertitude 68
Le système international (SI)
Mesure et incertitude
Opérations et propagation de l'incertitude
Opérations et notation scientifique
Galilée, note historique
Exercices 82

Grandeurs et rapports. . . 84
Rapport, proportion et taux
Rapports et proportions en géométrie
Grandeurs et proportions en physique
James Prescott Joule, note historique
Systèmes de mesure, note historique
Exercices 97

3.1 Grandeurs et incertitude

La mesure est un des aspects fondamentaux des sciences et des techniques. Une mesure est toujours composée de deux éléments : un nombre dont la signification dépend d'une échelle de mesure et des unités. Le système le plus utilisé dans les milieux scientifiques est le système international (SI), qui a été élaboré en 1960.

Le système international (SI)

Les unités de base du système international sont données dans le tableau suivant.

REMARQUE

Le kilogramme est la seule unité de base qui s'écrit avec un préfixe, le gramme s'étant révélé une unité trop petite à l'usage.

Le kelvin est l'unité de base de température mais, dans la vie courante, on utilise le degré Celsius. La correspondance est :

$$K = °C + 273{,}15.$$

Unités de base		
Grandeur	**Unité**	**Symbole**
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Courant électrique	ampère	A
Température thermodynamique	kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

En combinant les unités de base, on obtient les unités dérivées. Les grandeurs comme l'aire, le volume, la vitesse et l'accélération se mesurent à l'aide d'unités dérivées des unités fondamentales.

Autres unités SI		
Grandeur	**Unité**	**Symbole**
Superficie	mètre carré	m^2
Volume	mètre cube	m^3
Vitesse	mètre par seconde	m/s
Accélération	mètre par seconde carrée	m/s^2
Masse volumique	kilogramme par mètre cube	kg/m^3
Quantité de mouvement	kilogramme-mètre par seconde	kg·m/s
Moment cinétique	kilogramme-mètre carré par seconde	$kg{\cdot}m^2/s$
Volume massique	mètre cube par kilogramme	m^3/kg
Luminance	candela par mètre carré	cd/m^2

Pour simplifier l'écriture, on donne un nom particulier à certaines unités dérivées. C'est le cas de l'unité de force, que l'on appelle newton (N) en l'honneur du savant Isaac Newton. En unités de base, le newton vaut un kilogramme-mètre par seconde carrée (1 N = 1 kg·m/s^2). De même, l'unité dérivée de puissance s'appelle watt, en l'honneur de l'ingénieur James Watt 1 W = 1 J/s = 1 N·m/s = 1 kg·m^2/s^3.

Unités spéciales

Grandeur	Unité	Symbole	Dérivation
Fréquence	hertz	Hz	1/s
Force	newton	N	kg·m/s^2
Pression	pascal	Pa	N/m^2
Énergie, travail	joule	J	N·m
Puissance	watt	W	J/s
Charge électrique	coulomb	C	A·s
Potentiel électrique	volt	V	W/A = J/C
Résistance électrique	ohm	Ω	V/A

Code d'écriture SI

1. Les symboles des unités s'écrivent toujours en caractères droits et les symboles des grandeurs en italique. Ainsi, W est le symbole des watts et *W* représente le travail.
2. En général, les symboles sont des minuscules : s pour seconde, m pour mètre. Cependant les symboles dérivés d'un nom propre sont représentés par des majuscules : A, pour ampère, V pour volt, etc. Les symboles des préfixes minuscules : c pour centi, k pour kilo. Cependant les préfixes méga (M), giga (G), téra (T), péta (P) et exa (E) font exception ainsi que le symbole du litre (L)
3. Le nom des unités s'écrit entièrement en minuscules, même pour les unités dérivées d'un nom propre, à moins qu'il ne soit en début de phrase. Cependant, Celsius prend toujours une majuscule.
4. Il ne faut pas mettre de point après un symbole d'unité, sauf en fin de phrase.
5. Les symboles d'unités ne prennent jamais la marque du pluriel, contrairement au nom des unités.
6. On utilise les décimales plutôt que les fractions ordinaires et on laisse toujours une espace entre la valeur numérique et la première lettre du symbole des unités.
7. Les préfixes sont également en caractères droits il n'y a pas d'espace entre le symbole du préfixe et celui des unités : kg pour kilogramme.
8. On choisit le multiple d'une unité de manière que les valeurs numériques soient comprises entre 1 et 1000. Par exemple, 23,4 kV pour 23 400 V et 27,842 km pour 27 842 m

9. Le produit de deux unités est représenté par un point centré entre les symboles des unités; par exemple :

   N·m pour newton-mètre et kW·h pour kilowatt-heure.

   Cependant, on n'emploie généralement pas le point pour représenter le produit de deux valeurs numériques; on écrit normalement 27 × 35, et non 27·35.
10. On utilise une barre oblique ou horizontale pour représenter le quotient de deux unités ou encore une puissance négative, m/s^2 ou $m{\cdot}s^{-2}$. Cependant, une même expression ne doit jamais contenir plus d'une barre oblique.
11. Si on emploie les noms des unités, on utilise le mot «par» pour indiquer la division et un trait d'union pour indiquer le produit de deux unités. Ainsi, on écrit 5 volts par seconde, et non 5 volts/seconde, 1 newton-mètre ou 15 newtons-mètres.

Pour alléger l'écriture et la lecture des nombres très grands ou très petits, on utilise les puissances de 10. Ainsi, on écrit $6{,}86 \times 10^3$ cm^3 plutôt que 6 860 cm^3. Les nombres s'écrivent avec un seul chiffre avant la virgule, la position étant précisée par le produit d'une puissance de 10. C'est ce que l'on appelle la **notation scientifique**. Dans cette notation, un nombre comporte deux parties : la **puissance** de 10, qui sert à situer la virgule décimale, et la **mantisse** du nombre. On a donné des noms aux puissances de 10 pour obtenir la **notation de l'ingénieur**, dans laquelle les unités sont dotées d'un préfixe qui indique la puissance de 10 du nombre. Ces préfixes sont donnés dans le tableau suivant.

REMARQUE

Les préfixes des multiples sont tirés de la langue grecque et ceux des sous-multiples sont tirés de la langue latine.

En techniques, on n'utilise pas tous les préfixes. On préfère déplacer la virgule décimale par des multiples de trois et l'on obtient alors une variante de la notation scientifique que l'on appelle **notation de l'ingénieur**. Si l'on procède de cette façon, certaines données comportent plus d'un chiffre à gauche de la virgule décimale. Cependant, il est recommandé de choisir les préfixes de telle sorte que les valeurs soient comprises entre 1 et 1 000. Ainsi,

$$0{,}0000234\,F = 23{,}4 \times 10^{-6}\,F = 23{,}4\ \mu F$$

$$46\ 300\ W = 46{,}3 \times 10^{3}\ W = 46{,}3\ kW$$

$$0{,}0032\ A = 3{,}2 \times 10^{-3}\ A = 3{,}2\ mA$$

Préfixes de la notation de l'ingénieur

Puissances positives			Puissances négatives		
Préfixe	**Puissance**	**Symbole**	**Préfixe**	**Puissance**	**Symbole**
exa	10^{18}	E	déci	10^{-1}	d
péta	10^{15}	P	centi	10^{-2}	c
téra	10^{12}	T	milli	10^{-3}	m
giga	10^{9}	G	micro	10^{-6}	µ
méga	10^{6}	M	nano	10^{-9}	n
kilo	10^{3}	k	pico	10^{-12}	p
hecto	10^{2}	h	femto	10^{-15}	f
déca	10^{1}	da	atto	10^{-18}	a

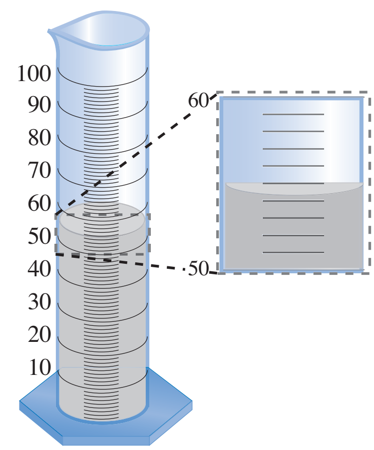
Mesure et incertitude

Lorsqu'on prend une mesure, on obtient un nombre dont les premiers chiffres sont certains et dont le dernier chiffre est estimé en tenant compte de la plus petite subdivision de l'instrument de mesure. Une mesure comporte donc toujours une incertitude. Quand on effectue des opérations sur des mesures, les incertitudes se propagent. Il faut alors arrondir le résultat des opérations pour que, tout comme dans les mesures, les premiers chiffres soient certains et que le dernier chiffre soit estimé. On doit donc :

- déterminer le nombre de chiffres que devra comporter le résultat d'une opération;
- arrondir le résultat selon les règles de l'art.

Pour déterminer le nombre associé à une unité de mesure, on utilise un instrument dont la lecture est nécessairement une source d'erreur puisque la mesure obtenue est une estimation.

ArithGrandeur01



Chiffres significatifs

Lors d'une expérience de laboratoire, on doit normalement prendre des mesures et, pour compléter le rapport de l'expérience, il faut effectuer des calculs sur ces mesures. Il est très important de ne communiquer dans ce rapport que l'information que l'on peut garantir. Il est alors nécessaire de déterminer le nombre de **chiffres significatifs** qu'il faut conserver dans les résultats.

PROCÉDURE

Chiffres significatifs

1. **Chiffres différents de zéro**
   Tout chiffre différent de zéro est considéré comme un chiffre significatif.
2. **Zéros**
   Zéros en début de nombre
   Ce sont les zéros qui précèdent tous les chiffres différents de zéro. Ces zéros ne sont pas des chiffres significatifs.
   Zéros captifs
   Ce sont les zéros placés entre deux chiffres différents de zéro. Ces zéros sont toujours des chiffres significatifs.
   Zéros en fin de nombre
   Ce sont les zéros placés à la droite du nombre. Ils sont significatifs si le nombre comporte une virgule décimale.
3. **Nombres exacts**
   On utilise parfois dans des calculs des nombres qui ne sont pas obtenus à l'aide d'un instrument de mesure.
   Nombre exact résultant d'un dénombrement
   C'est un nombre obtenu en comptant. Ainsi, si on répète une même

REMARQUE

Lorsqu'un nombre se termine par des zéros et qu'il ne comporte pas de virgule décimale, il peut y avoir ambiguïté. Ainsi, la valeur 500 mL a-t-elle un, deux ou trois chiffres significatifs? Pour éliminer l'ambiguïté, on écrit 5×10^2 pour indiquer qu'il y a un seul chiffre significatif. S'il y a deux chiffres significatifs, on écrit $5{,}0 \times 10^2$ et s'il y en a trois, on écrit $5{,}00 \times 10^2$.

Dans le présent ouvrage, lorsqu'un nombre ne comporte pas de virgule décimale, on considère que c'est un nombre exact.

REMARQUE

Un chiffre non nul est toujours significatif.

Le chiffre 0 est significatif sauf s'il précède tous les chiffres non nuls ou s'il est à la fin d'un entier sans virgule décimale.

Ainsi, dans les nombres 3 507 et 27,80 tous les chiffres sont significatifs. Cependant, dans les nombres 0,0035 et 35 000 seuls le 3 et le 5 sont significatifs.

REMARQUE
Les constantes physiques ont généralement un nombre fini de chiffres significatifs qui sont considérés comme exacts. Les constantes mathématiques, comme π ou e, ont un nombre infini de décimales. Dans les calculs, on utilise des valeurs arrondies et tous les chiffres retenus sont significatifs.

mesure cinq fois et que l'on veut calculer la valeur moyenne de ces mesures, le cinq est un nombre exact.
Nombre exact dans une relation
Dans la relation $C = 2\pi r$ qui donne la circonférence d'un cercle, 2 est un nombre exact.
Nombre exact par équivalence de mesure
On définit l'équivalence des kilogrammes et des livres par l'égalité :

$$1 \text{ kg} = 2{,}2046 \text{ lb.}$$

Lorsqu'on utilise une telle équivalence dans un calcul, on considère que 1 et 2,2046 sont des nombres exacts.
Nombre exact d'une spécification d'un produit industriel
Les spécifications d'un produit industriel sont considérées comme des valeurs exactes, sauf si on indique une incertitude.

EXEMPLE 3.1.1

Combien de chiffres significatifs comportent les nombres suivants ?

a) 0,067
b) 13,70
c) 2 750
d) 30,08
e) $5{,}00 \times 10^3$

Solution

a) 0,067 a deux chiffres significatifs, puisque les zéros à gauche d'un nombre ne sont pas significatifs.
b) 13,70 a quatre chiffres significatifs, puisque les zéros à droite sont significatifs lorsqu'il y a une virgule décimale.
c) 2 750 a trois chiffres significatifs, puisque les zéros à droite ne sont normalement pas significatifs lorsque le nombre n'a pas de virgule décimale.
d) 30,08 a quatre chiffres significatifs, puisque les zéros captifs sont significatifs.
e) $5{,}00 \times 10^3$ a trois chiffres significatifs, puisque les zéros à droite sont significatifs lorsqu'il y a une virgule décimale.

Résultats d'une opération

Lorsqu'on effectue des calculs sur des mesures, le résultat ne doit pas laisser croire à une précision plus grande que celle que l'on peut garantir. Cela signifie qu'il doit comporter un seul chiffre incertain, soit le dernier. On doit donc, après un calcul, déterminer les chiffres qu'il faut retenir dans la réponse.

Il est très important, à la suite d'opérations sur des nombres arrondis ou estimés, de ne conserver que les chiffres qui véhiculent une information fiable. La marche à suivre pour déterminer le nombre de chiffres qu'il faut retenir est la suivante.

PROCÉDURE

Présentation du résultat d'opérations

1. Effectuer d'abord toutes les opérations **en conservant tous les chiffres** puis appliquer les règles suivantes.
2. **Règle des sommes et des différences**
   Si la séquence d'opérations ne comporte que des sommes ou des différences, le résultat ne doit pas avoir plus de décimales que le nombre qui en a le moins.
3. **Règle des produits et des quotients**
   Si la séquence d'opérations ne comporte que des produits ou des quotients, le résultat ne doit pas avoir plus de chiffres significatifs que le nombre qui en a le moins.
4. **Séquence de sommes et de produits**
   Si la séquence d'opérations comporte des sommes (ou différences) et des produits (ou quotients), la règle 3 a préséance et le résultat ne doit pas avoir plus de chiffres significatifs que le nombre qui en a le moins.

