Dérivée : fonctions trigonométriques inverses

Solutions

CHAPITRE 12

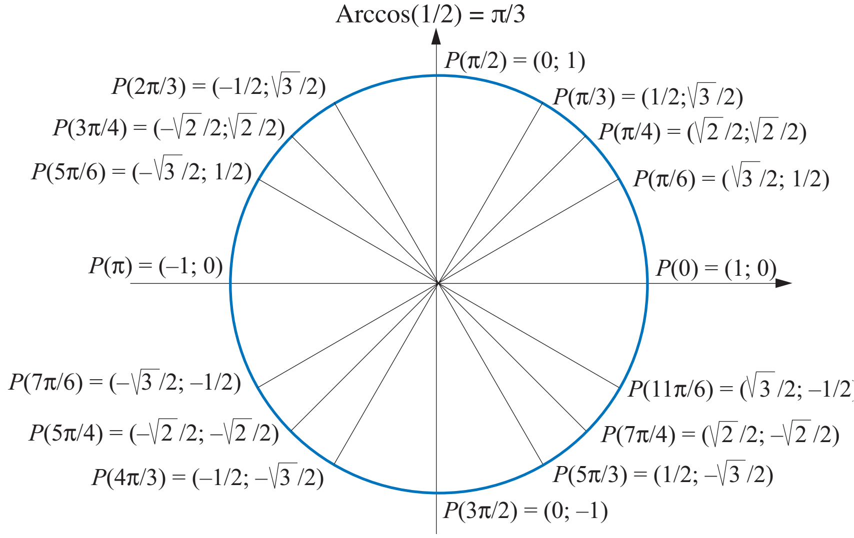
EXERCICES 12.1

1. Par définition de la fonction arccosinus, on doit déterminer l'angle dans l'intervalle $[0; \pi]$ dont le cosinus est égal à 1/2. En effet :

$$y = \text{Arccos}(1/2) \text{ si et seulement si } \cos(y) = 1/2$$

En considérant le cercle trigonométrique, on trouve alors $y = \pi/3$, c'est-à-dire :

$$\text{Arccos}(1/2) = \pi/3$$



2. Par définition de la fonction arctangente, on doit déterminer l'angle dans l'intervalle $]-\pi/2; \pi/2[$ dont la tangente est égale à $\sqrt{3}$. En effet :

$$y = \text{Arctan}(\sqrt{3}) \text{ si et seulement si } \tan(y) = \sqrt{3}$$

En considérant le cercle trigonométrique, on trouve alors $y = \pi/3$, c'est-à-dire :

$$\text{Arctan}(\sqrt{3}) = \pi/3$$

3. Par définition de la fonction arcsécante, on doit déterminer l'angle dans l'union d'intervalles $[0; \pi/2[\cup [\pi; 3\pi/2[$ dont la sécante est égale à 2. En effet :

$$y = \text{Arcsec}(2) \text{ si et seulement si } \csc(y) = 2$$

Puisque $\sec y = \dfrac{1}{\cos y}$, on a $\cos y = \dfrac{1}{\sec y}$. On cherche donc y tel que $\cos y = 1/2$.

En considérant le cercle trigonométrique, on trouve alors $y = \pi/3$, c'est-à-dire :

$$\text{Arcsec}(2) = \pi/3$$

4. Par définition de la fonction arccosécante, on doit déterminer l'angle dans l'union d'intervalles $]0; \pi/2] \cup]\pi; 3\pi/2]$ dont la cosécante est égale à 2. En effet :

$$y = \text{Arccsc}(2) \text{ si et seulement si } \csc(y) = 2$$

Puisque $\csc y = \dfrac{1}{\sin y}$, on a $\sin y = \dfrac{1}{\csc y}$. On cherche donc y tel que $\sin y = 1/2$.

En considérant le cercle trigonométrique, on trouve alors $y = \pi/6$, c'est-à-dire :

$$\text{Arccsc}(2) = \pi/6$$

5. Par définition de la fonction arctangente, on doit déterminer l'angle dans l'intervalle]–π/2; π/2[dont la tangente est égale à –1. En effet :

$$y = \text{Arctan}(-1) \text{ si et seulement si } \tan(y) = -1$$

En considérant le cercle trigonométrique, on trouve alors $y = -\pi/4$, c'est-à-dire :

$$\text{Arctan}(-1) = -\pi/4$$

6. Par définition de la fonction arccotangente, on doit déterminer l'angle dans l'intervalle]0; π[dont la cotangente est égale à $-\sqrt{3}$. En effet :

$$y = \text{Arccot}(-\sqrt{3}) \text{ si et seulement si } \cot(y) = -\sqrt{3}$$

En considérant le cercle trigonométrique, on trouve alors $y = 5\pi/6$, c'est-à-dire :

$$\text{Arctan}(-\sqrt{3}) = 5\pi/6$$

7. Déterminons d'abord, Arccos(1/2), l'image par la fonction intérieure. Par définition de la fonction, on doit déterminer l'angle dans l'intervalle [0; π] dont le cosinus est égal à 1/2. En effet :

$$y = \text{Arccos}(1/2) \text{ si et seulement si } \cos(y) = 1/2$$

En considérant le cercle trigonométrique, on trouve alors $y = \pi/3$, c'est-à-dire $\arccos(1/2) = \pi/3$.
Par conséquent :

$$\tan(\text{Arccos}(1/2)) = \tan(\pi/3)$$

Et, puisque $\tan(\pi/3) = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$, on obtient :

$$\tan(\text{Arcscos}(1/2)) = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}.$$

8. Déterminons d'abord, Arctan(–1), l'image par la fonction intérieure. Par définition de la fonction, on doit déterminer l'angle dans l'intervalle]–π/2; π/2[dont la tangente est égale à –1. En effet :

$$y = \text{Arctan}(-1) \text{ si et seulement si } \tan(y) = -1$$

En considérant le cercle trigonométrique, on trouve alors $y = -\pi/4$, c'est-à-dire $\arctan(-1) = -\pi/4$. Par conséquent :

$$\cos(\text{Arctan}(-1)) = \cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2.$$

9. Déterminons d'abord, Arccos($\sqrt{3}/2$), l'image par la fonction intérieure. Par définition de la fonction, on doit déterminer l'angle dans l'intervalle [0; π] dont le cosinus est égal à $\sqrt{3}/2$. En effet :

$$y = \text{Arccos}(\sqrt{3}/2) \text{ si et seulement si } \cos(y) = \sqrt{3}/2$$

En considérant le cercle trigonométrique, on trouve alors $y = \pi/6$, c'est-à-dire $\arccos(\sqrt{3}/2) = \pi/6$.
Par conséquent :

$$\tan(\text{Arccos}(\sqrt{3}/2)) = \tan(\pi/6) = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

10. Déterminons d'abord, Arcsec(–2), l'image par la fonction intérieure. Par définition de la fonction, on doit déterminer l'angle dans l'union d'intervalles [0; π/2[∪ [π; 3π/2[dont la sécante est égale à –2. En effet :

$$y = \text{Arcsec}(-2) \text{ si et seulement si } \sec(y) = -2$$

Puisque $\sec y = \dfrac{1}{\cos y}$, on a $\cos y = \dfrac{1}{\sec y}$. On cherche donc y tel que $\cos y = -1/2$.

