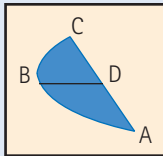


Archimède
~287 à ~212

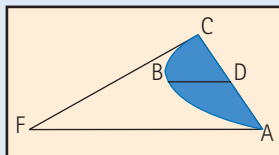
Archimède est le premier à avoir déterminé l'aire d'une parabole. Il détermine d'abord une conjecture en ayant recours aux principes du levier. Pour démontrer la conjecture, il a à effectuer la somme infinie des termes d'une progression géométrique. Étant donné l'aversion des savants grecs envers l'infini, il applique la méthode d'exhaustion et effectue une double réduction à l'absurde.

Archimède

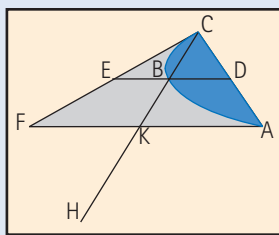
Aire de la parabole



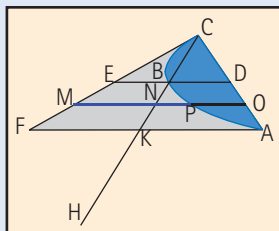
Pour déterminer sa conjecture sur l'aire de la parabole, Archimède applique le principe du levier pour comparer l'aire d'un segment de la parabole à l'aire du triangle inscrit dans ce segment. Soit un segment de parabole ABC et de diamètre BD (le diamètre de la parabole coupe la corde CA en deux parties égales).



Du point C, il trace la tangente au segment de parabole et du point A une parallèle au diamètre BD jusqu'à leur point de rencontre F.



Il trace alors CB qui coupe AF en K et qu'il prolonge jusqu'en H, de telle sorte que $\overline{CK} = \overline{KH}$, et il prolonge DB jusqu'en E sur CF.



Selon une proposition qu'Archimède attribue à Aristée et à Euclide, $\overline{DB} = \overline{BE}$ puisque CE est tangente au segment de parabole et CD est la demi-longueur de sa corde. Il s'ensuit que CK est la médiane du triangle AFC. Il considère alors que la surface du triangle et celle du segment de parabole sont constituées de bandes parallèles au diamètre de celle-ci. Dans la figure ci-contre, la bande MO du triangle et la bande OP du segment de parabole sont superposées.

Il cite alors un lemme qu'il a préalablement démontré à l'effet que :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{OP}}$$

De plus, $\frac{\overline{CK}}{\overline{KN}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AO}}$ par le théorème de

Thalès. Or, $\overline{CK} = \overline{HK}$ par construction. Il peut conclure que :

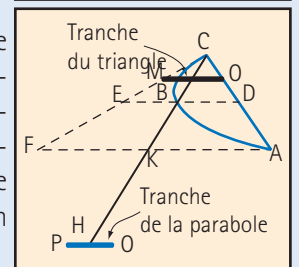
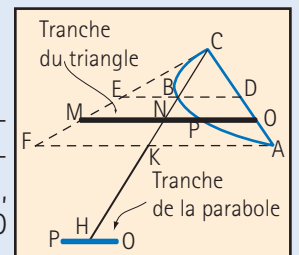
$$\frac{\overline{HK}}{\overline{KN}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{OP}}$$

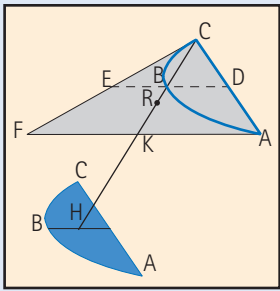
Archimède utilise alors le principe du levier. Les masses sont les bandes MO et OP et le levier est le segment CKH où K est le pivot. La proportion :

$$\frac{\overline{HK}}{\overline{KN}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{OP}}$$

entre les masses et les distances signifie qu'en suspendant la bande OP au point H, elle équilibrera la bande MO suspendue au point N.

De la même façon, chaque tranche de la parabole suspendue au point H équilibrera la tranche correspondante du triangle suspendue en son point d'intersection avec le levier.





Par conséquent, le point K étant le pivot, l'aire de la parabole suspendue au point H par son centre de gravité équilibrera l'aire du triangle suspendu par son centre de gravité sur KC.

Or, ce centre de gravité est en un point R situé au tiers de KC (aux deux tiers à partir du sommet C).