ArithGrandeur02

REMARQUE

L'expression « ne doit pas avoir plus de décimales que le nombre qui en a le moins » dans la règle 2, indique qu'on en conserve parfois moins. Cela permet de garantir que le résultat est compris dans l'intervalle obtenu en effectuant le calcul de l'incertitude. Il en est de même pour la règle 3.

En pratique, on effectue toutes les opérations et on arrondit ensuite. Cependant, dans les exemples et le recueil de solutions, pour pouvoir expliquer les différentes étapes, nous donnons parfois le résultat de chaque étape d'un calcul. Pour écrire ces résultats intermédiaires, lorsque nous ne donnons pas tous les chiffres affichés sur la calculatrice, nous l'indiquons en faisant suivre le nombre de « ... ». Ainsi, 19,562... représente un résultat d'opérations qui n'a pas été arrondi et pour lequel on n'écrit pas tous les chiffres obtenus lors des opérations.

Cependant, tous les chiffres sont conservés pour les calculs suivants et nous n'appliquons les règles ci-contre que dans l'écriture de la réponse du problème.

Pour respecter les règles de présentation des résultats d'opérations, il faut arrondir ceux-ci. Il faut alors appliquer la procédure suivante.

PROCÉDURE

Arrondir un nombre

1. Repérer le **chiffre-test**, c'est-à-dire le chiffre le plus à gauche de ceux qu'on laisse tomber.
2. Appliquer, parmi les suivantes, la règle pertinente, selon la valeur du chiffre-test :
   - Si le chiffre-test est inférieur à 5, les chiffres restants demeurent inchangés. Ainsi, le nombre 124,72328 arrondi à 4 chiffres donne 124,7.
   - Si le chiffre-test est supérieur à 5 ou si c'est un 5 suivi d'au moins un chiffre non nul, le chiffre qui précède le chiffre-test est augmenté de 1.
3. Si le chiffre-test est un 5 suivi uniquement de 0, on distingue deux cas :
   - le chiffre qui précède demeure inchangé s'il est pair;
   - le chiffre qui précède est augmenté de 1 s'il est impair.

Nombre	Nombre arrondi
22,535 789 5	22,54
0,032 418 551 2	0,032 42
3214,500 2	3215
782,979	783,0
273,55	273,6
0,073 245	0,073 24

EXEMPLE 3.1.2

Arrondir les nombres suivants à trois chiffres significatifs.

a) 0,057 72 b) 73,0054 c) 200,71

Solution

a) Les zéros à gauche du nombre n'étant pas significatifs, le nombre arrondi est

$$0{,}0577.$$

REMARQUE
Il faut repérer le chiffre-test et arrondir en une seule étape. Ainsi, en arrondissant 7,346 à deux chiffres significatifs, on obtient 7,3.

Il faut éviter d'arrondir en séquence, chiffre par chiffre. Ainsi, il ne faut pas arrondir 7,346 d'abord à 7,35 puis à 7,4.

b) Les zéros entre deux chiffres non nuls et les zéros à droite d'un nombre comportant une virgule décimale étant significatifs, le nombre arrondi est :

73,0.

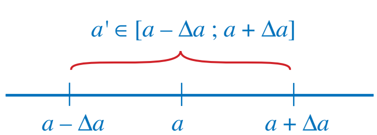
c) Les zéros entre deux chiffres non nuls et les zéros à droite d'un nombre comportant une virgule décimale étant significatifs, le nombre arrondi est :

201.

ArithGrandeur03

REMARQUE
Il faut bien différencier les notions d'erreur et d'incertitude absolue. Pour déterminer l'erreur, il faut connaître a et a', alors que pour déterminer l'incertitude absolue il suffit de connaître la valeur approchée a. Si a est un nombre arrondi ou estimé au cours d'une mesure, l'incertitude Δa est plus petite que la valeur de position du dernier chiffre significatif du nombre arrondi ou estimé.

REMARQUE
Le nombre a' représente une grandeur dont la valeur exacte a est inconnue.



Cependant, on sait que la valeur exacte est comprise dans l'intervalle $[a' - \Delta a; a' + \Delta a]$.

REMARQUE
L'incertitude absolue indique l'intervalle de variation du chiffre incertain. Si l'incertitude absolue n'est pas précisée, c'est la convention qui s'applique.

Opérations et propagation de l'incertitude

En utilisant une valeur estimée ou une valeur arrondie, on commet une erreur. Celle-ci est inévitable, puisque dans toute mesure le dernier chiffre est une estimation. On définit l'erreur ainsi commise comme la valeur absolue de la différence entre la valeur réelle et la valeur estimée.

Erreur

Soit a' un nombre et a une valeur approchée de a'. L'**erreur** commise en utilisant l'approximation plutôt que la valeur exacte est alors définie par $E = |a' - a|$.

En pratique, on ne connaît pas la valeur exacte d'une mesure mais seulement sa valeur approximative; on doit donc estimer l'erreur. En fait, on estime la valeur maximale de l'erreur, qu'on appelle **incertitude absolue**.

Incertitude absolue et incertitude relative

On appelle **incertitude absolue** (ou simplement **incertitude**) sur une grandeur a', la valeur maximale de l'erreur commise en estimant a'. On la représente par Δa (delta a) et on écrit $a' = a \pm \Delta a$.

L'**incertitude relative** est le rapport $\Delta a/a$. On l'exprime normalement en pourcentage.

Lorsqu'on effectue une opération (addition, soustraction, produit ou quotient) sur deux nombres comportant une incertitude, les incertitudes se combinent également. Il existe des règles permettant de :

- déterminer le résultat de l'opération (les chiffres à retenir);
- déterminer l'incertitude absolue sur le résultat de l'opération.

Nous allons présenter ces règles en les illustrant par des exemples.

Incertitude sur une mesure

Par convention, la valeur maximale de l'erreur (incertitude absolue) que comporte une mesure est la moitié de la plus petite graduation de l'instrument.

Par exemple, si vous utilisez un ruban à mesurer et que vous constatez que la mesure de votre crayon est entre 14,3 et 14,4 cm, vous pouvez écrire simplement 14,35 mais vous pouvez également écrire 14,35 ± 0,05 cm.

RÈGLE 1

Sommes et différences de nombres arrondis ou estimés

L'incertitude sur une somme ou une différence est la somme des incertitudes sur chacun des nombres additionnés ou soustraits. Symboliquement, cette règle s'écrit : Si $a' = a \pm \Delta a$ et $b' = b \pm \Delta b$, alors

$$a' + b' = a + b \pm (\Delta a + \Delta b) \text{ et } a' - b' = a - b \pm (\Delta a + \Delta b).$$

L'incertitude absolue est arrondie à un seul chiffre significatif et l'incertitude relative à au plus deux. Le résultat de l'opération est arrondi de telle sorte que le dernier chiffre retenu ait le même rang que celui de l'incertitude absolue

ArithGrandeur04

REMARQUE
L'incertitude de la somme est la somme des incertitudes :

$$(a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b) = \underbrace{(a+b)}_{S} \pm \underbrace{(\Delta a + \Delta b)}_{\Delta S}$$

EXEMPLE 3.1.3

Soit les nombres $c = 26{,}72 \pm 0{,}5\times10^{-1}$ et $d = 13{,}267 \pm 0{,}5\times10^{-2}$. Effectuer les opérations suivantes et indiquer les incertitudes absolue et relative sur les résultats.

a) $c + d$ b) $c - d$

Solution

a) En additionnant les deux nombres, sans les incertitudes, on obtient

$$26{,}72 \pm 0{,}05 + 13{,}267 \pm 0{,}005 = 39{,}987 \pm 0{,}055.$$

L'incertitude absolue est arrondie à un chiffre significatif, 0,06 et le résultat de l'opération est arrondi de telle sorte que le dernier chiffre retenu soit du même rang que celui de l'incertitude absolue

$$c + d = 40{,}00 \pm 0{,}06.$$

L'incertitude relative est $\dfrac{\Delta(c+d)}{c+d} = \dfrac{0{,}06\times100}{40{,}00} = 0{,}15\%.$

b) En appliquant la même règle qu'en a), on obtient :

$$c - d = 13{,}45 \pm 0{,}06.$$

L'incertitude relative est $\dfrac{\Delta(c-d)}{c-d} = \dfrac{0{,}06\times100}{13{,}44} = 0{,}45\%.$

REMARQUE
On arrondit l'incertitude absolue à un chiffre significatif puisqu'elle porte sur le dernier chiffre incertain de l'opération. Pour l'incertitude relative, on retient deux chiffres significatifs.

RÈGLE 2

Produits et quotients d'un nombre arrondi par un nombre exact

Lorsqu'on multiplie (ou divise) un nombre arrondi par un nombre exact, le nombre de chiffres significatifs du résultat est le même que celui du nombre arrondi.

L'incertitude sur le résultat est dans ce cas le produit de l'incertitude et du nombre exact. Symboliquement, cette règle s'écrit :

si $a' = a \pm \Delta a$ et k est un nombre exact, alors $ka' = ka \pm k\Delta a$.

si $a' = a \pm \Delta a$ et k est un nombre exact, alors $\dfrac{a'}{k} = \dfrac{a}{k} \pm \dfrac{\Delta a}{k}$.

ArithGrandeur04

REMARQUE
Les nombres que nous aurons à manipuler dans ce cours ne devront pas toujours être considérés comme des mesures et un nombre exact peut comporter une partie décimale. L'énoncé du problème devrait permettre de déterminer si on doit considérer les nombres comme des mesures arrondies ou des valeurs exactes.

ArithGrandeur05

REMARQUE
L'incertitude sur un produit est

$$(a \pm \Delta a) \times (b \pm \Delta b) = \underbrace{(ab)}_{P} \pm \underbrace{(a\Delta b + b\Delta a)}_{\Delta P}$$

L'incertitude sur un quotient est

$$(a \pm \Delta a) \div (b \pm \Delta b) = \underbrace{\frac{a}{b}}_{Q} \pm \underbrace{\frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2}}_{\Delta Q}$$

RÈGLE 3

Produits, quotients et puissances de nombres arrondis ou estimés

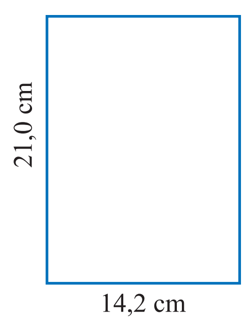
Lorsqu'on multiplie, divise ou élève à une puissance des nombres arrondis, le résultat ne doit pas comporter plus de chiffres significatifs que l'opérande qui en a le moins.

Symboliquement, on écrit : Si $a' = a \pm \Delta a$ et $b' = b \pm \Delta b$, alors :

$$a'b' = ab \pm (a\Delta b + b\Delta a)$$
$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} + \frac{a\Delta b + b\Delta a}{b^2}$$
$$(a')^n = a^n \pm n(a^{n-1})\Delta a^n.$$

Lorsqu'on calcule l'incertitude sur le résultat d'une suite d'opérations comportant des produits et des quotients, on arrondit d'abord l'incertitude absolue, puis on arrondit le résultat de l'opération de telle sorte que le dernier chiffre retenu ait le même rang que celui de l'incertitude absolue

EXEMPLE 3.1.4



On a mesuré les côtés d'un rectangle avec une incertitude de 0,1 cm.

a) Calculer l'aire de ce rectangle et déterminer l'incertitude absolue sur ce calcul.

b) Calculer et l'incertitude relative sur ce calcul.

c) En considérant l'intervalle défini par l'incertitude, calculer la valeur minimale et la valeur maximale de l'aire du rectangle, et comparer cet intervalle à celui défini par l'incertitude absolue sur le produit.

Solution

a) L'aire du rectangle est

$$\begin{aligned}(21{,}0 \pm 0{,}1) \times (14{,}2 \pm 0{,}1) &= 21{,}0 \times 14{,}2 \pm (21{,}0 \times 0{,}1 + 14{,}2 \times 0{,}1)\\ &= 298{,}2 \pm 3{,}52.\end{aligned}$$

L'incertitude est arrondie à ±4 et il faut arrondir le produit à trois chiffres significatifs. On retient

$$298 \pm 4 \text{ cm}^2.$$

b) L'incertitude relative est

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{4}{298} = 0{,}0134..., \text{ soit } 1{,}3\%.$$

c) En considérant l'intervalle défini par l'incertitude, la valeur minimale est

$$20{,}9 \times 14{,}1 = 294{,}69 \text{ cm}.$$

La valeur maximale est

$$21{,}1 \times 14{,}3 = 301{,}73 \text{ cm}.$$

L'aire du rectangle est comprise dans l'intervalle [294,69; 301,73] et le calcul de l'incertitude donne l'intervalle [294; 302].

EXEMPLE 3.1.5

Soit deux nombres estimés

$$a' = 47{,}81 \pm 0{,}01 \text{ et } b' = 13{,}2 \pm 0{,}1.$$

Calculer l'incertitude absolue sur :

a) $a' + b'$

b) $a' - b'$

c) $a'b'$

d) a'/b'

e) a'^5

Solution

a) $a' + b' = 47{,}81 + 13{,}2 \pm (0{,}01 + 0{,}1)$
$= 61{,}01 \pm 0{,}11.$
On conserve $61{,}0 \pm 0{,}1$.

b) $a' - b' = 47{,}81 - 13{,}2 \pm (0{,}01 + 0{,}1)$
$= 34{,}61 \pm 0{,}11.$
On conserve $34{,}6 \pm 0{,}1$.

c) $a'b' = 47{,}81 \times 13{,}2 \pm (47{,}81 \times 0{,}1 + 13{,}2 \times 0{,}01)$
$= 631{,}092 \pm 4{,}913.$
On conserve 631 ± 5.

d) $$\frac{a'}{b'} = \frac{47{,}81}{13{,}2} \pm \frac{(47{,}81 \times 0{,}1 + 13{,}2 \times 0{,}01)}{(13{,}2)^2} = 3{,}621... \pm 0{,}028\ 1...$$

On conserve $3{,}62 \pm 0{,}03$.

e) $a'^5 = 47{,}81^5 \pm (5(47{,}81)^4 \times 0{,}01) = 249\ 800\ 738{,}8 \pm 261\ 243{,}19...$
On conserve $249\ 800\ 000 \pm 300\ 000$ et pour bien indiquer qu'il y a seulement quatre chiffres significatifs, on écrit :

$$(2\ 498 \pm 3) \times 10^5.$$

REMARQUE
Même si le calcul de l'incertitude n'est pas requis, on doit tenir compte des règles de présentation des résultats d'opérations.