En considérant le cercle trigonométrique, on trouve alors $y = 4\pi/3$, c'est-à-dire $\text{arcsec}(-2) = 4\pi/3$.
Par conséquent :

$$\cot(\text{Arcsec}(-2)) = \cot(4\pi/3) = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

11. Déterminons d'abord, Arcsin($-\sqrt{3}/2$), l'image par la fonction intérieure. Par définition de la fonction, on doit déterminer l'angle dans l'intervalle [–π/2; π/2] dont le sinus est égal à $-\sqrt{3}/2$. En effet :

$$y = \text{Arcsin}(-\sqrt{3}/2) \text{ si et seulement si } \sin(y) = -\sqrt{3}/2$$

En considérant le cercle trigonométrique, on trouve alors $y = -\pi/3$, c'est-à-dire $\text{arcsec}(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3$.
Par conséquent :

$$\sec(\text{Arcsin}(-\sqrt{3}/2)) = \sec(-\pi/3) = 2$$

12. Déterminons d'abord, Arccot($\sqrt{3}/3$), l'image par la fonction intérieure. Par définition de la fonction, on doit déterminer l'angle dans l'intervalle]0; π[dont la cotangente est égale à $\sqrt{3}/3$. En effet :

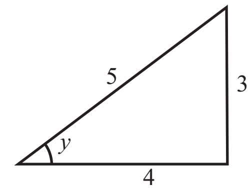
$$y = \text{Arccot}(\sqrt{3}/3) \text{ si et seulement si } \cot(y) = \sqrt{3}/3$$

En considérant le cercle trigonométrique, on trouve alors $y = \pi/6$, c'est-à-dire arccot($\sqrt{3}/3$) = π/6.
Par conséquent :

$$\csc(\text{Arccot}(\sqrt{3}/3)) = \csc(\pi/6) = 2$$

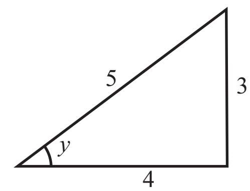
13. Soit y tel que y = Arcsin (3/5). On a alors sin y = 3/5. En considérant un triangle dont l'hypoténuse est de longueur 5 et le côté opposé à l'angle y est de longueur 3, on obtient par Pythagore que le troisième côté est de longueur 4. Puisque la tangente est le rapport du côté opposé sur le côté adjacent à l'angle y, on trouve tan y = 3/4. Par conséquent :

$$\tan(\text{Arcsin}(3/5)) = 3/4$$



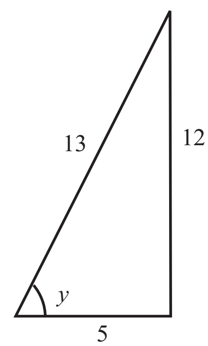
14. Soit y tel que y = Arccot (4/3). On a alors cot y = 4/3. En considérant un triangle dont le côté adjacent à l'angle y est de longueur 4 et le côté opposé à l'angle y est de longueur 3, on obtient par Pythagore que l'hypoténuse est de longueur 5. Puisque la cosécante est le rapport de l'hypoténuse sur le côté opposé à l'angle y, on trouve csc y = 5/3. Par conséquent :

$$\csc(\text{Arccot}(4/3)) = 5/3$$



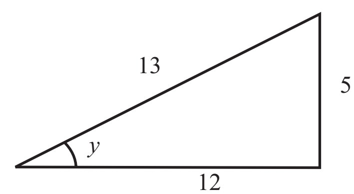
15. Soit y tel que y = Arccos (5/13). On a alors cos y = 5/13. En considérant un triangle dont l'hypoténuse est de longueur 13 et le côté adjacent à l'angle y est de longueur 5, on obtient par Pythagore que le troisième côté est de longueur 12. Puisque la cotangente est le rapport du côté adjacent sur le côté opposé à l'angle y, on trouve cot y = 5/12. Par conséquent :

$$\cot(\text{Arccos}(5/13)) = 5/12$$



16. Soit y tel que y = Arccos (12/13). On a alors cos y = 12/13. En considérant un triangle dont l'hypoténuse est de longueur 13 et le côté adjacent à l'angle y est de longueur 12, on obtient par Pythagore que le troisième côté est de longueur 5. Puisque la cotangente est le rapport du côté adjacent sur le côté opposé à l'angle y, on trouve cot y = 12/5. Par conséquent :

$$\cot(\text{Arccos}(12/13)) = 12/15$$



17. Puisque sin (π/2) = 1, on a Arctan(sin π/2) = arctan (1) = π/4.

18. Puisque cos (π) = –1, on a Arccsc(cos π) = arccsc (–1) = 3π/2.

19. Puisque tan π/4 = 1, on a Arcsec(2 tan(π/4)) = arcsec(2) = y, d'où sec y = 2 et cos y = 1/2, on trouve donc y = π/3.

20. Puisque cot π/4 = 1, on a Arccsc(–2 cot(π/4)) = Arccsc(–2) = y, d'où csc y = –2 et sin y = –1/2, on trouve donc y = 7π/6.

21. L'expression n'a aucun sens puisque le domaine de la fonction est [–1; 1].

22. L'expression a du sens puisque le domaine de la fonction est]–∞; –1] ∪ [1; ∞[.

23. L'expression a du sens puisque le domaine de la fonction est .

24. L'expression a du sens puisque le codomaine de la fonction est]0; π[.

25. L'expression n'a aucun sens puisque le domaine de la fonction est $]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$.

26. L'expression n'a aucun sens puisque le codomaine de la fonction est $[-\pi/2; \pi/2]$.

27. Soit $y = \text{Arccos } x$, on alors $x = \cos y$. En dérivant implicitement par rapport à x, on obtient :

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\cos y)$$
$$1 = -\sin y \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y}.$$

Pour exprimer en fonction de x, on utilise le fait que :
$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ et $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$.

Or, $y \in [0; \pi]$, le sinus est donc positif et on a, en substituant :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Par conséquent, la dérivée de $y = \text{Arccos } x$ est $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

28. Soit $y = \text{Arccot } x$, on alors $x = \cot y$. En dérivant implicitement par rapport à x, on obtient :

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\cot y)$$
$$1 = -\csc^2 y \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\csc^2 y}.$$

Pour exprimer en fonction de x, on utilise le fait que :
$\csc^2 y = 1 + \cot^2 y$
Or, le carré de la cotangente est positif et on a, en substituant :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\csc^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Par conséquent, la dérivée de $\text{Arccot } x$ est $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

29. Soit $y = \text{Arccsc } x$, on alors $x = \csc y$. En dérivant implicitement par rapport à x, on obtient :

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\csc y)$$
$$1 = -\csc y \cot y \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-\csc y \cot y}.$$

Pour exprimer en fonction de x, on utilise le fait que :
$\csc^2 y = 1 + \cot^2 y$ et $\cot y = \sqrt{\csc^2 y - 1}$.

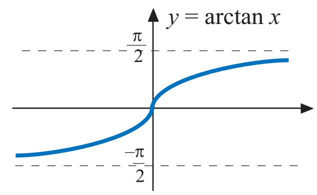
Or, $y \in\ ]0; \pi/2] \cup]\pi; 3\pi/2]$, la cotangente est donc positive et on a, en substituant :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\csc y\sqrt{\csc^2 y - 1}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Par conséquent, la dérivée de $y = \text{Arccsc } x$ est $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

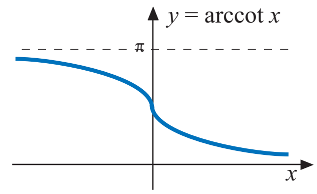
30. En considérant le graphique de la fonction arctangente, on peut écrire :

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{Arc}\tan x = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arc}\tan x = -\frac{\pi}{2}.$$



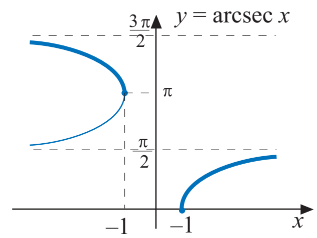
31. En considérant le graphique de la fonction arccotangente, on peut écrire :

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{Arccot} x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arccot} x = \pi.$$



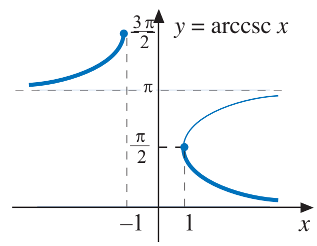
32. En considérant le graphique de la fonction arcsécante, on peut écrire :

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{Arcsec} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arcsec} x = \frac{3\pi}{2}.$$



33. En considérant le graphique de la fonction arccosécante, on peut écrire :

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{Arccsc} x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arccsc} x = \pi.$$



34. $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{Arc}\sin(2x)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\frac{d}{dx}(2x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \times 2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

35. $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{Arc}\cos(x^2-1)\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(x^2-1\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(x^2-1\right)^2}} \times 2x = \frac{-2x}{\sqrt{-x^4+2x^2}}.$$

36. $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{Arc}\tan(x+1)\right) = \frac{1}{1+(x+1)^2}\frac{d}{dx}(x+1) = \frac{1}{1+(x+1)^2} \times 1 = \frac{1}{x^2+2x+2}.$$

37. $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{Arc}\tan(1/x)\right) = \frac{1}{1+(1/x)^2}\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = \frac{1}{1+(1/x)^2} \times -x^{-2} = \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{-1}{x^2+1}.$$

38. $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{Arc}\cos(e^x)\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}} \times e^x = \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

39. $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{Arcsec}(\sqrt{x})\right) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{(\sqrt{x})^2-1}}\frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{(\sqrt{x})^2-1}} \times \frac{1}{2}\left(x^{-1/2}\right) = \frac{1}{2x\sqrt{(x-1}}.$$