On peut donc déterminer le rapport de l'aire du triangle AFC sur l'aire du segment de parabole ABC, soit :

$$\frac{\text{Aire du triangle AFC}}{\text{Aire du segment ABC}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{KR}} = \frac{3}{1}$$

d'où l'on tire :

$$A_{\text{Parabole ABC}} = \frac{1}{3} A_{\text{Triangle AFC}}$$

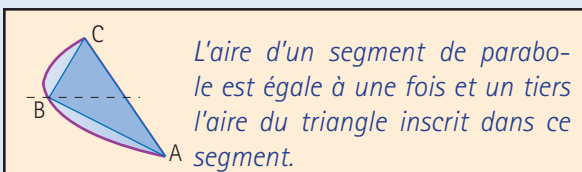
Il montre alors que l'aire du triangle AFC est quatre fois l'aire du triangle ABC. Voici comment : les triangles ABD et CBD ont même aire puisque leurs bases sont égales, D étant le point milieu de AD et ils ont même hauteur, la perpendiculaire abaissée de B sur AC. De plus, les triangles EBC et DBC ont même aire puisque B est le point milieu de ED et ils ont même hauteur, la perpendiculaire abaissée du sommet C sur ED. Par conséquent, l'aire du triangle DEC est égale à l'aire du triangle ABC.

De plus, les triangles DEC et AFC sont semblables puisque DE est tracé parallèlement à AF. Puisque D est le point milieu de AC, on a donc $\overline{FA} = 2\overline{ED}$.

Puisque les aires de figures semblables sont dans le rapport des carrés de leurs lignes homologues, on obtient que l'aire du triangle AFC est quatre fois l'aire du triangle ABC inscrit dans le segment de parabole.

$$A_{\text{Parabole ABC}} = \frac{4}{3} A_{\text{Triangle ABC}}$$

et la conjecture est :



Démonstration de la proposition

Après avoir obtenu cette conjecture Archimède démontre le résultat par la méthode d'exhaustion.

La démarche d'Archimède pour démontrer par exhaustion sa conjecture sur l'aire du segment de parabole, se résume de la façon suivante. Soit un segment de parabole de corde AB.

Du milieu L du segment AB, il trace une parallèle à l'axe de la parabole déterminant ainsi un point C.

Par les milieux N et M de AC et BC, il trace des droites parallèles à l'axe de la parabole, déterminant ainsi les points D et E.

Il forme les triangles ACD et BCE.

Par les propriétés géométriques de la parabole qu'il a démontrées préalablement, Archimède écrit alors :

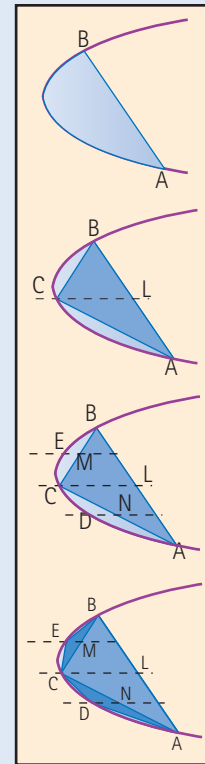
$$A_{ACD} + A_{BCE} = \frac{A_{ABC}}{4}$$

En répétant le processus, il obtient que l'aire du segment parabolique est :

$$A = A_{ABC} + \frac{A_{ABC}}{4} + \frac{A_{ABC}}{4^2} + \frac{A_{ABC}}{4^3} + \dots$$

$$= A_{ABC} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right)$$

Il procède ensuite par exhaustion. En supposant que la somme des termes à l'intérieur de la parenthèse est plus grande que 4/3, il montre que cela entraîne une contradiction. En supposant que la somme est plus petite que 4/3, cela entraîne encore une contradiction. Ce qui complète la démonstration.



Archimède communique ce résultat à Dosithée et, en préambule du traité, il écrit :

Aucun de mes prédécesseurs, n'a encore, que je sache, cherché la quadrature d'un segment délimité par une droite et une parabole, chose que nous avons trouvée maintenant.

Somme de la progression

On ne procède plus par double réduction à l'absurde pour montrer que la somme infinie de la progression géométrique à l'intérieur de la parenthèse est égale à 4/3. En notant S cette somme, voici comment on procède :

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

On multiplie par 1/4 les deux membres de l'équation :

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

On soustrait membre à membre cette deuxième équation de la première et on obtient :

$$S - \frac{S}{4} = \frac{3S}{4} = 1, \text{ d'où } S = \frac{4}{3}$$