Incertitude relative

ArithGrandeur06

Il existe une méthode rapide pour calculer directement l'incertitude relative sur un produit. Puisque

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{b\Delta a + a\Delta b}{ab} = \frac{b\Delta a}{ab} + \frac{a\Delta b}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b},$$

alors

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}.$$

Cela signifie que l'incertitude relative sur un produit est la somme des incertitudes relatives sur les facteurs du produit.

Une fois qu'on connaît l'incertitude relative sur un produit, on peut déterminer l'incertitude absolue, puisque :

$$\Delta P = P\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right).$$

Cela signifie qu'en multipliant l'incertitude relative par le produit, on obtient l'incertitude absolue sur le produit.

Si Q représente le quotient a'/b' de deux nombres comportant une incertitude, l'incertitude relative sur le quotient est alors

$$\frac{\Delta Q}{Q}=\frac{\dfrac{b\Delta a+a\Delta b}{b^2}}{\dfrac{a}{b}}=\frac{b\Delta a+a\Delta b}{b^2}\times\frac{b}{a}=\frac{b^2\,\Delta a+ab\Delta b}{ab^2}$$

$$=\frac{b^2\,\Delta a}{ab^2}+\frac{ab\Delta b}{ab^2}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}.$$

Cela signifie que l'incertitude relative sur un quotient est la somme des incertitudes relatives sur les opérandes. On obtient l'incertitude absolue en multipliant la somme des incertitudes relatives par le quotient, puisque

$$\Delta Q=Q\left(\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right).$$

De la même façon, il existe une méthode rapide pour calculer directement l'incertitude relative sur une puissance. En effet, si R représente la puissance n^e d'un nombre $a' = a + \Delta a$, alors

$$\frac{\Delta R}{R}=\frac{na^{n-1}\,\Delta a}{a^n}=\frac{n\Delta a}{a}\ \text{ et }\ \Delta R=R\left(\frac{n\Delta a}{a}\right).$$

Cela signifie qu'en multipliant l'incertitude relative sur un nombre par la puissance à laquelle on élève ce nombre, on obtient l'incertitude relative sur la puissance. On peut donc calculer l'incertitude absolue en multipliant l'incertitude relative par la puissance du nombre.

EXEMPLE 3.1.6

Soit deux nombres estimés

$$a' = 52{,}43 \pm 0{,}01 \text{ et } b' = 27{,}8 \pm 0{,}1.$$

Calculer l'incertitude relative sur les expressions suivantes et en déduire l'incertitude absolue.

a) $a'b'$ b) a'/b' c) a'^4

Solution

Les incertitudes relatives sur les nombres sont respectivement:

$$\frac{\Delta a}{a}=\frac{0{,}01}{52{,}43}=0{,}000\,19\ldots \text{ et } \frac{\Delta b}{b}=\frac{0{,}1}{27{,}8}=0{,}003\,597\ldots$$

et leur somme est :

$$\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}=0{,}003\,787\ldots$$

On estime donc que l'incertitude relative du produit et du quotient est 0,004 ou 0,4%.

a) Le produit est $ab = 52{,}43 \times 27{,}8 = 1\,457{,}554$. Puisqu'il ne peut comporter que trois chiffres significatifs, on conserve $ab = 1{,}46 \times 10^3$. L'incertitude absolue sur le produit est donc

$$1{,}46 \times 10^3 \times 0{,}004 = 0{,}005\ 84 \times 10^3.$$

On conserve $a'b' = (1{,}46 \pm 0{,}006) \times 10^3$.

b) Le quotient est $\dfrac{a}{b} = 1{,}885\ 9...$

Puisqu'il ne peut comporter que trois chiffres significatifs, on conserve 1,89. L'incertitude absolue sur le produit est donc

$$1{,}89 \times 0{,}004 = 0{,}007\,56.$$

On obtient $\dfrac{a'}{b'} = 1{,}89 \pm 0{,}01$.

c) L'incertitude relative sur le nombre est 0,000 2. L'incertitude relative sur la puissance quatrième du nombre est $4 \times 0{,}000\,2 = 0{,}000\,8$.

La puissance quatrième du nombre est :

$$a^4 = (52{,}43)^4 = 7\,556\,478{,}149.$$

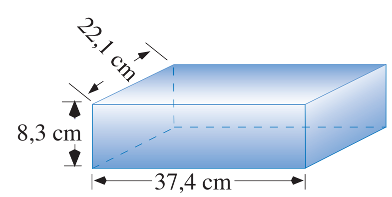
Puisque la puissance ne peut comporter que quatre chiffres significatifs, on conserve $7{,}556 \times 10^6$. L'incertitude absolue sur le produit est donc

$$7{,}556 \times 10^6 \times 0{,}000\ 8 = 6\ 044{,}8.$$

On conserve $a'^4 = (7{,}556 \pm 0{,}006) \times 10^6$.

EXEMPLE 3.1.7

Sachant que le volume d'un parallélépipède rectangle est le produit de la longueur, la largeur et la hauteur, calculer le volume de la boîte illustrée ci-contre dont on a mesuré les côtés. L'incertitude sur ces mesures est de ±0,1 cm. En effectuant le calcul d'incertitude, déterminer le volume en mètres cubes occupé par quatre boîtes identiques.



Solution

Les nombres à manipuler provenant de mesures, on doit appliquer les règles de présentation des résultats. On effectue le produit des dimensions pour trouver le volume de la boîte illustrée, ce qui donne

$$8{,}3 \text{ cm} \times 37{,}4 \text{ cm} \times 22{,}1 \text{ cm} = 6\,860{,}282 \text{ cm}^3.$$

Pour effectuer le calcul de l'incertitude, on effectue la somme des incertitudes relatives

$$\frac{0{,}1}{8{,}3} + \frac{0{,}1}{37{,}4} + \frac{0{,}1}{22{,}1} = 0{,}01924...$$

L'incertitude absolue est $6\,860{,}282 \times 0{,}01924 = 132{,}039$, on arrondit à un chiffre significatif, et on retient 100. Le volume d'une boîte est

$$6\,900 \pm 100 \text{ cm}^3.$$

Quatre boîtes identiques occuperaient alors un volume égal à :

$$4 \times (6\,900 \pm 100) \text{ cm}^3 = 27\,600 \pm 400 \text{ cm}^3.$$

Puisque 4 est un nombre exact, on conserve tous les chiffres. Pour convertir ce volume en mètres cubes, on doit se rappeler qu'un mètre vaut 100 cm

$$1 \text{ m}^3 = 100^3 \text{ cm}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3 = 10^6 \text{ cm}^3.$$

Il faut donc diviser le volume par 10^6 cm^3 pour obtenir le volume en mètres cubes, ce qui donne 0,0276 m^3.

REMARQUE

Pour obtenir le volume en mètres cubes, on peut également exprimer les dimensions en mètres avant de calculer le volume, ce qui donne :

$$\begin{aligned} &0{,}083 \text{ m} \times 0{,}374 \text{ m} \times 0{,}221 \text{ m} \\ &= 0{,}006\ 860\ 282 \text{ m}^3 \\ &\approx 0{,}006\,9 \text{ m}^3 \text{ par boîte.} \end{aligned}$$

Opérations et notation scientifique

Pour effectuer des opérations sur des nombres en notation scientifique, il faut convertir les préfixes en puissances de 10 et appliquer les règles d'utilisation des exposants.

Produits et quotients

Pour multiplier deux nombres, on effectue le produit des mantisses et on additionne les exposants. Pour diviser deux nombres, on effectue le quotient des mantisses et on soustrait les exposants.

REMARQUE

En a), le produit des mantisses, est 3,91. Cependant, il doit avoir le même nombre de chiffres significatifs que le facteur qui en a le moins.

En b), le quotient des mantisses est 1,59090... Cependant, il doit avoir le même nombre de chiffres significatifs que le facteur qui en a le moins. On arrondit donc la mantisse à deux chiffres significatifs, ce qui donne 1,6,

EXEMPLE 3.1.8

Effectuer les opérations suivantes en utilisant les règles des exposants.

a) $(1{,}7 \times 10^4) \times (2{,}3 \times 10^2)$

b) $\dfrac{3{,}5\times10^5}{2{,}2\times10^3}$

■ *Solution*

a) En regroupant les mantisses et les puissances de 10, on obtient

$$(1{,}7 \times 10^4) \times (2{,}3 \times 10^2) = (1{,}7 \times 2{,}3) \times (10^4 \times 10^2) = 3{,}9 \times 10^6.$$

b) En regroupant les mantisses et les puissances de 10, on obtient

$$\frac{3{,}5\times10^5}{2{,}2\times10^3} = \frac{3{,}5}{2{,}2}\times\frac{10^5}{10^3} = 1{,}6\times10^2.$$

Sommes et différences

Pour additionner ou soustraire des nombres exprimés en notation scientifique, il faut ajuster les exposants de manière à pouvoir mettre en évidence une même puissance de 10. L'ajustement se fait normalement sur le nombre ayant le plus petit exposant lorsque les deux exposants sont positifs, et sur le nombre ayant le plus grand exposant lorsque les deux exposants sont négatifs. Après l'ajustement, on effectue l'opération sur les mantisses et on applique la règle de présentation des résultats, la lecture du nombre de décimales se faisant après l'ajustement des exposants. L'exemple suivant illustre un cas d'ajustement.

REMARQUE

Les exposants étant différents et positifs, on fait un ajustement pour transformer l'expression $2{,}264\times10^3$. On doit multiplier 10^3 par 10 et, pour conserver l'égalité, diviser la mantisse par 10, ce qui donne :

$$2{,}264 \times 10^3 = 0{,}2264 \times 10^4.$$

Dans le résultat final, la somme des mantisses est arrondie à trois décimales.

EXEMPLE 3.1.9

Effectuer la somme $(2{,}435 \times 10^4) + (2{,}264 \times 10^3)$ en utilisant les propriétés des exposants.

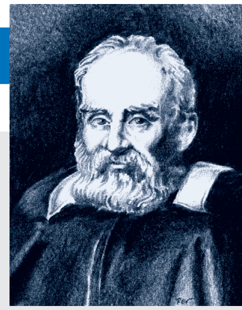
■ *Solution*

$$\begin{aligned}(2{,}435 \times 10^4) + (2{,}264 \times 10^3) &= (2{,}435 \times 10^4) + (0{,}2264 \times 10^4)\\ &= (2{,}435 + 0{,}2264) \times 10^4\\ &= 2{,}661 \times 10^4.\end{aligned}$$

Un peu *d'histoire*

GALILÉE

1564-1642



Galilée naquit à Pise en 1564. Il fut professeur de mathématiques à l'université de Pise en 1589, puis à Padoue, l'université de la république de Venise, en 1592. Sa tâche dans cette dernière université était d'enseigner la géométrie euclidienne et l'astronomie géocentrique aux étudiants en médecine. À l'époque, l'astrologie faisait partie des méthodes de diagnostic et de traitement. Galilée fut nommé mathématicien de la cour à Florence en 1610. Il étudia la chute des corps à l'aide de plans inclinés pour ralentir le mouvement afin de mieux l'observer. Il formula les lois du mouvement accéléré en fonction du temps (Galilée-Chute).

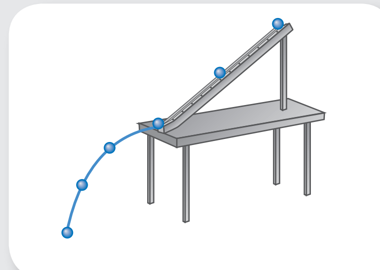
À l'été 1609, il entendit parler d'une lunette construite par un hollandais, il construisit alors une série de télescopes avec lesquels il observa la Lune et les étoiles. Il fit plusieurs découvertes en astronomie, dont quatre des lunes de Jupiter et les phases de Vénus. (Galilée-Observations). Il fit beaucoup pour répandre les idées de Copernic, ce qui le fit accuser d'hérésie par le pape en 1633. Il mourut en 1642 dans sa villa d'Arcetri, où il avait été assigné à résidence.

Par ses travaux sur le mouvement, Galilée est à l'origine de la démarche scientifique moderne et de la notion de fonction. Ses réflexions l'amenèrent à penser que la seule démarche pouvant être couronnée de succès en sciences est d'établir des relations numériques entre les variables d'un phénomène physique.

Les travaux de Galilée sur le mouvement visaient surtout à répondre aux objections à l'héliocentrisme. En tentant de rejeter l'une de ces objections Galilée mit au point une expérience dans laquelle il employa, pour la première foi dans l'histoire, la notion de calcul d'erreur. L'objection à laquelle Galilée voulait répondre portait sur le « mouvement diurne » de la Terre. Selon les opposants, si la Terre est en rotation sur elle-même, une pierre qu'on laisse tomber du haut d'une tour devrait toucher le sol à une certaine distance du pied de la tour puisse que celle-ci est entraînée par la rotation de la Terre (Galilée-Composition).

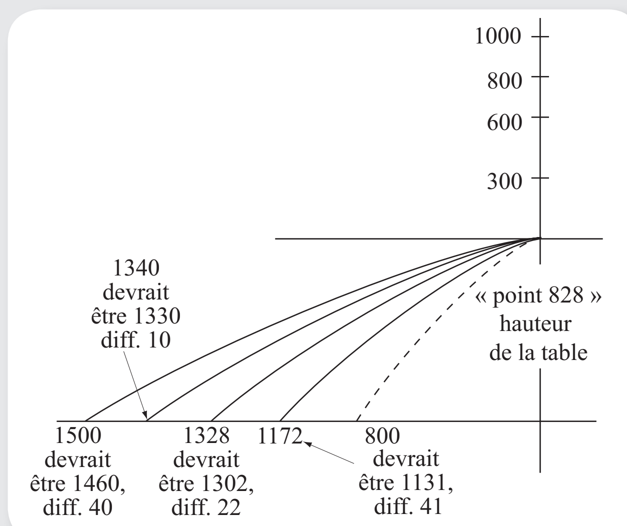
Une des réponses de Galilée à cette objection est que la pierre est animée du même mouvement que la Terre lorsqu'elle amorce sa chute et que les deux mouvements se composent. Le physicien réalisa entre autres l'expérience suivante sur la composition des mouvements. Le montage consiste en un plan incliné installé sur une table. On fait rouler une bille sur ce plan en contrôlant la hauteur à laquelle la bille amorce sa descente. Le plan incliné est muni d'un déflecteur pour que le mouvement de la bille soit horizontal en quittant le bord de la table.