40. $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left((\operatorname{Arc}\cos(3x))^2\right) = 2\left(\operatorname{Arc}\cos 3x\right)^1 \frac{d}{dx}\left(\operatorname{Arc}\cos 3x\right) = 2\left(\operatorname{Arc}\cos 3x\right) \times \frac{-1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\frac{d}{dx}(3x)$$

$$= 2\left(\operatorname{Arc}\cos 3x\right) \times \frac{-1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \times 3 = \frac{-6\operatorname{Arc}\cos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

41. $f'(x)=\dfrac{d}{dx}(\ln(\text{Arc}\tan x))=\dfrac{1}{\text{Arc}\tan x}\dfrac{d}{dx}(\text{Arc}\tan x)=\dfrac{1}{\text{Arc}\tan x}\times\dfrac{1}{1+x^2}.$

42. $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(2x\text{Arc}\tan x-\ln(1+x^2)\right)=\text{Arc}\tan x\dfrac{d}{dx}(2x)+2x\dfrac{d}{dx}(\text{Arc}\tan x)-\dfrac{d}{dx}\left(\ln(1+x^2)\right)$

$=\text{Arc}\tan x\times 2+2x\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{d}{dx}\left(1+x^2\right)=\text{Arc}\tan x\times 2+2x\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}\times 2x$

$=2\text{Arc}\tan x.$

43. $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left((\text{Arc}\sin(3x))^{1/2}\right)=\dfrac{1}{2}(\text{Arc}\sin 3x)^{-1/2}\dfrac{d}{dx}(\text{Arc}\sin 3x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\text{Arc}\sin 3x}}\times\dfrac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\dfrac{d}{dx}(3x)$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{\text{Arc}\sin 3x}}\times\dfrac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\times 3=\dfrac{3}{2\sqrt{1-9x^2}\sqrt{\text{Arc}\sin 3x}}.$

44. $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\text{Arcsec}(\sqrt{x^2-1})\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-1}}\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2-1}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-2}}\times\dfrac{1}{2}\left((x^2-1)^{-1/2}\right)\dfrac{d}{dx}(x^2-1)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-2}}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\times 2x=\dfrac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}.$

45. $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(x\sqrt{1-x^2}-\text{Arc}\sin x\right)=\sqrt{1-x^2}\dfrac{d}{dx}(x)+x\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right)-\dfrac{d}{dx}(\text{Arc}\sin x)$

$=\sqrt{1-x^2}\times 1+x\times\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}\dfrac{d}{dx}(1-x^2)-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\sqrt{1-x^2}+x\times\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}\times(-2x)-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$

46. $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}+\text{Arc}\cos x\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\dfrac{d}{dx}(\text{Arc}\cos x)$

$=\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}\dfrac{d}{dx}(1-x^2)+\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}\times(-2x)+\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}.$

47. $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\text{Arc}\tan x^2}{x^2}\right)=\dfrac{x^2\dfrac{d}{dx}(\text{Arc}\tan x^2)-\text{Arc}\tan x^2\dfrac{d}{dx}(x^2)}{x^4}$

$=\dfrac{x^2\times\dfrac{1}{1+x^2}-\text{Arc}\tan x^2\times 2x}{x^4}=\dfrac{\dfrac{x^2}{1+x^2}-2x\text{Arc}\tan x^2}{x^4}$

$=\dfrac{\dfrac{x}{1+x^2}-2\text{Arc}\tan x^2}{x^3}$

48. $$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\text{Arc}\sin x}\right)=\frac{\text{Arc}\sin x\dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)^{1/2}\right)-\sqrt{1-x^2}\,\dfrac{d}{dx}(\text{Arc}\sin x)}{(\text{Arc}\sin x)^2}$$
$$=\frac{\text{Arc}\sin x\times\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{d}{dx}(1-x^2)-\sqrt{1-x^2}\times\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\text{Arc}\sin x)^2}$$
$$=\frac{\text{Arc}\sin x\times\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\times(-2x)-\sqrt{1-x^2}\times\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\text{Arc}\sin x)^2}$$
$$=\frac{\dfrac{-x\text{Arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{(\text{Arc}\sin x)^2}=\frac{-x\text{Arc}\sin x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\,(\text{Arc}\sin x)^2}.$$

49. $$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Arc}\sin x}{\text{Arc}\cos x}\right)=\frac{\text{Arc}\cos x\dfrac{d}{dx}(\text{Arc}\sin x)-\text{Arc}\sin x\dfrac{d}{dx}(\text{Arc}\cos x)}{(\text{Arc}\cos x)^2}$$
$$=\frac{\text{Arc}\cos x\times\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\text{Arc}\sin x\times\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\text{Arc}\cos x)^2}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\text{Arc}\cos x+\text{Arc}\sin x)}{(\text{Arc}\cos x)^2}$$
$$=\frac{\text{Arc}\cos x+\text{Arc}\sin x}{(\text{Arc}\cos x)^2\sqrt{1-x^2}}.$$

50. $$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan x}{\text{Arc}\cos x}\right)=\frac{\text{Arc}\cos x\dfrac{d}{dx}(\tan x)-\tan x\dfrac{d}{dx}(\text{Arc}\cos x)}{(\text{Arc}\cos x)^2}$$
$$=\frac{\text{Arc}\cos x\times\dfrac{1}{1+x^2}-\tan x\times\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\text{Arc}\cos x)^2}=\frac{\dfrac{\text{Arc}\cos x}{1+x^2}-\dfrac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\text{Arc}\cos x)^2}.$$

51. $$\frac{d}{dx}\left(x^3-\text{Arc}\cos y\right)=\frac{d}{dx}(\tan x+4)$$
$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right)-\frac{d}{dx}(\text{Arc}\cos y)=\sec^2 x$$
$$3x^2-\frac{-1}{1+y^2}\frac{d}{dx}(y)=\sec^2 x$$
$$3x^2-\frac{-1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=\sec^2 x$$
$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=\sec^2 x-3x^2$$
$$\frac{dy}{dx}=\left(1+y^2\right)\left(\sec^2 x-3x^2\right).$$

52.
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(e^y+\operatorname{Arcsin}x\right)&=\frac{d}{dx}(\sin y)\\
\frac{d}{dx}\left(e^y\right)+\frac{d}{dx}(\operatorname{Arcsin}x)&=\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}\\
e^y\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1+x^2}&=\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}\\
\left(e^y-\frac{1}{1+y^2}\right)\frac{dy}{dx}&=\frac{-1}{1+x^2}\\
\left(\frac{e^y+y^2e^y-1}{1+y^2}\right)\frac{dy}{dx}&=\frac{-1}{1+x^2}\\
\frac{dy}{dx}&=\frac{1+y^2}{\left(1+x^2\right)\left(e^y+y^2e^y-1\right)}.
\end{aligned}$$

53.
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(y\operatorname{Arctan}x)&=\frac{d}{dx}\left(4-x^2\right)\\
(\operatorname{Arctan}x)\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(\operatorname{Arctan}x)&=-2x\\
\operatorname{Arctan}x\frac{dy}{dx}+y\times\frac{1}{1+x^2}&=-2x\\
\operatorname{Arctan}x\frac{dy}{dx}&=-2x-\frac{y}{1+x^2}\\
\operatorname{Arctan}x\frac{dy}{dx}&=\frac{-2x-2x^2-y}{1+x^2}\\
\frac{dy}{dx}&=\frac{-2x-2x^2-y}{\left(1+x^2\right)\operatorname{Arctan}x}.
\end{aligned}$$

54.
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^2\operatorname{Arcsin}x\right)&=\frac{d}{dx}(3-x\operatorname{Arccos}y)\\
(\operatorname{Arcsin}x)\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+x^2\frac{d}{dx}(\operatorname{Arcsin}x)&=-\operatorname{Arccos}y\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}(\operatorname{Arccos}y)\\
\operatorname{Arcsin}x\times2x+x^2\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}&=-\operatorname{Arccos}y\times1+x\times\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{d}{dx}(y)\\
2x\operatorname{Arcsin}x+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}&=-\operatorname{Arccos}y+\frac{-x}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}\\
\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}&=-\operatorname{Arccos}y-2x\operatorname{Arcsin}x-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\\
\frac{dy}{dx}&=\frac{\sqrt{1-y^2}}{x}\left(-\operatorname{Arccos}y-2x\operatorname{Arcsin}x-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)
\end{aligned}$$

.

55.
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(e^y\operatorname{Arcsin}y\right)&=\frac{d}{dx}\left(3-x^2\right)\\
(\operatorname{Arcsin}y)\frac{d}{dx}\left(e^y\right)+e^y\frac{d}{dx}(\operatorname{Arcsin}y)&=-2x\\
\operatorname{Arcsin}y\times e^y\frac{d}{dx}(y)+e^y\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{d}{dx}(y)&=-2x\\
\operatorname{Arcsin}y\times e^y\frac{dy}{dx}+e^y\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}&=-2x\\
\left(\operatorname{Arcsin}y+\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)e^y\frac{dy}{dx}&=-2x\\
\left(\frac{\operatorname{Arcsin}y\sqrt{1-y^2}+1}{\sqrt{1-y^2}}\right)e^y\frac{dy}{dx}&=-2x\\
\frac{dy}{dx}&=\frac{-2x}{e^y}\left(\frac{\sqrt{1-y^2}}{\operatorname{Arcsin}y\sqrt{1-y^2}+1}\right).
\end{aligned}$$

56. $$\frac{d}{dx}(\mathrm{Arc}\tan y)=\frac{d}{dx}(\tan x+4)$$
$$\frac{1}{1+y^2}\frac{d}{dx}(y)=\sec^2 x$$
$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=\sec^2 x$$
$$\frac{dy}{dx}=\left(1+y^2\right)\sec^2 x.$$

57. $$\frac{d}{dx}\left((\mathrm{Arc}\sin y)^2\right)=\frac{d}{dx}(y\tan x)$$
$$2(\mathrm{Arc}\sin y)^1\frac{d}{dx}(\mathrm{Arc}\sin y)=\tan x\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(\tan x)$$
$$2(\mathrm{Arc}\sin y)^1\times\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{d}{dx}(y)=\tan x\frac{dy}{dx}+y\times\frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{2\,\mathrm{Arc}\sin y}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}=\tan x\frac{dy}{dx}+\frac{y}{1+x^2}$$
$$\left(\frac{2\,\mathrm{Arc}\sin y}{\sqrt{1-y^2}}-\tan x\right)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2}$$
$$\left(\frac{2\,\mathrm{Arc}\sin y-\tan x\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\sqrt{1-y^2}}{(1+x^2)\left(2\,\mathrm{Arc}\sin y-\tan x\sqrt{1-y^2}\right)}.$$

58. $$(\mathrm{Arc}\tan y)^1\frac{d}{dx}(\mathrm{Arc}\tan y)=2\sin x\frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$2(\mathrm{Arc}\tan y)^1\times\frac{1}{1+y^2}\frac{d}{dx}(y)=2\sin x\times\cos x$$
$$\frac{2(\mathrm{Arc}\tan y)}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=\sin 2x$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin 2x\left(1+y^2\right)}{2(\mathrm{Arc}\tan y)}.$$

59. $$\frac{d}{dx}(\mathrm{Arc}\cos xy)=\frac{d}{dx}(x)$$
$$\frac{-1}{\sqrt{1-(xy)^2}}\frac{d}{dx}(xy)=1$$
$$\left(\frac{-1}{\sqrt{1-(xy)^2}}\right)\left(y\frac{d}{dx}(x)+x\frac{d}{dx}(y)\right)=1$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sqrt{1-(xy)^2}-y}{x}.$$

EXERCICES 12.4

1. a) En déterminant l'image de 4 par la fonction, on trouve :

$$f(4) = 2 + \sqrt{4} - 2\arctan 4 \approx 1{,}35.$$

La dérivée de la fonction est : $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(2 + \sqrt{x} - \text{Arc}\tan x\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{1+x^2}$.

La pente de la tangente est : $f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} - \dfrac{2}{1+4^2} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{17} \approx 0{,}132.$

L'équation de la tangente est alors : $y = 0{,}132x + 0{,}822$

b) Le modèle d'approximation linéaire au voisinage de $(4; f(4))$ est :

$$L(x) = 0{,}132x + 0{,}822$$

L'image de 3 par ce modèle donne : $L(3) = 0{,}132 \times 3 + 0{,}822 = 1{,}218$
L'image de 5 par ce modèle donne : $L(5) = 0{,}132 \times 5 + 0{,}822 = 1{,}482$

c) La différentielle au voisinage de $x = 4$ est donnée par :

$$dy = f'(x)\, dx$$

où $dx \approx \Delta x = x - 4$. On obtient donc :

$$dy = f'(4)\, dx = 0{,}132(x - 4)$$

d) La variation de la fonction sur l'intervalle [4; 4,2] est alors :

$$dy|_{[4;\, 4{,}2]} = 0{,}132(4{,}2 - 4) = 0{,}132 \times 0{,}2 = 0{,}0264$$

La fonction a donc un accroissement de 0,0264 unités sur cet intervalle.

2. a) La fonction est continue sur   et sa dérivée première est :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2} - 5\,\text{Arc}\tan x\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) - 5\frac{d}{dx}(\text{Arc}\tan x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{1+x^2}.$$

La dérivée première s'annule lorsque $\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{1+x^2} = 0$, d'où $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{1+x^2}$.

On trouve alors $1 + x^2 = 10$ et $x^2 = 9$. Cela donne $x = \pm 3$
La dérivée seconde est :

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{1+x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\right) - 5\frac{d}{dx}\left((1+x^2)^{-1}\right) = 0 + 5(1+x^2)^{-2}\frac{d}{dx}(1+x^2)$$

$$= 0 + 5(1+x^2)^{-2} \times 2x = \frac{10x}{(1+x^2)^2}.$$

Elle s'annule à $x = 0$.
Le dénominateur de la dérivée seconde est toujours positif, seul son numérateur peut changer de signe. En appliquant le test de la dérivée seconde, on trouve que :
$f'(-3) = 0$ et $f''(-3 < 0$. La fonction a donc un maximum relatif à $x = -3$.
$f'(3) = 0$ et $f''(3) > 0$. La fonction a donc un minimum relatif à $x = 3$.

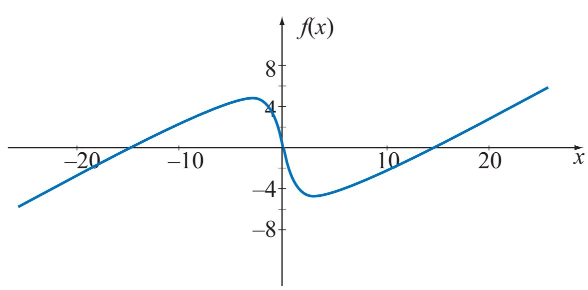
Les images sont $f(-3) = -\dfrac{3}{2} + 5\,\text{Arc}\tan 3 \approx 4{,}745$, $f(0) = 0$ et $f(3) = \dfrac{3}{2} - 5\,\text{Arc}\tan 3 \approx -4{,}745$.

Le comportement à moins l'infini et à l'infini est décrit par :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2} - 5\,\text{Arc}\tan x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2}\right) - 5\lim_{x\to-\infty}(\text{Arc}\tan x) = -\infty - 5 \times -\frac{\pi}{2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2} - 5\,\text{Arc}\tan x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right) - 5\lim_{x\to\infty}(\text{Arc}\tan x) = \infty - 5 \times \frac{\pi}{2} = \infty.$$

x	$-\infty$		-3		0		3		∞
$f'(x)$	+	+	0	–	–	–	0	+	+
$f''(x)$	–	–	–	–	0	+	+	+	+
$f(x)$	↗	↗	4,75	↘	0	↘	–475	↗	↗
	$-\infty$		max		inf		min		∞



b) La fonction est continue sur et sa dérivée première est :

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(2+x-2\operatorname{Arc}\tan x)=\frac{d}{dx}(2)+\frac{d}{dx}(x)-2\frac{d}{dx}(\operatorname{Arc}\tan x)=1-\frac{2}{1+x^2}.$$

La dérivée première s'annule lorsque $1-\frac{2}{1+x^2}=0$, d'où $1=\frac{2}{1+x^2}$.

On trouve alors $1 + x^2 = 2$ et $x^2 = 1$. Cela donne $x = \pm 1$

La dérivée seconde est :

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(1-\frac{2}{1+x^2}\right)=\frac{d}{dx}(1)-2\frac{d}{dx}\left((1+x^2)^{-1}\right)=0+2(1+x^2)^{-2}\frac{d}{dx}(1+x^2)$$
$$=0+2(1+x^2)^{-2}\times 2x=\frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

Elle s'annule à $x=0$.

Le dénominateur de la dérivée seconde est toujours positif, seul son numérateur peut changer de signe. En appliquant le test de la dérivée seconde, on trouve que :

$f'(-1) = 0$ et $f''(-1) < 0$. La fonction a donc un maximum relatif à $x = -1$.