Par cette expérience, Galilée voulait montrer que si on laisse tomber un corps déjà animé d'un mouvement horizontal, le corps ne tombe pas verticalement au sol mais suit une trajectoire parabolique. Ce qui réfutait l'objection de la pierre qu'on laisse tomber du haut d'une tour.



La vitesse de la bille en quittant le bord de la table dépend de la hauteur à laquelle celle-ci amorce sa descente. Galilée put mesurer à quelle distance de la table la bille touche le sol et vérifier si cette distance est conforme à son hypothèse de la composition des mouvements et de la trajectoire parabolique (Galilée-Trajectoire).

La figure suivante est une reproduction de la page de notes prises au cours de l'expérience. Galilée représente sur une verticale les hauteurs de départ de la bille. Il indique également la distance des points de chute observés et la distance espérée ainsi que la différence entre les deux valeurs.



C'était la première fois dans l'histoire qu'on rédigeait un tel rapport d'expérience. Les notes indiquent que Galilée voulait comparer les résultats expérimentaux et les valeurs prédites par un modèle et qu'il a calculé les différences entre ces valeurs. C'est le début du calcul d'erreur en recherche scientifique.

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

3.2 Exercices

1. Quel est le nombre de chiffres significatifs des nombres suivants ?

a) 0,147 c) 175,20 e) 2,275
b) 2,57 d) 5 240 f) 70,003

2. Arrondir les nombres suivants à deux décimales et indiquer le nombre de chiffres significatifs.

a) 0,073 85 c) 813,515 e) 51,389
b) 5,2735 d) 0,000 195 f) 2,0372

3. Arrondir les nombres suivants à quatre chiffres significatifs.

a) 253,57 c) 353,7005 e) 532,75
b) 54,382 d) 357,289 f) 0,123 67

4. Effectuer les opérations suivantes en tenant compte du fait que les nombres comportant une partie décimale ont été préalablement arrondis, les autres sont exacts.

a) $275{,}3 + 3{,}754$ e) $284{,}3 \div 53{,}12$
b) $45{,}72 - 32{,}24$ f) $26{,}55 \div 8$
c) $33{,}12 \times 7{,}21$ g) $51{,}33 \div 3$
d) $125{,}4 \times 0{,}032$ h) $335{,}27 \div 9{,}4$

5. En mesurant le côté d'un carré, on obtient 15,4 cm. Calculer l'aire de ce carré.

6. En mesurant le diamètre d'un cercle, on obtient 62,3 cm. Calculer l'aire de ce cercle.

7. On évalue le diamètre d'une sphère à 67 cm. Évaluer le volume ($V = 4\pi r^3/3$) de cette sphère.

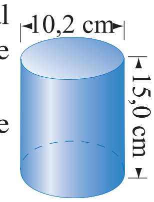
8. Effectuer les opérations suivantes en respectant les règles régissant les opérations sur des nombres arrondis.

a) $128{,}5 + 57{,}38$ d) $22{,}57 \times 15{,}3$
b) $342{,}6 - 287{,}26$ e) $28{,}534 \times 22{,}7$
c) $26{,}2 + 38{,}27 + 15{,}347$ f) $543{,}2 \div 18{,}2$

9. Effectuer les opérations suivantes en respectant les règles régissant les opérations sur des nombres arrondis.

a) $(38{,}2 + 17{,}43) \times 15{,}1$
b) $(72{,}3 - 87{,}26) \times 17{,}2$
c) $(26{,}2 \times 18{,}4) + 25{,}3$
d) $(17{,}23 \times 8{,}12) + 18{,}4$
e) $(1{,}534 \times 2{,}73) + (2{,}216 \times 1{,}65)$
f) $(0{,}323 \times 1{,}24) + (3{,}512 \times 1{,}78)$
g) $(2{,}432 \times 2{,}73) \div (2{,}216 + 1{,}65)$
h) $(5{,}726 - 4{,}57) \div (1{,}2034 + 2{,}34)$

10. Le volume d'un cylindre droit est égal au produit de sa hauteur par l'aire de sa base.



a) Calculer le volume du cylindre illustré ci-contre.

b) On désire fabriquer des boîtes rectangulaires pouvant contenir 12 de ces cylindres sur trois rangées. Quel doit être le volume intérieur de ces boîtes?

c) Quel doit être le volume extérieur de ces boîtes, sans compter le couvercle, sachant que le matériau utilisé a une épaisseur de 1,2 cm ?

11. Écrire les nombres suivants en notation scientifique.

a) 386 400 c) 0,000 25
b) 56 300 000 d) 0,000 003 45

12. Exprimer les nombres suivants sous la forme conventionnelle.

a) $1{,}23 \times 10^6$ c) $7{,}35 \times 10^4$
b) $3{,}14 \times 10^{-3}$ d) $8{,}92 \times 10^{-6}$

13. Appliquer les règles d'utilisation des exposants pour effectuer les opérations suivantes :

a) $3{,}23 \times 10^6 \times 2{,}56 \times 10^{-4}$
b) $3{,}23 \times 10^3 \div 1{,}26 \times 10^2$
c) $7{,}22 \times 10^3 \div 3{,}54 \times 10^{-2}$
d) $7{,}07 \times 10^6 + 3{,}27 \times 10^5$
e) $4{,}18 \times 10^{-3} + 7{,}56 \times 10^{-2}$
f) $4{,}27 \times 10^{-1} - 6{,}35 \times 10^{-2}$

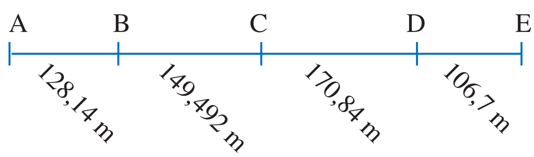
14. Écrire les grandeurs suivantes en notation de l'ingénieur.

a) 27 000 000 Hz d) 1800 W
b) 53 000 Ω e) 225 000 V
c) 0,000 000 000 28 F f) 152 000 000 mm

15. Écrire les grandeurs suivantes en unités de base.

a) 34 ms	d) 456 kV	g) 24,6 mA
b) 48 mm	e) 235 km	h) 27 μF
c) 2,34 kW	f) 233 pF	

16. On a relevé quatre mesures pour déterminer la longueur du segment AE. Calculer cette longueur.



17. Dans chaque cas, expliquer en vos propres mots ce que signifie l'expression donnée.

a) $r = 215{,}8 \pm 0{,}1$

b) $V = 47{,}55 \pm 0{,}05$

18. Dans chaque cas, les mesures données comportent une incertitude absolue. Exprimer ces mesures avec une incertitude relative.

a) $18{,}75 \pm 0{,}05$	c) $315{,}55 \pm 0{,}05$
b) $213{,}5 \pm 0{,}5$	d) $24{,}5 \pm 0{,}5$

19. Dans chaque cas, indiquer laquelle des deux grandeurs a et b a la plus grande précision (il faut comparer les incertitudes relatives).

a) $a = 137{,}5 \pm 0{,}5$ et $b = 11{,}4 \pm 0{,}1$

b) $a = 28{,}4 \pm 0{,}4$ et $b = 32{,}5 \pm 0{,}5$

c) $a = 3{,}04 \pm 0{,}01$ et $b = 94{,}5 \pm 0{,}4$

d) $a = 21{,}2 \pm 0{,}02$ et $b = 424{,}5 \pm 0{,}4$

20. Dans chaque cas, effectuer l'opération et déterminer les incertitudes absolue et relative sur le résultat, puis écrire l'intervalle de valeurs à l'intérieur duquel se situe le résultat.

a) $43{,}12 \pm 0{,}5\times10^{-1} + 15{,}8 \pm 0{,}5$

b) $43{,}12 \pm 0{,}5\times10^{-1} - 15{,}8 \pm 0{,}5$

c) $54{,}1 \pm 0{,}5 + 27{,}3 \pm 0{,}5$

d) $54{,}1 \pm 0{,}5 - 27{,}3 \pm 0{,}5$

e) $36{,}1 \pm 0{,}2 + 28{,}22 \pm 0{,}1\times10^{-1}$

f) $36{,}1 \pm 0{,}2 - 28{,}22 \pm 0{,}1\times10^{-1}$

21. Dans chaque cas, effectuer l'opération et déterminer les incertitudes absolue et relative sur le résultat, puis écrire l'intervalle de valeurs à l'intérieur duquel se situe le résultat.

a) $(28{,}3 \pm 0{,}5\times10^{-1}) \times 4$

b) $(28{,}3 \pm 0{,}5\times10^{-1}) \div 4$

c) $(2\,000 \pm 1) \times 2$

d) $(2\,000 \pm 1) \div 5$

e) $(32{,}7 \pm 0{,}04) \times (2{,}4 \pm 0{,}03)$

f) $(32{,}7 \pm 0{,}04) \div (2{,}4 \pm 0{,}03)$

g) $(3{,}6 \pm 0{,}1) \times (8{,}4 \pm 0{,}3)$

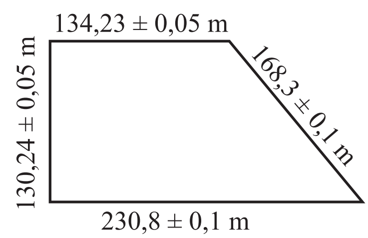
h) $(3{,}6 \pm 0{,}1) \div (8{,}4 \pm 0{,}3)$

i) $(252{,}4 \pm 0{,}5\times10^{-1}) \times (28{,}96 \pm 0{,}5\times10^{-2})$

j) $(252{,}4 \pm 0{,}5\times10^{-1}) \div (28{,}96 \pm 0{,}5\times10^{-2})$

k) $(18{,}7 \pm 0{,}4)^3$

22. Deux employés de la municipalité ont mesuré chacun deux côtés d'un terrain trapézoïdal pour y aménager un parc. Les mesures ont été reproduites sur le croquis suivant.

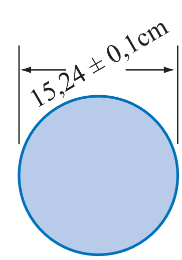


En effectuant le calcul de l'incertitude absolue et de l'incertitude relative :

a) Calculer la longueur de treillis nécessaire pour clôturer ce terrain.

b) Calculer l'aire du terrain.

23. Le diamètre d'un piston est de $15{,}24 \pm 0{,}1$ cm.



Déterminer l'aire du piston en effectuant le calcul de l'incertitude absolue et de l'incertitude relative.

3.3 Grandeurs et rapports

La mesure d'une grandeur physique s'obtient par comparaison avec une autre grandeur. Voici quelques façons de procéder :

- comparer la grandeur physique à un étalon (longueur, aire, volume);
- comparer la grandeur physique à l'inverse d'un étalon (conductance, admittance);
- déterminer le rapport d'une grandeur physique à une autre grandeur physique (masse volumique, concentration molaire massique);
- comparer la grandeur physique au logarithme d'un étalon (échelle de Richter, décibels);
- comparer le logarithme de la grandeur physique à un étalon (intensité sonore, échelle de Richter);

Rapport, proportion et taux

Rapport et proportion

Le quotient de deux grandeurs a/b est appelé **rapport** de a à b. Un rapport est une expression fractionnaire dont la valeur peut être exprimée en décimale.

Proportion01

La fraction inverse d'un rapport est appelée **rapport inverse**. Ainsi, b/a est le rapport inverse du rapport a/b.

Une **proportion** est une égalité de deux rapports.

REMARQUE
On donne parfois les termes en les énumérant dans l'ordre, soit

a; b; c ; d.

Pour effectuer les calculs on doit utiliser les rapports comme dans le texte ci-contre.

Ainsi,
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
est une proportion. Une proportion est composée de quatre termes. Les termes occupant les positions a et d sont appelés **extrêmes** et les termes occupant les positions b et c, **moyens**. Si $b = c$, ce terme est dit **moyen proportionnel** entre a et d.

Taux et pourcentage

Proportion02

Un **taux** désigne le rapport de deux grandeurs de natures différentes. On le dit **unitaire** lorsque la deuxième grandeur est égale l'unité.

Un **pourcentage** est un rapport dont le dénominateur est 100.

THÉORÈME

Produit des extrêmes et produit des moyens

Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Symboliquement, pour tout a, b, c et d non nuls,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ si et seulement si } ad = bc.$$

On peut facilement démontrer cette propriété en multipliant les deux membres du rapport $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ par bd et en simplifiant l'expression obtenue.

Règle de trois

L'expression **règle de trois** désigne une technique de résolution de problèmes servant à déterminer le terme inconnu d'une proportion dont trois éléments sont donnés.

PROCÉDURE

Résolution d'un problème de proportionnalité

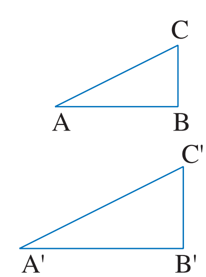
1. Identifier l'inconnue du problème et la représenter par une lettre.
2. S'assurer que les données forment une proportion.
3. Établir les rapports de cette proportion et résoudre l'équation.
4. Interpréter correctement le résultat dans le contexte du problème en tenant compte des unités.

On rencontre beaucoup de situations où il existe entre les variables un lien de proportionnalité auquel on peut appliquer une règle de trois. Cependant, il faut s'assurer que cette règle est effectivement applicable au problème à résoudre.