$f'(1) = 0$ et $f''(1) > 0$. La fonction a donc un minimum relatif à $x = 1$.

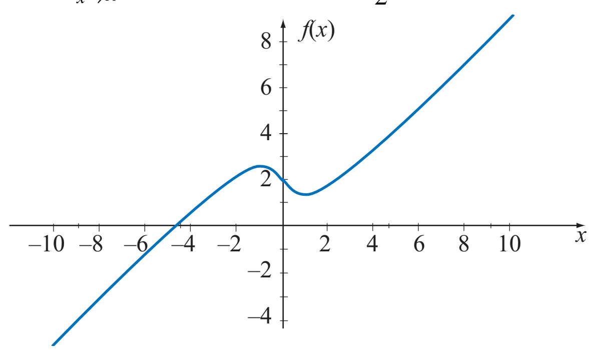
Les images sont $f(-1)=1+\frac{\pi}{2}\approx 2{,}57$, $f(0) = 2$ et $f(1)=3-\frac{\pi}{2}\approx 1{,}43$.

Le comportement à moins l'infini et à l'infini est décrit par :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2+x-2\operatorname{Arc}\tan x)=\lim_{x\to-\infty}(2)+\lim_{x\to-\infty}(x)-2\lim_{x\to-\infty}(\operatorname{Arc}\tan x)=2-\infty-5\times-\frac{\pi}{2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(2+x-2\operatorname{Arc}\tan x)=\lim_{x\to\infty}(2)+\lim_{\infty}(x)-2\lim_{x\to\infty}(\operatorname{Arc}\tan x)=2+\infty-5\times\frac{\pi}{2}=\infty.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$	+	+	0	–	–	–	0	+	+
$f''(x)$	–	–	–	–	0	+	+	+	+
$f(x)$	↗	↗	2,57	↘	2	↘	1,43	↗	↗
	$-\infty$		max		inf		min		∞



c) La fonction arcsin($1 - x$) est définie seulement si $-1 \le 1 - x \le 1$, d'où : $0 \le x \le 2$.

Le domaine de la fonction est donc $\text{dom}_f = [0; 2]$.

La dérivée première est :

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{2}+\operatorname{Arc}\sin(1-x)\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{2}\right)+\frac{d}{dx}(\operatorname{Arc}\sin(1-x))=\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\frac{d}{dx}(1-x)$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\times -1=\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

Elle s'annule lorsque $\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}=0$, d'où $\frac{3}{2}=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ et $3\sqrt{2x-x^2}=2$.

En élevant au carré, on obtient : $9(2x - x^2) = 4$ et $-9x^2 + 18x - 4 = 0$. Cela donne $x=\frac{18\pm\sqrt{18^2-144}}{18}$.

D'où $x = 0{,}26$ et $x = 1{,}75$.

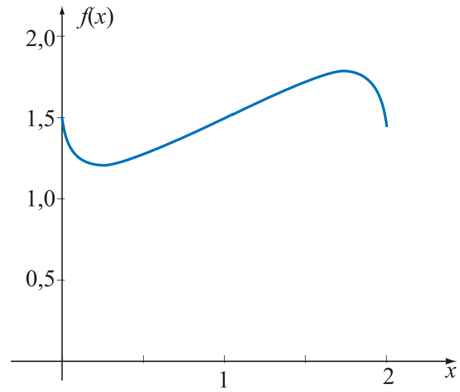
De plus, la fonction dérivée n'est pas définie à $x = 0$ et à $x = 2$. Ce sont des points critiques. Le dénominateur s'annule en ces valeurs, ce qui signifie que la tangente est verticale en ces points.

La dérivée seconde est :

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\right)=0+\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}\times 2-2x=\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

Elle s'annule à $x = 1$.

x	0		0,26		1		1,75		2
$f'(x)$	$\nexists$	–	0	+	+	+	0	–	$\nexists$
$f''(x)$	$\nexists$	+	+	+	0	–	–	–	$\nexists$
$f(x)$	$\pi/2$	↘	1,22	↗	3/2	↗	1,78	↘	$3-\pi/2$
			min		inf		max		



d) La fonction arccos x est définie seulement si $-1 \leq 1 - x \leq 1$.
Le domaine de la fonction est donc $\text{dom}_f = [0; 2]$.
La dérivée première est :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x + \text{Arc}\cos x) = \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(\text{Arc}\cos x) = 2 + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

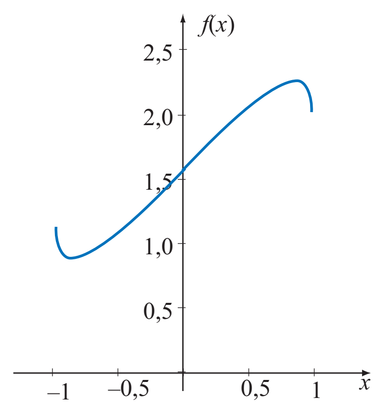
Elle s'annule lorsque $2 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, d'où $2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\sqrt{1-x^2} = \dfrac{1}{2}$.

En élevant au carré, on obtient : $1 - x^2 = 1/4$ et $x^2 = 3/4$. Cela donne $x = \pm\sqrt{3}/2$.
D'où $x = -0{,}866$ et $x = 0{,}866$.
De plus, la fonction dérivée n'est pas définie à $x = -1$ et à $x = 1$. Ce sont des points critiques. Le dénominateur s'annule en ces valeurs, ce qui signifie que la tangente est verticale en ces points.
La dérivée seconde est :

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{d}{dx}(2) - \frac{d}{dx}\left((1-x^2)^{-1/2}\right) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}\frac{d}{dx}(1-x^2)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \times -2x = \frac{-x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Elle s'annule à $x = 0$.

x	–1		–0,87		0		0,87		1
$f'(x)$	$\nexists$	–	0	+	+	+	0	–	$\nexists$
$f''(x)$	$\nexists$	+	+	+	0	–	–	–	$\nexists$
$f(x)$	$-2+\pi$	↘	0,89	↗	$\pi/2$	↗	2,26	↘	2
			min		inf		max		



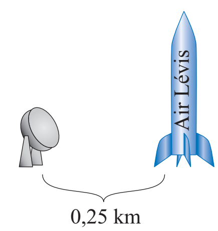
3. a) En isolant θ dans $P = \dfrac{v^2 \sin 2\theta}{g}$, on obtient $\sin 2\theta = \dfrac{Pg}{v^2}$ et $\theta = \dfrac{1}{2}\text{Arc}\sin\left(\dfrac{Pg}{v^2}\right)$.

b) $\theta = \dfrac{1}{2}\text{Arc}\sin\left(\dfrac{2000 \times 9{,}8}{200^2}\right) = 0{,}25604$ rad, soit $14{,}67°$.

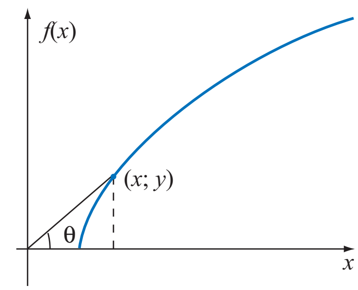
c) $\theta = \dfrac{1}{2}\text{Arc}\sin\left(\dfrac{6000 \times 9{,}8}{100^2}\right) = 0{,}7011...$ rad, soit $40{,}17°$ et $\theta = \dfrac{1}{2}\text{Arc}\sin\left(\dfrac{6000 \times 9{,}8}{200^2}\right) = 0{,}4867...$ rad, soit $27{,}89°$.

4. En représentant la trajectoire de la fusée et le faisceau d'ondes, on a la configuration ci-contre. Dans cette figure, on peut exprimer l'angle d'élévation en fonction de la distance au sol. On obtient :

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{4x-1}}{x} \quad \text{et} \quad \theta = \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{4x-1}}{x}\right).$$

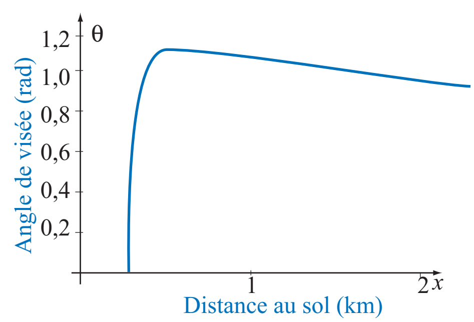


La dérivée de la fonction donne :



$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{4x-1}}{x}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{4x-1}}{x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{4x-1}}{x}\right)\\
&= \frac{1}{1+\frac{4x-1}{x^2}} \times \left[\frac{x\frac{d}{dx}\left((4x-1)^{1/2}\right) - \sqrt{4x-1}\frac{d}{dx}(x)}{x^2}\right]\\
&= \frac{1}{\frac{x^2+4x-1}{x^2}} \times \left[\frac{x \times \frac{1}{2}(4x-1)^{-1/2} \times 4 - \sqrt{4x-1} \times 1}{x^2}\right]\\
&= \frac{x^2}{x^2+4x-1} \times \left[\frac{\frac{2x}{\sqrt{4x-1}} - \sqrt{4x-1}}{x^2}\right] = \frac{x^2}{x^2+4x-1} \times \left[\frac{\frac{2x-(4x-1)}{\sqrt{4x-1}}}{x^2}\right]\\
&= \frac{-2x+1}{\left(x^2+4x-1\right)\sqrt{4x-1}}.
\end{aligned}$$

La dérivée s'annule à $x = 1/2$. Analysons le signe de la dérivée première à gauche et à droite de 1, en vue d'appliquer le test de la dérivée première. On constate que la dérivée n'est pas définie à $x = 1/4$, mais pour toute valeur de $x > 1/4$, le dénominateur est positif. Le signe de la dérivée première sera donc celui de son numérateur. On constate facilement que dans l'intervalle $]1/4; 1/2[$, le numérateur est positif, la fonction est donc croissante dans cet intervalle. Dans l'intervalle $]1/2; \infty[$, le numérateur de la fonction dérivée est négatif, la fonction est donc décroissante dans cet intervalle.

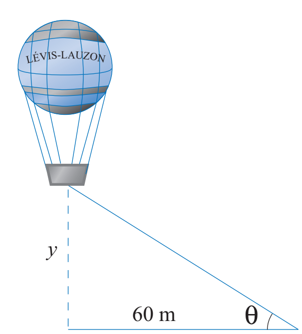


Le test de la dérivée première nous permet de conclure que la fonction atteint sa valeur maximale lorsque $x = 1/2$ km. On a alors :

$$f(1/2) = 1 \text{ km}$$

L'angle θ est alors $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{2-1}}{1/2}\right) = \text{Arctan}(2) \approx 1{,}107 \text{ rad}$, soit environ $63{,}43°$.

5. a) Puisque $\tan\theta = \frac{y}{60}$, on a $\theta = \text{Arc}\tan\left(\frac{y}{60}\right)$.



b) En dérivant par rapport à t, on obtient :

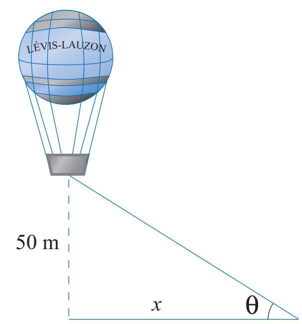
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{60}\right)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{60}\right) = \frac{60^2}{60^2+y^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{60}\right) = \frac{60^2}{60^2+y^2} \times \frac{1}{60}\frac{dy}{dt} = \frac{60}{60^2+y^2}\frac{dy}{dt}.$$

c) Puisque $\dfrac{dy}{dt} = 15 \text{ m/min}$, on trouve :

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{y=20} = \frac{60 \text{ m}}{60^2 + 20^2 \text{ m}^2} \times 15 \frac{\text{m}}{\text{min}} = 0{,}225 \text{ rad/min, soit } 12{,}89\ °/\text{min}.$$
$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{y=40} = \frac{60 \text{ m}}{60^2 + 40^2 \text{ m}^2} \times 15 \frac{\text{m}}{\text{min}} = 0{,}173 \text{ rad/min, soit } 9{,}92\ °/\text{min}.$$

d) Les taux de variation sont positifs car l'angle de visée augmente avec l'altitude. Cependant, le taux de variation diminue car l'angle augmente de moins en moins rapidement à mesure qu'il s'approche de $\pi/2$ rad.

6. a) Puisque $\cot\theta = \dfrac{x}{50}$, on a $\theta = \text{Arc}\cot\left(\dfrac{x}{50}\right)$.



b) En dérivant par rapport à t, on obtient :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{1+\left(\dfrac{x}{50}\right)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{50}\right) = \frac{-50^2}{50^2+x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{50}\right) = \frac{-50^2}{50^2+x^2} \times \frac{1}{50}\frac{dx}{dt} = \frac{-50}{50^2+x^2}\frac{dx}{dt}.$$

c) Puisque $\dfrac{dx}{dt} = 8 \text{ m/min}$, on trouve :

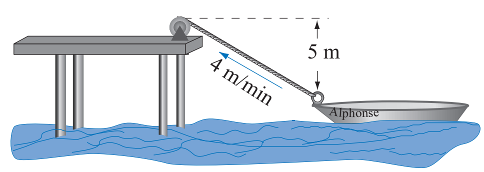
$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=10} = \frac{-50 \text{ m}}{50^2 + 10^2 \text{ m}^2} \times 8 \frac{\text{m}}{\text{min}} = -0{,}154 \text{ rad/min, soit} = -8{,}81\ °/\text{min}.$$
$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=30} = \frac{-50 \text{ m}}{50^2 + 30^2 \text{ m}^2} \times 8 \frac{\text{m}}{\text{min}} = -0{,}118 \text{ rad/min, soit} = -6{,}74\ °/\text{min}.$$

d) Les taux de variation sont négatifs car l'angle de visée diminue lorsque la distance entre l'observateur et la verticale du ballon augmente. Cependant, le taux de variation diminue (s'approche de 0) car l'angle diminue de moins en moins rapidement à mesure qu'il s'approche de 0 rad.

e) Si la distance entre l'observateur et la verticale du ballon diminuait, dx/dt serait négatif et $d\theta/dt$ serait positif.

7. a) En notant x, la longueur du câble, de la poulie au bateau satisfait à la relation :

$$\csc\theta = \frac{x}{5}, \text{ et } \theta = \text{Arccsc}\left(\frac{x}{5}\right).$$



b) En dérivant par rapport à t, on obtient :

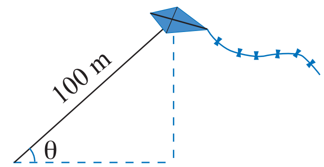
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{\dfrac{x}{5}\sqrt{\left(\dfrac{x}{5}\right)^2 - 1}}\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{-1}{\dfrac{x}{5}\sqrt{\dfrac{x^2}{5^2}-1}} \times \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{\dfrac{x}{5}\sqrt{\dfrac{x^2-5^2}{5^2}}} \times \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{\dfrac{x}{5^2}\sqrt{x^2-5^2}} \times \frac{1}{5}\frac{dx}{dt}$$
$$= \frac{-5^2}{x\sqrt{x^2-5^2}} \times \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} = \frac{-5}{x\sqrt{x^2-5^2}}\frac{dx}{dt}.$$

c) La longueur du câble diminue au taux $\dfrac{dx}{dt} = -4 \text{ m/min}$, on trouve :

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=10} = \frac{-5}{10\sqrt{10^2-5^2}}\,\frac{\text{m}}{\text{m}^2}\times -4\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 0{,}231\ \text{rad/min, soit } 13{,}23\ °/\text{min}.$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=6} = \frac{-5}{6\sqrt{6^2-5^2}}\,\frac{\text{m}}{\text{m}^2}\times -4\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 0{,}603\ \text{rad/min, soit } 34{,}55\ °/\text{min}.$$

8. a) En notant y, l'altitude du cerf-volant, $\sin\theta = \frac{y}{100}$ et $\theta = \text{Arcsin}\left(\frac{y}{100}\right)$.



b) En dérivant par rapport à t, on obtient :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\arcsin\frac{y}{100}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{100}\right)^2}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{100}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{100^2-y^2}{100^2}}}\times\frac{1}{100}\frac{dy}{dt}$$

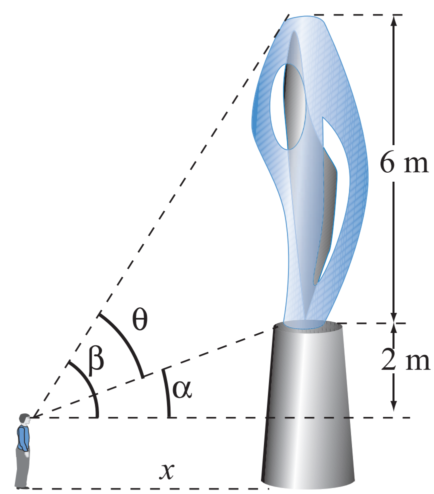
$$= \frac{100}{\sqrt{100^2-y^2}}\times\frac{1}{100}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{100^2-y^2}}\frac{dy}{dt}.$$

c) L'altitude du cerf-volant augmente au taux $\frac{dy}{dt} = 20\ \text{m/min},$, on trouve :