Rapports et proportions en géométrie

Proportion03

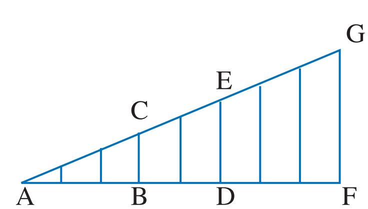
En géométrie plane, l'étude des triangles semblables fournit de beaux cas de proportionnalité. En effet, les longueurs homologues de figures semblables sont proportionnelles. Ainsi, dans les triangles semblables, les côtés homologues sont proportionnels. Par exemple, dans les triangles représentés ci-contre, on a :



Triangles semblables

$$\frac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}} = \frac{m\overline{B'C'}}{m\overline{A'C'}}.$$

La proportionnalité des côtés homologues de figures semblables permet de déterminer la longueur de côtés inconnus. Les triangles semblables fournissent une image mentale de la proportionnalité. La figure ci-contre est un le plan en coupe d'une rampe d'accès. Les supports de cette rampe forment avec le plan incliné et l'horizontale des triangles semblables. Dans ces triangles, le rapport de la hauteur sur la base est constant. Ce qui s'exprime mathématiquement sous forme d'une égalité de rapports :

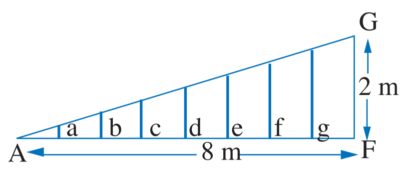


$$\frac{\text{Longueur du support } \overline{BC}}{\text{Distance } \overline{BA}} = \frac{\text{Longueur du support } \overline{DE}}{\text{Distance } \overline{DA}} = \frac{\text{Longueur du support } \overline{FG}}{\text{Distance } \overline{FA}}$$

Cette suite d'égalités indique que le rapport de la longueur d'un support à sa distance au pied de la rampe est constant. En d'autres mots, la **longueur d'un support est proportionnelle à sa distance au pied de la rampe**. Le rapport est appelé **pente** de la rampe. Cette propriété permet de trouver la longueur de chaque support, si on connaît sa distance au pied de la rampe.

EXEMPLE 3.3.1

La figure représentée ci-contre est le plan d'une rampe d'accès pour fauteuils roulants. Déterminer la longueur des supports sachant que la distance entre deux supports est de 1 m.



REMARQUE
Les grandeurs données dans un plan sont considérées comme des valeurs exactes.

Solution

Comme il s'agit d'un plan, on peut considérer les longueurs comme des valeurs exactes. Le rapport entre la longueur d'un support et sa distance au pied de la rampe est

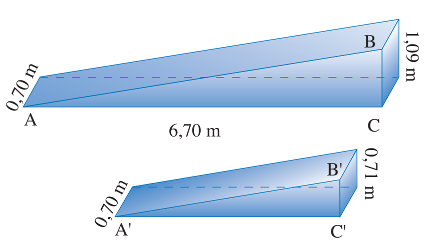
$$\frac{m\overline{FG}}{m\overline{FA}} = \frac{2}{8} = 0,25 \text{ m/m}.$$

On peut déterminer la longueur de chaque support à l'aide du rapport de longueur des supports et des distances au pied de la rampe des supports. En effectuant le produit, on obtient :

m a = 0,25 m	m e = 1,25 m
m b = 0,50 m	m f = 1,50 m
m c = 0,75 m	m g = 1,75 m
m d = 1,00 m	

EXEMPLE 3.3.2

On a mesuré les dimensions de la rampe d'accès pour fauteuils roulants dont l'esquisse est donnée ci-contre. On désire modifier le plan, tout en conservant les mêmes proportions et la même largeur de manière à permettre l'accès à une galerie qui est à 0,71 m du sol. Déterminer la longueur au sol de la nouvelle rampe d'accès.



Solution

Puisqu'il s'agit de mesures, on doit respecter les règles de présentation des résultats d'opérations. Pour conserver les mêmes proportions, les triangles ABC et A'B'C' doivent être semblables. On désire calculer la longueur de A'C' sachant que celle de B'C' est de 0,71 m. On établit un rapport entre deux côtés des triangles

$$\frac{m\overline{A'C'}}{m\overline{B'C'}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{BC}}, \text{ donc } \frac{m\overline{A'C'}}{0,71 \text{ m}} = \frac{6,70 \text{ m}}{1,09 \text{ m}}.$$

Dans ce cas, les mesures des longueurs sont précises au centimètre. Si on tolère un chiffre de plus, on a $m\overline{A'C'} = 4,36$ m.

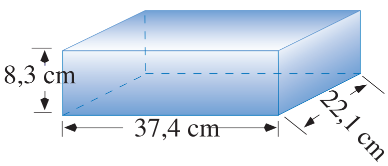
Grandeurs et proportions en physique

Masse volumique

La **masse volumique** d'un corps est le rapport de sa masse sur son volume. L'unité de masse volumique est le kilogramme par mètre cube (kg/m^3).

EXEMPLE 3.3.3

Estimer la masse volumique du métal constituant le lingot dont les dimensions sont données ci-contre, sachant que la masse de ce lingot est de 17,5 kg.



Solution

La masse volumique étant le rapport de la masse sur le volume, on doit d'abord calculer le volume du lingot en mètres cubes

$$V = 0{,}083 \times 0{,}221 \times 0{,}374 = 0{,}006\ 860\ 282\ m^3.$$

Le rapport de la masse sur le volume est donc

$$\frac{M}{V} = \frac{17{,}5\ \text{kg}}{0{,}006\ 860\ 282\ \text{m}^3} = 2\ 550{,}9155\ \text{kg}/\text{m}^3.$$

On conserve la valeur 2 600 kg/m^3.

Densité relative

La **densité relative** d'un corps est le rapport de la masse volumique de ce corps sur la masse volumique de l'eau.

REMARQUE

Certains rapports n'ont pas d'unités, ce sont des nombres purs. C'est le cas, par exemple, de la densité

EXEMPLE 3.3.4

Déterminer la densité relative du métal constituant le lingot de l'exemple 3.3.3, sachant que la masse volumique de l'eau est de 1 000 kg/m^3. En vous servant du tableau présenté ci-contre, identifier le métal dont est fait le lingot.

Solution

La densité d'une substance étant le rapport de la masse volumique de cette substance sur la masse volumique de l'eau, la densité recherchée est

$$d = \frac{2\ 600\ \text{kg}/\text{m}^3}{1\ 000\ \text{kg}/\text{m}^3} = 2{,}6.$$

Chaque matériau se caractérise par sa masse volumique et sa densité relative. Le tableau présenté ci-contre contient la masse volumique et la densité de différentes substances. En comparant la densité relative calculée ci-dessus aux densités consignées dans le tableau, on est porté à conclure que le lingot est fait d'aluminium.

Masse volumique et densité relative

	Masse volumique (km/m^3)	Densité relative
Aluminium	2 700	2,70
Cuivre	8 920	8,92
Fer	7 860	7,86
Plomb	11 300	11,30
Argent	10 500	10,50
Liège	240	0,24
Verre	2 500	2,50
Eau	1 000	1,00
Mercure	13 600	13,60

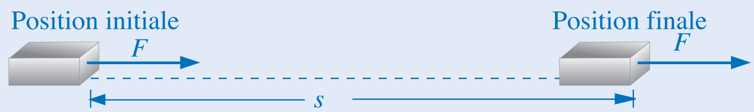
REMARQUE

En SI (système international), on préfère éviter les unités composées et l'unité utilisée pour décrire le travail est le joule (J) où 1 J = 1 N·m.

Travail

Travail

Le **travail** fait par une force dont le point d'application se déplace dans la direction de la force est égal au produit de la force par le déplacement.

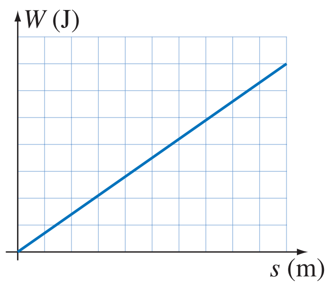


Travail $W = Fs$

Le lien entre les grandeurs est

$$W = Fs$$

où W est le travail en joules (J), F est la force en newtons (N) et s est la distance en mètres (m).



Travail effectué par une force constante de même sens que le déplacement en fonction du déplacement

Il est à noter que le travail effectué par une force est directement proportionnel au déplacement de celle-ci, à condition bien sûr que l'intensité et la direction de la force soient constantes. La représentation graphique du travail en fonction du déplacement d'une force constante qui s'applique dans le sens du déplacement donne une droite passant par l'origine. La constante de proportionnalité est l'intensité de la force.

EXEMPLE 3.3.5

Calculer le travail effectué par une force de 1 563,2 N sur une distance de 12,5 m dans la direction de la force. Exprimer le tout en notation de l'ingénieur (voir annexe I) et en respectant les règles de présentation des résultats d'opérations sur des nombres arrondis.

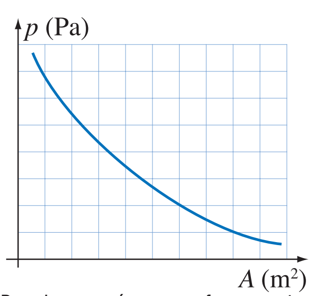
Solution

Le travail effectué est le produit de la force et de la distance de déplacement de cette force, soit:

$$W = Fs = 1\,563{,}2 \text{ N} \times 12{,}5 \text{ m} = 19\,500 \text{ N·m} = 19\,500 \text{ J} = 19{,}5 \text{ kJ}.$$

Force due à l'attraction terrestre

Deux masses exercent l'une sur l'autre une force d'attraction. La force exercée par la Terre sur une masse d'un kilogramme est de 9,8 N au niveau de la mer.



Pression exercée par une force constante en fonction de l'aire de la surface de contact

Pression

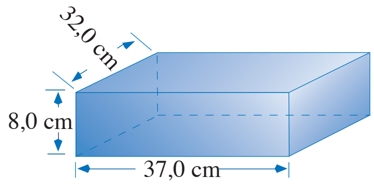
La **pression** est la force exercée par unité d'aire. Elle se mesure en pascals (Pa) et est définie par l'égalité

$$p = \frac{F}{A}.$$

La relation entre les unités est 1 N/m^2 = 1 Pa. Pour déterminer la pression, il faut donc diviser la force exercée par l'aire de la surface de contact.

EXEMPLE 3.3.6

Le lingot illustré ci-contre est déposé sur une table. Estimer la force et la pression exercée sur la table, sachant que la masse du lingot est de 17,5 kg.



Solution

La force exercée est

$$F = 9{,}8 \text{ N/kg} \times 17{,}5 \text{ kg} = 171{,}5 \text{ N}.$$

La pression exercée étant le rapport de la force exercée sur l'aire de la surface de contact, il faut calculer, l'aire de la base du lingot en mètres carrés :

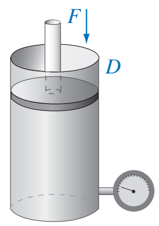
$$A = 0{,}37 \text{ m} \times 0{,}32 \text{ m} = 0{,}1184 \text{ m}^2.$$

La pression exercée est donc

$$p = \frac{F}{A} = \frac{171{,}5 \text{ N}}{0{,}1184 \text{ m}^2} = 1\,448{,}47\ldots \text{ Pa} \approx 1{,}45 \text{ kPa}.$$

EXEMPLE 3.3.7

On estime le rayon d'un piston à 12,0 cm. Calculer la pression exercée sur le liquide si on applique une force de 340 N sur le piston.



Piston et manomètre

Solution

Il faut d'abord calculer l'aire de la surface de contact, soit l'aire d'un cercle dont le rayon est de 12 cm ou 0,12 m. L'aire est donc :

$$A = \pi \times 0{,}12^2 = 0{,}045\ 238\ldots \text{ m}^2.$$

La pression étant le rapport de la force sur l'aire de la surface de contact, on a

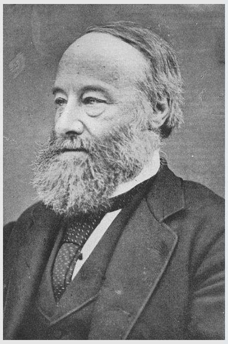
$$p = \frac{F}{A} = \frac{340 \text{ N}}{0{,}045\ 239 \text{ m}^2} = 7\ 515{,}63\ldots \text{ Pa} \approx 7{,}52 \text{ kPa}.$$

Un peu *d'histoire*

JAMES PRESCOTT JOULE

1818-1899

James Prescott Joule, fils d'un brasseur, Joule fut d'abord éduqué à domicile et, à l'âge de 16 ans, il fut envoyé, avec son frère aîné, étudier aux côtés de John Dalton à la Manchester Literary and Philosophical Society. Ils étudièrent la géométrie et l'arithmétique avec Dalton jusqu'à la retraite de celui-ci deux ans plus tard, en raison d'un AVC. L'influence de Dalton et de ses collaborateurs fut décisive, Joule fut alors fasciné par l'électricité et il étudia la chaleur dégagée par les courants électriques dans les conducteurs et détermina l'équivalent mécanique de la calorie.



De 1843 à 1850, il réalisa des expériences pour transformer le travail en chaleur, ce qui lui permit de mettre en évidence la proportionnalité entre le dégagement de chaleur et le travail fourni et de déterminer l'équivalent mécanique de la calorie. Il a démontré que l'énergie calorifique W dégagée par un courant dans un conducteur est donnée par $W = RI^2t$ où R est la résistance du conducteur, I est l'intensité du courant et t est la durée du passage du courant dans le conducteur. Il a laissé son nom à l'unité de travail et d'énergie: le joule.

EXEMPLE 3.3.8

Le fabricant de skis pour lequel vous travaillez vous demande de faire un tableau de spécifications indiquant la pression exercée sur la neige par une personne de 80 kg dont le poids repose sur un seul ski en fonction de la longueur des skis qu'elle porte. La largeur des skis est de 10 cm et vous devez produire les spécifications dans un intervalle de variation de 1,5 m à 2,2 m de longueur avec un pas de 10 cm. Cette information doit également être consignée graphiquement.

Solution

Il faut d'abord déterminer la force qui est le produit de la masse par l'accélération due à la gravitation. On a donc :

$$F = mg = 80 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 784 \text{ kg·m/s}^2 = 784 \text{ N}.$$

Le ski étant de forme rectangulaire, la surface d'un ski est le produit de la longueur par la largeur. Pour un ski de 1,5 m de longueur, l'aire de la surface est :

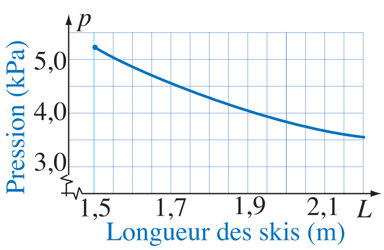
$$A = 0{,}10 \text{ m} \times 1{,}5 \text{ m} = 0{,}15 \text{ m}^2.$$

Si le poids repose sur un seul ski de 1,5 m, la pression exercée sur la neige est

$$p = \frac{F}{A} = \frac{784 \text{ N}}{0{,}15 \text{ m}^2} = 5\ 226{,}66$$

Les résultats des calculs et la représentation graphique sont donnés ci-contre.

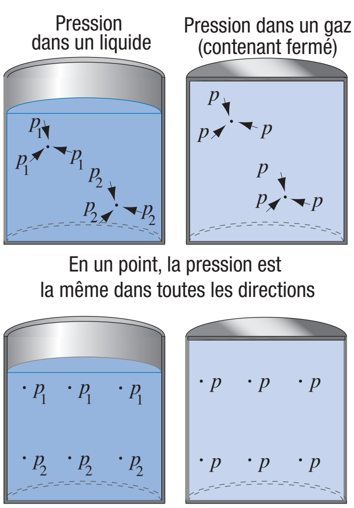
Pression exercée par un ski	
Longueur (m)	Pression (Pa)
1,5	5 227
1,6	4 900
1,7	4 612
1,8	4 356
1,9	4 126
2,0	3 920
2,1	3 733
2,2	3 564



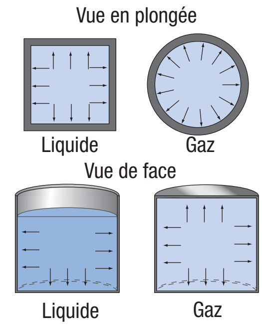
Pression exercée par un fluide

L'appellation **fluide** est utilisée pour désigner un liquide ou un gaz. Dans un liquide, la pression en un point dépend du poids de la colonne de liquide au-dessus de ce point. C'est-à-dire que la pression varie avec la profondeur.

Pour parler de la pression dans un gaz, celui-ci doit être dans un contenant fermé, sinon il se disperse et la notion de pression n'est pas pertinente. Dans un contenant fermé, les molécules de gaz sont en mouvement perpétuel et frappent la paroi sans arrêt. Ces collisions répétées sur la paroi produisent une pression. On peut modifier cette pression en augmentant ou en diminuant la température du gaz ou en introduisant plus de gaz dans le contenant de façon à accroître l'activité moléculaire. Dans un gaz, la pression est la même partout et ne varie pas avec la hauteur, sauf dans le cas de la pression atmosphérique. L'air de l'atmosphère est emprisonné par l'attraction terrestre, mais sa densité en hauteur est beaucoup plus faible et l'activité des molécules également. La pression atmosphérique en un point est alors approximativement proportionnelle à la hauteur de la colonne d'air au-dessus de ce point. La pression exercée par un fluide présente certaines caractéristiques communes à tous les fluides qu'ils soient liquides ou gazeux. Mais il y a également des propriétés de la pression dans un liquide qui diffèrent de la pression dans un gaz. Les propriétés sont les suivantes :



En tous points d'un plan horizontal, la pression est la même



La pression est toujours perpendiculaire à la paroi

1. Dans un fluide au repos, la pression en un point est la même dans toutes les directions. Dans un liquide, la pression peut varier d'un point à l'autre en fonction de la profondeur. Dans un gaz, si le contenant est clos, la pression est la même en tous points.
2. Dans un fluide, la pression est la même en tous points d'un plan horizontal.
3. La pression exercée par un fluide sur la paroi d'un récipient est partout perpendiculaire à la paroi.

Pression hydrostatique

La **pression hydrostatique** est la pression dans un liquide au repos. Cette pression varie selon la profondeur. C'est ce qui la différencie de la pression d'un gaz en vase clos.

On peut facilement montrer que la pression exercée par une colonne de liquide sur une surface est directement proportionnelle à la hauteur de la colonne de liquide. En effet, la force exercée par la colonne de liquide est le produit de sa masse par l'attraction gravitationnelle, soit $F = mg$. De plus, la masse est le produit du volume de liquide par sa masse volumique, ce qui donne $m = \rho V$, et le volume du liquide est le produit de l'aire de la surface par la hauteur, soit $V = Ah$. La masse est donc $m = \rho Ah$ et la force exercée est $F = mg = \rho Ahg$. La pression étant le rapport entre la force exercée et l'aire de la surface sur laquelle elle s'exerce, on a :

$$p = \frac{F}{A} = \frac{\rho Ahg}{A} = \rho hg.$$

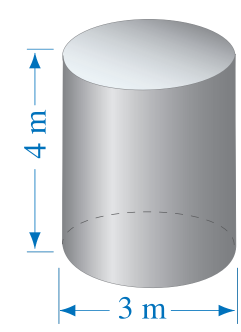
La pression exercée par une colonne de liquide est donc directement proportionnelle à la hauteur de la colonne, la constante de proportionnalité étant le produit de la masse volumique par l'accélération gravitationnelle. Le tableau ci-contre donne la masse volumique de différents liquides.

Masse volumique

Liquide	Masse volumique (kg/m^3)	Densité relative
Eau	1 000	1,00
Eau de mer	1 030	1,03
Benzène	900	0,90
Chloroforme	1 490	1,49
Essence	660	0,66
Mercure	13 600	13,60
Huile	920	0,92
Glycérine	1260	1,26

EXEMPLE 3.3.9

L'entreprise pour laquelle vous travaillez fabrique des réservoirs d'huile de forme cylindrique dont les dimensions sont données ci-contre. Calculer la pression manométrique au fond du réservoir lorsqu'il sera plein.



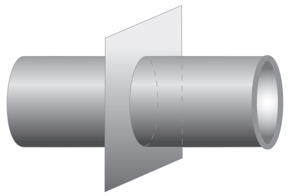
Solution

La pression p exercée par une colonne de liquide est donnée par :

$$p = \rho gh$$

où p est la pression manométrique en pascal (Pa), ρ est la masse volumique du liquide, g est l'accélération causée par l'attraction terrestre en mètres par seconde au carré (m/s^2) et h est la hauteur de la colonne de liquide en mètres (m). On a donc :

$$p = 920 \text{ kg/m}^3 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 4 \text{ m} = 36\,064 \text{ N/m}^2 = 36 \text{ kPa}.$$



Le débit est le volume de fluide traversant une section de la conduite par unité de temps

Débit

Le **débit** d'un fluide est le volume de fluide déplacé par unité de temps. C'est donc le volume de fluide qui traverse une section de la conduite par unité de temps, on le note Q,

$$Q = \frac{V}{t}$$

où V est le volume en mètres cubes (m^3) et t est le temps en secondes. Le débit est donc donné en mètres cubes par seconde (m^3/s).

Vitesse d'écoulement

La **vitesse d'écoulement** du liquide dans une conduite est la distance parcourue par le fluide par unité de temps. Elle est représentée par v et définie par :

$$v = \frac{L}{t}$$

On peut établir une relation entre le débit et la vitesse d'écoulement. En effet, en exprimant le débit par rapport à l'aire d'une section de la conduite, on a :

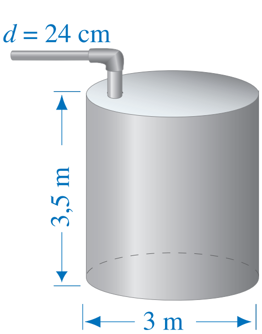
$$Q = \frac{V}{t} = \frac{AL}{t} = Av$$

où A est l'aire de la section en mètres carrés (m^2), L est la longueur de la course en mètres (m) et t est le temps en secondes. En isolant v dans cette expression, on obtient :

$$v = \frac{Q}{A}.$$

La vitesse d'écoulement est le rapport entre le débit et l'aire d'une section de la conduite.

EXEMPLE 3.3.10



Une conduite d'alimentation permet de remplir complètement le réservoir ci-contre en 35 minutes lorsque la valve est ouverte au maximum.

a) Quel est le débit (L/min) durant la période de remplissage lorsque la valve est ouverte au maximum ?

b) Calculer la vitesse d'écoulement dans le tuyau de remplissage lorsque la valve est ouverte au maximum.

■ ***Solution***

a) Le volume du cylindre est donné par
$V = \pi r^2 h = \pi \times (1{,}5\ \text{m})^2 \times 3{,}5\ \text{m} = 25\ \text{m}^3$. Le débit est

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{25\ \text{m}^3}{35\ \text{min}} = 0{,}71\ \text{m}^3/\text{min}.$$

b) La vitesse d'écoulement est le rapport entre le débit et l'aire de la section. Le débit doit être exprimé en m^3/s, ce qui donne

$$Q = 0,71\ \frac{\text{m}^3}{\text{min}} \times \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 0,12\ \text{m}^3/\text{s}.$$

L'aire de la section du tuyau d'alimentation est

$$A = \pi\, r^2 = \pi \times (0,12\ \text{m})^2 = 0,045\ \text{m}^2.$$

La vitesse d'écoulement est alors

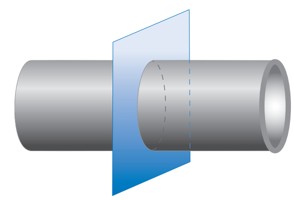
$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0,12\ \text{m}^3/\text{s}}{0,045\ \text{m}^2} = 0,27\ \text{m/s}.$$

REMARQUE

Dans le système international, le débit se mesure en mètres cubes par seconde (m^3/s), mais on utilise également le nombre de litres à la minute (1 m^3 = 1 kL), la quantité de masse à la seconde (kg/s). En Amérique du Nord, les pouces cubes par minute (po^3/min) sont encore utilisés.

EXEMPLE 3.3.11

Un conduit de ventilation à section circulaire doit laisser passer un débit d'air de 8,0 m^3/s à la vitesse de 4,0 m/s. Trouver le rayon en mètres du conduit de ventilation.



Solution

Les données sont $Q =$ 8,0 m^3/s et $v = L/t =$ 4,0 m/s et l'aire de la section de la conduite est $A = \pi r^2$. La relation entre ces variables est

$$Q = \frac{A \times L}{t}.$$

En substituant, on a $8\ \text{m}^3/\text{s} = A \times 4\ \text{m/s}$

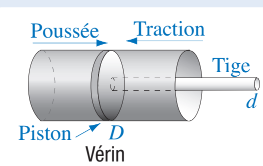
d'où $A = \pi r^2 = 2,0\ \text{m}^2$

et $$r = \sqrt{\frac{2,0}{\pi}} = 0,7978... = 0,80\ \text{m}.$$

Applications aux vérins

Vérin

Un **vérin** est un cylindre muni d'un piston qui a pour fonction de recevoir et de transmettre la pression exercée par un fluide.



Dans un vérin, la force développée durant la poussée dépend de l'aire du piston. Pendant la traction, la force développée dépend de l'aire de la couronne qui est la différence entre l'aire du piston et l'aire de la tige. Les aires sont normalement exprimées par rapport au diamètre. Dans le tableau ci-contre, sont notées les formules des aires et des pressions dans un vérin. La force s'exprime en newtons (N), l'aire en mètres carrés (m^2) et la pression s'exprime en newtons par mètres carrés (N/m^2) ou en pascals (Pa). L'équivalence est décrite par 1 N/m^2 = 1 Pa.

Aires dans un vérin		
Piston	Tige	Couronne
$A_p = \frac{\pi D^2}{4}$	$A_t = \frac{\pi d^2}{4}$	$A_c = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$
Pressions dans un vérin		
$p = \frac{F}{A_p}$		$p = \frac{F}{A_c}$

EXEMPLE 3.3.12

Au cours de la poussée, une pression de 24 kPa est exercée par un piston dont le diamètre est de 16 cm. Quelle est la force appliquée ?

Solution

La force appliquée est le produit de la pression par l'aire du piston, on a donc :

$$F = p\,A_p.$$

Il faut d'abord exprimer les unités de mesure en tenant compte des équivalences. Le diamètre du piston est de 16 cm ou de 0,16 m et la pression est de 24 kPa, soit 24 000 Pa = 24 000 N/m^2. En substituant ces données dans la relation de la pression lors de la poussée, on a

$$F = pA_p = p\frac{\pi D^2}{4} = 24\ 000\ \text{N/m}^2 \times \frac{\pi(0{,}16)^2}{4}\ \text{m}^2 = 480\ \text{N}.$$

La force appliquée lors de la poussée est de 480 N.

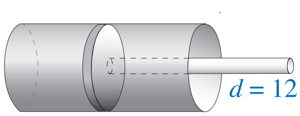
La vitesse du piston dans un vérin est calculée en mètres par seconde (m/s) par l'une des expressions suivantes,

$$v = \frac{Q}{A_p} = \frac{L}{t} \quad \text{ou} \quad v = \frac{Q}{A_c} = \frac{L}{t}.$$

selon que le piston est en poussée ou en traction.

EXEMPLE 3.3.13

Calculer la vitesse de poussée et la vitesse de traction du piston ci-contre sachant que le débit d'huile est de 15 L/min.



Solution

La vitesse est le rapport entre le débit et la surface d'une section de la conduite. Lorsque le piston est en poussée, l'aire de la section est :

$$A_p = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times (0{,}32)^2}{4} = 0{,}080\ \text{m}^2.$$

Le débit est de 15 L /min, soit de 0,015 m^3/min ou 0,00025 m^3/s. La vitesse d'écoulement est alors :

$$v = \frac{Q}{A_p} = \frac{0{,}000\ 25\ \text{m}^3/\text{s}}{0{,}080\ \text{m}^2} = 0{,}0031\ \text{m/s}.$$

La vitesse du piston à la poussée est donc de 3 millimètres par seconde. L'aire de la section à la traction est :

$$A_c = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi[(0{,}32)^2 - (0{,}12)^2]}{4} = 0{,}0069\ \text{m}^2.$$

La vitesse d'écoulement est alors :

$$v = \frac{Q}{A_c} = \frac{0{,}000\ 25\ \text{m}^3/\text{s}}{0{,}069\ \text{m}^2} = 0{,}0036\ \text{m/s}.$$

Soit une vitesse de 3,6 mm/s.

LOI

Loi de Pascal

Toute pression appliquée à un fluide est transmise intégralement à tous les points du fluide et aux parois de son contenant.