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{y=30} = \frac{1}{\sqrt{100^2-30^2}\ \text{m}}\times 20\frac{\text{m}}{\text{min}} = 0{,}210\ \text{rad, soit } 12{,}01\ °/\text{min}.$$

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{y=70} = \frac{1}{\sqrt{100^2-70^2}\ \text{m}}\times 20\frac{\text{m}}{\text{min}} = 0{,}280\ \text{rad, soit } 16{,}04\ °/\text{min}.$$

9. a) Puisque $\cot\alpha = \frac{x}{2}$, on a $\alpha = \text{Arccot}\left(\frac{x}{2}\right)$.



b) $\cot\beta = \frac{x}{8}$, on a $\beta = \text{Arccot}\left(\frac{x}{8}\right)$.

c) $\theta = \beta - \alpha = \text{Arccot}\left(\frac{x}{8}\right) - \text{Arccot}\left(\frac{x}{2}\right)$.

d) En dérivant par rapport à t, on obtient :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\text{Arccot}\left(\frac{x}{8}\right) - \text{Arccot}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\text{Arccot}\left(\frac{x}{8}\right)\right) - \frac{d}{dt}\left(\text{Arccot}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{1+\left(\frac{x}{8}\right)^2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{8}\right) - \frac{-1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{-1}{\frac{8^2+x^2}{8^2}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{8}\right) + \frac{1}{\frac{2^2+x^2}{2^2}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{-8^2}{8^2+x^2}\times\frac{1}{8}\frac{dx}{dt} + \frac{2^2}{2^2+x^2}\times\frac{1}{2}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{-8}{8^2+x^2} + \frac{2}{2^2+x^2}\right)\frac{dx}{dt}.$$

La relation entre les taux de variation est $\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{-8}{8^2+x^2} + \frac{2}{2^2+x^2}\right)\frac{dx}{dt}$.

e) Lorsque $x = 2$ m, on a :

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=2} = \left(\frac{-8}{8^2+2^2} + \frac{2}{2^2+2^2}\right)\frac{\text{m}}{\text{m}^2} \times 2\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 0{,}26 \text{ rad/min, soit } 15{,}2\ °/\text{min}.$$

L'angle θ augmente lorsque l'observateur est à 2 m et qu'il s'éloigne.
Lorsque $x = 6$ m, on a :

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=6} = \left(\frac{-8}{8^2+6^2} + \frac{2}{2^2+6^2}\right)\frac{\text{m}}{\text{m}^2} \times 2\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = -0{,}06 \text{ rad/min, soit } -3{,}44\ °/\text{min}.$$

L'angle θ diminue lorsque l'observateur est à 2 m et qu'il s'éloigne.

f) La dérivée de la fonction donne par rapport à x :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\text{Arccot}\left(\frac{x}{8}\right) - \text{Arccot}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\text{Arccot}\left(\frac{x}{8}\right)\right) - \frac{d}{dx}\left(\text{Arccot}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{1+\left(\frac{x}{8}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{8}\right) - \frac{-1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{-1}{\frac{8^2+x^2}{8^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{8}\right) + \frac{1}{\frac{2^2+x^2}{2^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{-8^2}{8^2+x^2} \times \frac{1}{8} + \frac{2^2}{2^2+x^2} \times \frac{1}{2} = \frac{-8}{8^2+x^2} + \frac{2}{2^2+x^2}.$$

La dérivée s'annule lorsque $\frac{-8}{8^2+x^2} + \frac{2}{2^2+x^2} = 0$, d'où $\frac{8}{8^2+x^2} = \frac{2}{2^2+x^2}$ et $8(4 + x^2) = 2(64 + x^2)$.

Cela donne $32 + 8x^2 = 128 + 2x^2$ qui donne $6x^2 = 96$ et $x^2 = 16$. On a donc $x = -4$ et $x = 4$.
La dérivée seconde est :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-8}{8^2+x^2} + \frac{2}{2^2+x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-8}{8^2+x^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{2^2+x^2}\right)$$

$$= -8\frac{d}{dx}\left(\left(8^2+x^2\right)^{-1}\right) + 2\frac{d}{dx}\left(\left(2^2+x^2\right)^{-1}\right)$$

$$= -8 \times -1\left(8^2+x^2\right)^{-2}\frac{d}{dx}\left(8^2+x^2\right) + 2 \times -1\left(2^2+x^2\right)^{-2}\frac{d}{dx}\left(2^2+x^2\right)$$

$$= \frac{8}{\left(8^2+x^2\right)^2}\frac{d}{dx}\left(8^2+x^2\right) - \frac{2}{\left(2^2+x^2\right)^2}\frac{d}{dx}\left(2^2+x^2\right)$$

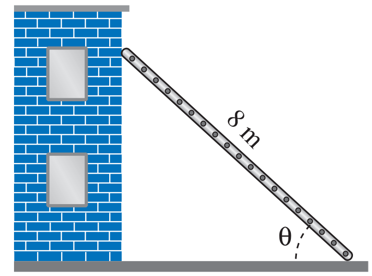
$$= \frac{8}{\left(8^2+x^2\right)^2} \times 2x - \frac{2}{\left(2^2+x^2\right)^2} \times 2x = \frac{12x}{\left(8^2+x^2\right)^2} - \frac{4x}{\left(2^2+x^2\right)^2}.$$

Soit $\theta''(x) = \frac{12x}{\left(8^2+x^2\right)^2} - \frac{4x}{\left(2^2+x^2\right)^2}$. En évaluant la dérivée seconde à $x = 4$ m, on trouve :

$$\theta''(4) = \frac{48}{\left(8^2+4^2\right)^2} - \frac{16}{\left(2^2+4^2\right)^2} = -0{,}325$$

Puisque $\theta'(4) = 0$ et $\theta''(4) < 0$, la tangente est horizontale à $x = 4$ et la courbe est concave vers le bas. L'angle atteint donc sa valeur maximale lorsque l'observateur est à 4 m du socle de la sculpture. À ce moment, l'angle de vision est de :

$$\theta(4) = \text{Arccot}\left(\frac{4}{8}\right) - \text{Arccot}\left(\frac{4}{2}\right) = \text{Arccot}\left(\frac{1}{2}\right) - \text{Arccot}(2) = 0{,}6435 \text{ rad, soit } 36{,}9°.$$



10. a) Puisque $\cos\theta = \dfrac{x}{8}$, on a $\theta = \operatorname{Arc}\cos\left(\dfrac{x}{8}\right)$.

b) En dérivant par rapport à t, on obtient :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{Arc}\cos\left(\frac{x}{8}\right)\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{8}\right)^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{8}\right) = \frac{-1}{\sqrt{\frac{8^2-x^2}{8^2}}} \times \frac{1}{8}\frac{dx}{dt}$$

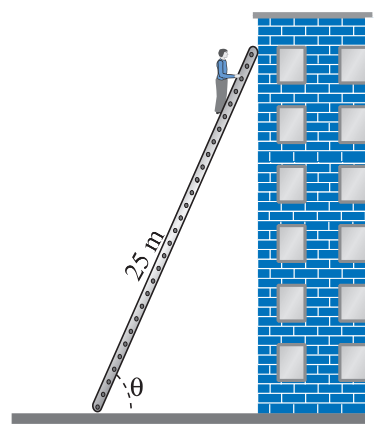
$$= \frac{-1}{\frac{1}{8}\sqrt{8^2-x^2}} \times \frac{1}{8}\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{8^2-x^2}}\frac{dx}{dt}.$$

La relation est donc $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{-1}{\sqrt{8^2-x^2}}\dfrac{dx}{dt}$.

c) $$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=5} = \frac{-1}{\sqrt{8^2-5^2}}\frac{1}{\text{m}} \times -0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}80 \text{ rad/s, soit } 4{,}59\ {}^\circ/\text{s}.$$

Le taux de variation de la distance du pied de l'échelle au mur est négatif puisque la distance diminue lorsque l'échelle est poussée vers le mur. Le signe du taux de variation de l'angle est positif parce que l'angle augment lorsque le pied de l'échelle s'approche du mur.

d) $$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=2} = \frac{-1}{\sqrt{8^2-2^2}}\frac{1}{\text{m}} \times -0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}065 \text{ rad/s, soit } 3{,}70\ {}^\circ/\text{s}.$$



11. a) Puisque $\sin\theta = \dfrac{x}{25}$, on a $\theta = \operatorname{Arc}\sin\left(\dfrac{x}{25}\right)$.

b) En dérivant par rapport à t, on obtient :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{x}{25}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{25}\right)^2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{25}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{25^2-x^2}{25^2}}} \times \frac{1}{25}\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{25}\sqrt{25^2-x^2}} \times \frac{1}{25}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{25^2-x^2}}\frac{dx}{dt}.$$

La relation est donc $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{25^2-x^2}}\dfrac{dx}{dt}$.

c) $$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=20} = \frac{1}{\sqrt{25^2-20^2}}\frac{1}{\text{m}} \times -0{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}} = -0{,}0133 \text{ rad/s, soit } -0{,}76\,{}^\circ/\text{s}.$$

Le taux de variation de la distance du pied du mur au sommet de l'échelle est négatif puisque la distance diminue lorsque le pied de l'échelle glisse. Le signe du taux de variation de l'angle est négatif parce que l'angle diminue lorsque le pied de l'échelle s'éloigne du mur.