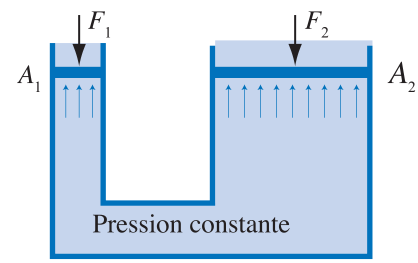
Considérons la figure ci-contre présentant une coupe de deux réservoirs cylindriques fermés par des pistons et reliés par une conduite. En appliquant une force F_1 sur le petit piston, on exerce une pression p qui est transmise intégralement à tous les points du fluide. La pression étant le rapport de la force sur l'aire de la surface, on a donc :

$$p = \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1}; \text{ donc, } F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1.$$

Ce résultat indique qu'en appliquant une force F_1 sur le piston du petit réservoir cylindrique, la force équilibrante F_2 développée par le piston du grand réservoir cylindrique sera proportionnelle à la force F_1, la constante de proportionnalité étant le rapport des aires. En modifiant le rapport des aires, on développe une grande force.

REMARQUE

Dans son Traité de l'équilibre des liqueurs édité en 1653, Pascal introduit une loi sous le titre **Machine pour multiplier les forces** qu'on appelle **loi de Pascal** dont il existe plusieurs applications, entre autres, les systèmes de freinage, les vérins et tous les systèmes hydrauliques.

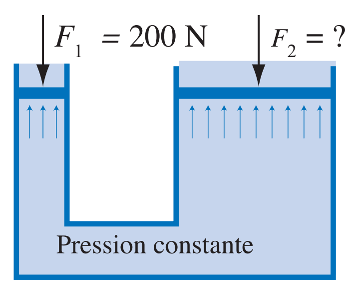


EXEMPLE 3.3.14

Deux cylindres sont reliés par un tuyau et l'assemblage est rempli d'huile, les diamètres des cylindres sont respectivement de 3,0 cm et de 27,0 cm.

a) Si une force de 200 N est appliquée sur le piston fermant le petit cylindre, quelle est la force exercée sur le piston fermant le grand cylindre ?

b) Si le piston du petit cylindre est enfoncé de 9,0 cm, quel sera le déplacement du piston du grand cylindre ?



Solution

a) Les forces sont proportionnelles aux aires des pistons,

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 = \frac{(27{,}0)^2 \pi/4}{(3{,}0)^2 \pi/4} \times 200 \text{ N} = 16\ 200 \text{ N}.$$

b) Le volume d'huile déplacé dans le petit cylindre est le produit de l'aire du piston par le déplacement,

$$V_1 = A_1 d_1 = \pi(1{,}5)^2 \text{ cm}^2 \times 9 \text{ cm} = 20{,}25\ \pi \text{ cm}^3.$$

Le volume d'huile déplacé est donc de $20{,}25\ \pi$ cm^3. Dans le grand cylindre, ce volume est également le produit de l'aire du piston par le déplacement d_2, on a donc

$$A_2 d_2 = 20{,}25\ \pi \text{ cm}^3$$

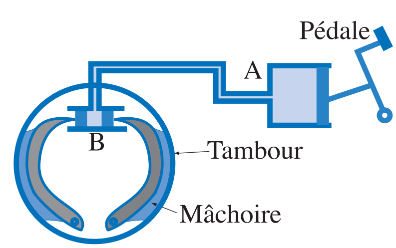
d'où :

$$d_2 = \frac{20{,}25\pi \text{ cm}^3}{(27{,}0)^2 \pi/4 \text{ cm}^2} = \frac{81\pi \text{ cm}^3}{(27{,}0)^2 \pi \text{ cm}^2} = 0{,}111... \text{ cm}.$$

Si le piston du petit cylindre s'enfonce de 9,0 cm, le grand piston s'élève donc de 0,11 cm.

REMARQUE

On retrouve dans les freins hydrauliques une applications de la loi de Pascal. Cette application est illustrée par le schéma suivant. En appuyant sur la pédale de frein, on augmente la pression d'huile en A, celle-ci écarte les pistons en B, pressant les mâchoires sur les tambours des roues.



Frein hydraulique

Un peu d'histoire

SYSTÈMES DE MESURE

Avant le XVIII^{e} siècle, il n'existait aucun système de mesures unifié. Les unités de mesure différaient souvent d'un pays à l'autre, et même d'une région à l'autre à l'intérieur d'un pays. C'est en France que la diversité était la plus grande. Dans le système féodal, le seigneur avait le pouvoir de définir les unités de mesure en usage dans son domaine, ce qui a amené l'élaboration de plusieurs systèmes distincts. Le fractionnement graduel du pouvoir entre les seigneurs, les villes et les villages a accentué le problème. Plusieurs appellations venaient de la morphologie humaine : le doigt, le pied, la coudée, le pas, la brasse et la toise (longueur entre les extrémités des deux bras étendus); cependant, des mesures de même appellation représentaient souvent des grandeurs différentes d'une région à l'autre. On utilisait des mesures très peu précises comme le « journal » qui était l'étendue de terre travaillée en une journée par un paysan, le « galopin », ou la quantité de vin que l'on peut boire pendant un repas et le « picotin », soit la ration quotidienne d'avoine d'un cheval. On se doute que ces unités de mesure étaient très variables, mais ce n'était pas les seules. Ainsi, une lieue, qui était à l'origine la distance que pouvait parcourir un homme ou un cheval en une heure, valait 3, 248 km jusqu'en 1674. À partir de 1674, la lieue de Paris valait 3, 898 km. En 1737, on définit la lieue des Postes d'une valeur de 4,288 km (les facteurs marchaient plus vite), et la lieue tarifaire pour le transport des grains, qui valait 4,678 km. En favorisant la fraude, la prolifération de mesures sans facteur commun devenait de plus en plus problématique dans les activités commerciales, administratives et industrielles.

À l'époque de la révolution française, les unités de mesure était depuis longtemps un sujet de plaintes. Les représentants politiques et les scientifiques ont alors unis leurs efforts pour mettre au point un système de mesures se rapportant à un étalon universel qui pourrait, selon le rêve du marquis de Condorcet, être adopté par tous les pays. Le 16 février 1791, une commission fut formée sur une proposition du chevalier de Borda. Les membres de cette commission étaient :

Borda, Jean-Charles de, 1733-1799, mathématicien et physicien;

Condorcet, Nicolas de, 1743-1794, philosophe et mathématicien;

Laplace, Pierre-Simon de, 1749-1827, mathématicien, astronome et physicien;

Lagrange, Joseph-Louis, 1736-1813, mathématicien et astronome;

Monge, Gaspard, 1746-1818, mathématicien.

Pour éliminer l'arbitraire des unités de mesure seigneuriales et s'assurer de l'universalité de l'étalon, la commission devait fixer la longueur de l'unité en choisissant l'une des trois options suivantes : la longueur du pendule simple battant la seconde à la latitude de 45°, une fraction de la longueur du quart du cercle de l'équateur et une fraction de la longueur du quart du méridien terrestre.

Le pendule battant la seconde présentait deux inconvénients, il faisait intervenir une durée et sa longueur variait selon les points du globe. Il aurait fallu définir un facteur de correction en fonction de la pesanteur en chaque point du globe. Le choix se porta sur la fraction de la longueur du quart du méridien terrestre celui-ci est plus facile à mesurer que l'équateur. Le 26 mars 1791, le mètre fut défini comme la dix millionième partie du quart du méridien terrestre. Il fallait donc déterminer la longueur exacte du méridien, et cette mission de géodésie fut confiée à Pierre-François Méchain (1744-1804) et Jean-Baptiste Delambre (1747-1822).

C'est le 7 avril 1795 que le système métrique décimal fut institué. En prenant le mètre comme unité de base, on définit les autres unités : le mètre carré, le mètre cube, le litre (1 L = 1 000 cm^3) et le kilogramme (masse d'un décimètre cube d'eau distillée à 4 °C). Ce système était révolutionnaire non seulement parce qu'il éliminait le chaos, mais également parce que ses multiples et sous-multiples s'obtiennent en multipliant ou en divisant par 10. Pour convertir des pieds en pouces, il faut multiplier par 12 et la conversion inverse nécessite une division par 12. Pour convertir des verges en pouces, il faut multiplier par 36 et, pour convertir des pieds carrés en pouces carrés, il faut multiplier par 144, et ainsi de suite. Dans le système métrique décimal, pour exprimer une mesure de longueur en un multiple ou en un sous-multiple, on déplace simplement la virgule décimale d'une position; pour exprimer une mesure d'aire en un multiple ou en un sous-multiple, on déplace la virgule décimale de deux positions; pour exprimer une mesure de volume en un multiple ou en un sous-multiple, on déplace la virgule décimale de trois positions.

En 1875, fut créé le Bureau international des poids et mesures, qui prit le relais de la France dans la conservation des étalons et la production de copies des étalons pour répondre aux besoins des pays de plus en plus nombreux à adhérer à ce système. La précision de la définition du mètre étalon a une incidence sur la précision des mesures effectuées avec cet étalon. Pour répondre aux exigences des sciences et des techniques, il a fallu redéfinir le mètre étalon afin d'obtenir des mesures de plus en plus précises. Le 14 août 1960, le mètre fut redéfini comme étant égal à 1 650 763,73 fois la longueur d'onde, dans le vide, d'une radiation orangée d'un atome de krypton 86. En 1983, dans la foulée des recherches sur la vitesse de la lumière et des horloges atomiques, le mètre fut à nouveau redéfini comme la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide pendant 1/299 792 458 de seconde. La définition en fonction de la mesure du méridien permettait d'établir la longueur du mètre avec une précision de 10^{-4}, la définition en fonction de la vitesse de la lumière donne une précision de 10^{-11}.

Ces définitions respectent l'objectif visé par les fondateurs du système métrique, soit un mètre étalon invariable, reproductible partout et ne possédant aucune caractéristique le rattachant à un pays en particulier.

3.4 Exercices

1. Dire quelles sont les quantités proportionnelles.
   a) 8 ; 12 ; 18 ; 27
   b) x ; x^2y ; y ; xy^2
   c) $x - y$; $x^2 - y^2$; $x + y$; $x^2 + 2xy + y^2$

2. Déterminer la quatrième proportionnelle des nombres ou expressions donnés.
   a) 2 ; 5 ; 8
   b) x ; xy ; y
   c) x ; x^2 ; 1
   d) $(x - y)$; $(x + y)$; $(x^2 - y^2)$

3. Déterminer un moyen proportionnel entre les nombres ou expressions donnés.
   a) 4 et 69
   b) $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{16}$
   c) $(x^2 + xy)$ et $(y^2 + xy)$
   d) $\frac{x-3}{x+3}$ et $x^2 - 9$

4. Un tuyau de renvoi a une dénivellation de 8 cm par mètre. Exprimer cette dénivellation sous la forme d'un rapport.

5. Résoudre les équations suivantes.
   a) $\frac{5}{x+4} = \frac{4}{x-2}$
   b) $\frac{x-4}{x+4} = \frac{9}{11}$
   c) $\frac{x-3}{4} = \frac{5}{x-2}$
   d) $\frac{x-7}{3} = \frac{10}{2x-3}$

6. Déterminer la quatrième proportionnelle.
   a) 7 ; 9 ; 14
   b) x^2 ; xy ; xy
   c) $(x - 4)$; $(x + 4)$; $x^2 - 16$
   d) $(x - 5)$; $(x + 5)$; $(x^2 - 7x + 10)$
   e) $(x - 3)$; $(x + 3)$; $(x^3 - 6x^2 + 13x - 12)$

7. Déterminer un moyen proportionnel entre les nombres ou expressions donnés.
   a) 6 et 54
   b) 5 et 125
   c) 18 et 98
   d) $x^2 + 4x$ et $16 + 4x$
   e) x^3y et xyz^2

8. Un carré mesure a cm de côté.
   a) Si on multiplie la longueur du côté par 2, par quel facteur l'aire de la surface est-elle multipliée ?
   b) Exprimer ce facteur à l'aide d'un exposant.
   Remarque : Le rapport des aires est égal au rapport des carrés des côtés.

9. Un carré mesure a cm de côté.
   a) Si on multiplie la longueur du côté par un facteur b, par quel facteur l'aire de la surface est-elle multipliée ?
   b) Quelle est l'aire du carré obtenu ?

10. Un cube mesure a cm de côté.
    a) Si on multiplie la longueur du côté par 4, par quel facteur le volume est-il multiplié ?
    b) Exprimer ce facteur à l'aide d'un exposant.
    Remarque: Le rapport des volumes est égal au rapport des cubes des côtés.

11. Un cube mesure a cm de côté.
    a) Si on multiplie la longueur du côté par un facteur b, par quel facteur le volume est-il multiplié ?
    b) Quel est le volume du cube obtenu ?

12. La maquette d'une sculpture a une masse de 12,0 kg et mesure 40,0 cm de hauteur. On veut réaliser la sculpture dans le même matériau mais avec une hauteur de 1,80 m. Exprimer la masse de la sculpture à l'aide d'un exposant ? (Suggestion: les volumes sont directement proportionnels au cube de leurs lignes homologues et les masses de solides du même matériau sont directement proportionnelles au volume.)

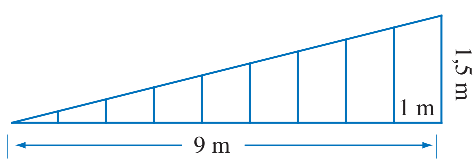
13. Si une sphère de 7,00 cm de diamètre a une masse de 102 g, quelle est la masse d'une sphère du même matériau dont le diamètre est de 12,0 cm ?

14. Si une sphère de métal de 5,00 cm de diamètre a une masse de 16,5 g, quel est le diamètre d'une sphère du même matériau dont la masse est de 880 g ?

15. L'étirement d'un ressort est directement proportionnel à la masse que l'on suspend à ce ressort. Si une masse de 30,0 g provoque une élongation de 5,00 cm, quelle masse faut-il suspendre au ressort pour l'étirer de 7,00 cm ?

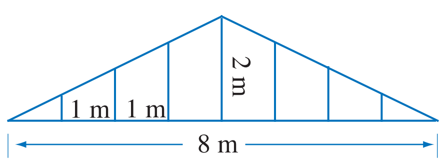
16. Lorsqu'il y a un orage, la distance qui nous sépare de la foudre est directement proportionnelle au temps qui s'écoule entre le moment où on voit l'éclair et celui où on entend le tonnerre. Si on entend le tonnerre 9 s après avoir vu l'éclair, la foudre a frappé à environ 3 km. À quelle distance la foudre a-t-elle frappé si le son nous parvient 4 s après avoir vu l'éclair ? Que représente la constante de proportionnalité calculée ?

17. On doit construire une rampe avec une dénivellation de 1,5 m pour une distance horizontale de 9 m (longueurs exactes).



Les supports de la rampe doivent être espacés de 1 m. Quelle est la longueur de chacun des supports ?

18. On doit construire un toit avec une dénivellation de 2 m pour une longueur horizontale de 4 m. Les supports du toit doivent être espacés de 1 m. Calculer leur longueur.

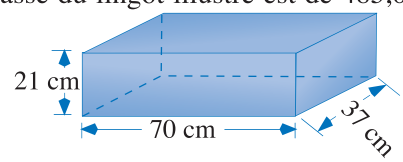


19. Le rapport idéal pour la pente d'un escalier est de 7/10. Quelle doit être la longueur d'un escalier dont la hauteur est de 2,1 m ?

20. Il faut ériger un socle pour une sculpture de béton de 2,40 m de hauteur. Déterminer la masse que doit supporter le socle, sachant que la maquette en béton de la sculpture mesurant 30,0 cm de hauteur a une masse 1,75 kg.

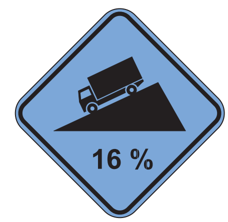
21. Lorsqu'on suspend une masse à un ressort, celui-ci subit une élongation proportionnelle à la masse suspendue. Si une masse de 14 kg produit une élongation de 3,4 cm, quelle serait l'élongation si on suspendait une masse de 24 kg ?

22. La masse du lingot illustré est de 485,0 kg.



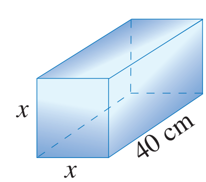
a) Estimer la masse volumique du métal constituant le lingot.
b) Calculer la densité relative du métal constituant le lingot.
c) Identifier le métal à l'aide de sa densité.

23. Au cours d'un voyage dans Charlevoix, vous apercevez le panneau routier suivant.

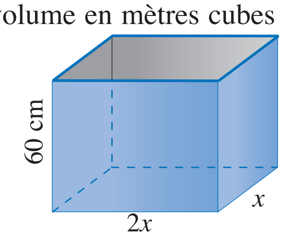


Exprimer l'information fournie par ce panneau à l'aide de distances en mètres.

24. On vous demande de concevoir une boîte avec couvercle. La largeur doit être égale à la hauteur, la longueur doit être de 40 cm et l'aire de la surface doit être de 0,4 m^2. Quelles seront les dimensions de la boîte ? Quel sera son volume en mètres cubes ?

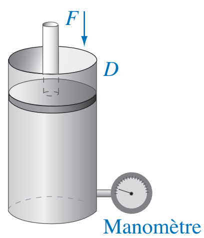


25. On vous demande de concevoir une boîte sans couvercle dont la longueur doit être le double de la largeur et dont la hauteur doit être de 60 cm. L'aire de la surface de la boîte doit être de 17 600 cm^2. Quelles seront les dimensions de la boîte ? Quel sera son volume en mètres cubes ?



26. Un homme de 80 kg, chaussé de bottes de 33 cm sur 12 cm, se déplace sur la neige.
   a) Quelle est la pression exercée par cet homme sur la neige lorsque toute sa masse repose sur un pied ?
   b) Pour continuer sa promenade, l'homme décide de chausser des skis qui mesurent 1,8 m sur 10 cm. Quelle pression exerce-t-il alors sur la neige lorsque tout son poids repose sur un seul ski ?

27. On estime le rayon d'un piston à 12 cm. Quelle force s'exerce sur le piston si le manomètre indique 9,2 kPa ?



28. Sachant que la valeur d'une verge est de 91,44 cm, exprimer les mesures suivantes en centimètres.
   a) 1 po
   b) 1 pi
   c) 1 mi
   d) 1 lieue (3 mi)
   e) 3,6 mi
   f) 1 po^2
   g) 1 pi^2
   h) 1 vg^2
   i) 1 po^3
   j) 1 pi^3
   k) 1 vg^3

29. Vous devez faire ériger un socle en béton pour y installer une sculpture. Le socle doit avoir une longueur de 345 cm, une largeur de 175 cm et une hauteur de 185 cm. La compagnie qui fabrique le béton le livre si la quantité est d'au moins 1 vg^3 et elle ne prépare que des multiples de 0,5 vg^3. Quelle quantité de béton devez-vous commander ?

30. L'acre est une mesure de superficie valant 4 840 vg^2.
   a) Quel est le nombre de pieds carrés dans une acre ?
   b) Quel est le nombre de mètres carrés dans une acre ?
   c) Un terrain de 2 850 pi sur 600 pi est mis en vente. Déterminer la superficie de ce terrain en acres.

31. L'are est une mesure de superficie qui équivaut à 100 m^2 et un hectare vaut 100 ares.
   a) Quel est l'équivalent en pieds carrés d'une mesure de 1 are ? Quel est l'équivalent en verges carrées ?
   b) Une terre mesure 3 250 pi sur 2 730 pi. Déterminer sa superficie en hectares.

32. Déterminer le travail effectué par une force de 574 N sur une distance de 27,2 m dans la direction de la force. Exprimer le tout en notation de l'ingénieur et en respectant les règles de présentation des résultats d'opérations sur des nombres arrondis.

33. Une force a permis d'effectuer un travail de 252 kJ en déplaçant un objet sur une distance de 129 m dans la direction de la force. Trouver l'intensité de cette force.

34. Déterminer le travail effectué par une force de 2,5 kN sur une distance de 3,2 km dans la direction de la force. Exprimer le tout en notation de l'ingénieur et en respectant les règles de présentation des résultats d'opérations sur des nombres arrondis.

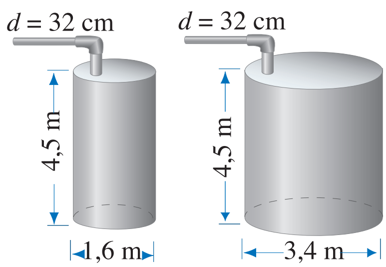
35. Une surface de 1 kilomètre carré (km^2) est équivalente à la surface d'un carré de 1 kilomètre de côté. Quelle est la mesure en mètres carrés d'une surface de 1 km^2 ?

36. Une surface de 1 hectare (ha) est équivalente à la surface d'un carré de 100 mètres de côté. Quelle est la mesure en mètres carrés d'une surface de 1 hectare ?

37. Une bande de terrain mesure 337 m de large sur 1 570 m de long. Trouver la superficie de cette bande de terrain en mètres carrés, en hectares et en kilomètres carrés.

38. Sachant que le coulomb représente la charge électrique de $6{,}242 \times 10^{18}$ électrons, trouver la charge totale de $3{,}82 \times 10^{19}$ électrons.

39 Deux réservoirs cylindriques sont alimentés par une conduite de 32 cm. Le temps de remplissage du petit réservoir est de 45 minutes.



a) Quel est le temps de remplissage du grand réservoir pour une même vitesse d'écoulement dans le tuyau d'alimentation ?

b) Quelle est la vitesse d'écoulement dans la conduite d'alimentation de ces réservoirs ?

40. L'entreprise qui vous emploie fabrique des réservoirs collecteurs d'eau de pluie qui servent comme source d'eau potable d'appoint pour des chalets en forêt lorsque le puits est à sec. Ces réservoirs sont montés sur une plateforme à trois mètres du sol.

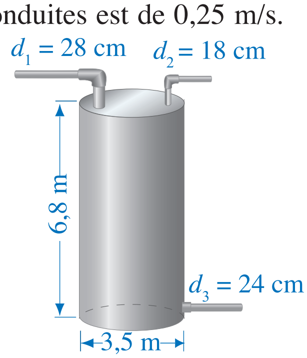
a) Calculer la capacité du réservoir en litres.

b) Calculer la pression au fond du réservoir lorsqu'il est plein.

c) Calculer la pression d'eau dans la conduite au niveau du sol lorsque le réservoir est plein.

d) Au cours d'un orage, il tombe 12 mm de pluie. Calculer le nombre de litres d'eau recueillies dans le réservoir durant cet orage.

41. Un réservoir d'huile est muni de deux conduites de remplissage, soit une conduite principale de 28 cm de diamètre et une conduite secondaire de 18 cm de diamètre. La vitesse d'écoulement maximale dans ces conduites est de 0,25 m/s.



a) Calculer le temps nécessaire pour remplir le réservoir lorsque seule la conduite principale est en fonction au maximum de sa capacité.

b) Calculer le temps nécessaire pour remplir le réservoir lorsque seule la conduite secondaire est en fonction au maximum de sa capacité.

c) Calculer le temps nécessaire pour remplir le réservoir lorsque les deux conduites sont en fonction au maximum de leur capacité.

d) Calculer la pression manométrique au fond du réservoir lorsqu'il est plein.

e) On a décidé de vider complètement le réservoir pour éliminer les dépôts accumulés dans le fond afin de l'utiliser comme réservoir d'essence. La vidange se fait par la conduite de diamètre d_3 et le système de pompage assure une vitesse d'écoulement de 0,13 m/s. Quel sera le temps nécessaire pour vider le réservoir si la jauge indique qu'il est aux trois quarts de sa capacité ?

f) Le nettoyage étant terminé, on veut planifier l'opération de remplissage. Pour ce faire, vous avez été chargé de représenter, sur un même système d'axes, le volume de liquide en fonction du temps selon que la conduite secondaire ou la conduite principale ou les deux conduites sont en fonction.

42. Si le diamètre du piston d'un vérin mesure 75 mm et que le diamètre de sa tige est de 25 mm, calculer l'aire de la couronne en mètres carrés.

43. À combien doit-on ajuster la pression manométrique (kPa) pour qu'un vérin de 100 mm de diamètre d'alésage ne dépasse pas 15 700 N de poussée ?

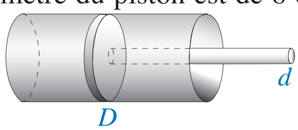
44. Quelle est la vélocité de sortie (en m/min) de la tige d'un vérin de 100 mm de diamètre alimenté par une pompe qui débite 12 L/min ?

45. Quel devrait être le débit d'alimentation (L/min) d'un vérin dont les dimensions sont : 150 mm de diamètre pour le piston, 50 mm pour la tige et 0,5 m de course si la course de rentrée de la tige doit être effectuée en 45 s ?

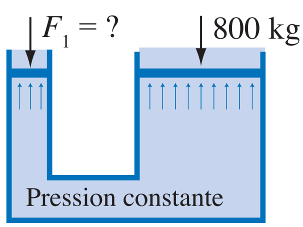
46. Un vérin de 30 cm de diamètre d'alésage, de 15 cm de tige et de 0,8 m de course doit rentrer en une minute. Quel est le débit (L /min) permettant de réaliser ce mouvement ?

47. Deux réservoirs cylindriques fermés par des pistons sont reliés par un tuyau. Le petit réservoir a un diamètre de 4 cm et le grand réservoir, un diamètre de 32 cm.
    a) Si on applique une force de 200 N sur le piston du petit cylindre, quelle est la force développée par le piston du grand cylindre ?
    b) Si on enfonce de 40 cm le piston du petit cylindre, quel sera le déplacement du piston du grand cylindre ?

48. Quelle force faut-il exercer sur le piston ci-contre pour que la pression d'huile soit de 7,4 kPa, sachant que le diamètre du piston est de 8 cm ?



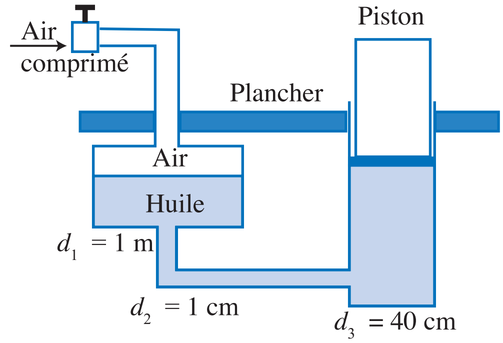
49. Deux cylindres sont reliés par un tuyau et l'assemblage est rempli d'huile. Un des cylindres a un diamètre de 6 cm et l'autre, un diamètre de 24 cm.



    a) Quelle force exerce la masse de 800 kg sur le piston du gros cylindre ?
    b) Quelle est alors la pression exercée par ce piston sur l'huile du réservoir?
    c) Quelle sera la force développée par l'autre piston ?

50. Un vérin cylindrique de 10 cm de diamètre avec une course de 75 cm retourne son volume d'huile au réservoir dans une période de 15 secondes.
    a) Donner le débit en m^3/s.
    b) Donner le débit en L/min.
    c) Sachant que ce vérin développe 15 kN de poussée, quelle est la pression manométrique en N/m^2 ?

51. La figure ci-contre illustre un vérin hydraulique comme ceux utilisés dans les garages pour soulever les automobiles.



    a) Si la pression exercée par l'air comprimé est de 1 500 kPa, quelle est la force développée par le piston ?
    b) À quelle hauteur va monter le piston si la pression d'air comprimé fait descendre le niveau d'huile de 20,0 cm dans le réservoir ?
    c) Quelle doit être la pression de l'air comprimé dans le réservoir pour soulever une voiture de 1 200 kg ?
    d) Quel volume l'air comprimé doit-il occuper dans le réservoir pour soulever une voiture de 1 200 kg à 2,00 m du sol ?
    e) Quelle force l'air comprimé exerce-t-il sur l'huile du réservoir pour équilibrer la force exercée sur le piston par une automobile de 1 200 kg ?
    f) Lorsque le piston est à 2,00 mètres du sol et qu'on laisse l'air comprimé s'échapper du réservoir, le piston reprend sa position normale en 24 secondes. Quel est alors le débit dans le cylindre principal ?
    g) Quelle est la vitesse d'écoulement dans le cylindre principal lorsque le piston reprend sa position normale ?
    h) Quelle est la vitesse d'écoulement dans le tuyau d'alimentation lorsque le piston reprend sa position normale ?
    i) Quelle est la vitesse d'écoulement dans le réservoir lorsque le piston reprend sa position normale ?
    j) Décrire algébriquement la force développée par le piston en fonction de la pression de l'air comprimé dans le réservoir et la représenter graphiquement.