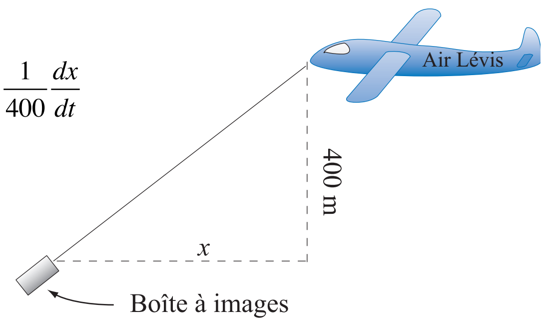
d) $$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=15} = \frac{1}{\sqrt{25^2-15^2}}\frac{1}{\text{m}} \times -0{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}} = -0{,}01 \text{ rad/s, soit } -0{,}57\,{}^\circ/\text{s}.$$

e) $$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=10} = \frac{1}{\sqrt{25^2-10^2}}\frac{1}{\text{m}} \times -0{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}} = -0{,}009 \text{ rad/s, soit } -0{,}5\,{}^\circ/\text{s}.$$

f) Tous ceux qui ont survécu à l'expérience sont unanimes, le glissement du sommet de l'échelle est accéléré. Il faudrait donc prendre en compte cette accélération pour obtenir une fonction composée. Cependant, pour parvenir à résoudre des problèmes de plus en plus complexes, il faut commencer par en résoudre des plus simples en faisant abstraction de certaines composantes.

12. a) Puisque $\cot\theta = \dfrac{x}{400}$, on a $\theta = \text{Arccot}\left(\dfrac{x}{400}\right)$.

b) En dérivant par rapport à t, on obtient :



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\text{Arccot}\left(\frac{x}{400}\right)\right) = \frac{-1}{1+\left(\frac{x}{400}\right)^2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{400}\right) = \frac{-1}{\frac{400^2+x^2}{400^2}} \times \frac{1}{400}\,\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{-400^2}{400^2+x^2} \times \frac{1}{400}\,\frac{dx}{dt} = \frac{-400}{400^2+x^2}\,\frac{dx}{dt}.$$

La relation est donc $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{-400}{400^2+x^2}\,\dfrac{dx}{dt}$.

c) Cinq minutes avant le passage à la verticale, l'avion est à 1 500 m. L'angle est alors :

$\theta = \text{Arc}\tan\left(\dfrac{400}{1500}\right) = 0{,}2606\ldots$ rad, soit environ 14,9° et

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=1500} = \frac{-400}{400^2+1500^2}\,\frac{\text{m}}{\text{m}^2} \times -300\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 0{,}0497\ldots\ \text{rad/min, soit } 2{,}85\ °/\text{min}.$$

d) Une minute avant le passage à la verticale, l'avion est à 300 m. L'angle est alors :

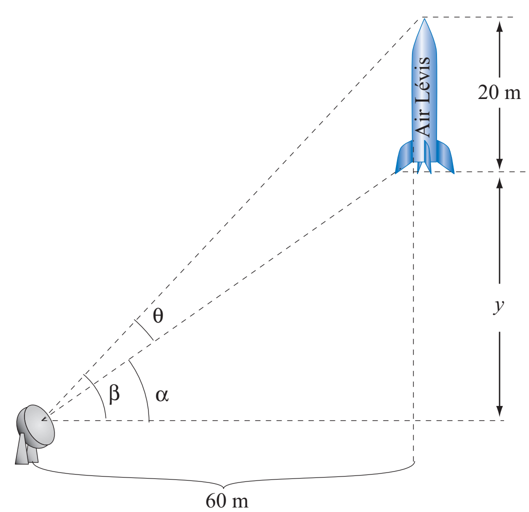
$\theta = \text{Arc}\tan\left(\dfrac{400}{300}\right) = 0{,}9272\ldots$ rad, soit environ 53,13° et

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=300} = \frac{-400}{400^2+300^2}\,\frac{\text{m}}{\text{m}^2} \times -300\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 0{,}48\ \text{rad/min, soit } 27{,}5\ °/\text{min}.$$

13. a) Puisque $\tan\alpha = \dfrac{y}{60}$, on a $\alpha = \text{Arctan}\left(\dfrac{y}{60}\right)$.

$\tan\beta = \dfrac{y+20}{60}$, on a $\beta = \text{Arctan}\left(\dfrac{y+20}{60}\right)$.

$\theta = \beta - \alpha = \text{Arctan}\left(\dfrac{y+20}{60}\right) - \text{Arctan}\left(\dfrac{y}{60}\right)$.



b) En dérivant par rapport à t, on obtient :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\text{Arctan}\left(\frac{y}{60}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{60}\right)^2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{60}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{60^2+y^2}{60^2}} \times \frac{1}{60}\,\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{60}{60^2+y^2}\,\frac{dy}{dt}.$$

La relation entre les taux de variation est $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{60}{60^2+y^2}\,\dfrac{dy}{dt}$.

Une seconde après le lancement, $y = 200$ m et le taux de variation est :

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{y=200} = \frac{60}{60^2+200^2}\,\frac{\text{m}}{\text{m}^2} \times 200\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}275\ldots\ \text{rad/s, soit environ } 15{,}77\ °/\text{s}.$$

Deux secondes après le lancement, y = 400 m et le taux de variation est :

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{y=400} = \frac{60}{60^2+400^2}\,\frac{\text{m}}{\text{m}^2}\times 200\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}0734\ldots\ \text{rad/s}, \text{soit environ } 4{,}20\ °/\text{s}.$$

c) En dérivant par rapport à t, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{y+20}{60}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{60}\right)\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{y+20}{60}\right)\right) - \frac{d}{dt}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{60}\right)\right)\\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{y+20}{60}\right)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y+20}{60}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{60}\right)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{60}\right)\\
&= \frac{1}{\frac{60^2+(y+20)^2}{60^2}}\times\frac{1}{60}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{\frac{60^2+y^2}{60^2}}\times\frac{1}{60}\frac{dy}{dt}\\
&= \frac{60}{60^2+(y+20)^2}\frac{dy}{dt} - \frac{60}{60^2+y^2}\frac{dy}{dt}\\
&= 60\left(\frac{1}{60^2+(y+20)^2} - \frac{1}{60^2+y^2}\right)\frac{dy}{dt}.
\end{aligned}$$

La relation entre les taux de variation est $\dfrac{d\theta}{dt} = 60\left(\dfrac{1}{60^2+(y+20)^2} - \dfrac{1}{60^2+y^2}\right)\dfrac{dy}{dt}$.

Une seconde après le lancement, y = 200 m et le taux de variation est :

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{y=200} = 60\left(\frac{1}{60^2+(200+20)^2} - \frac{1}{60^2+200^2}\right)\frac{\text{m}}{\text{m}^2}\times 200\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = -0{,}04446\ldots\text{rad/s}, \text{ soit environ } -2{,}55\ °/\text{s}.$$

Deux secondes après le lancement, y = 400 m et le taux de variation est :

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{y=400} = 60\left(\frac{1}{60^2+(400+20)^2} - \frac{1}{60^2+400^2}\right)\frac{\text{m}}{\text{m}^2}\times 200\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = -0{,}00668\ldots\text{rad/s}, \text{ soit environ } -0{,}38\ °/\text{s}.$$