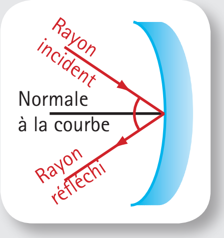
# LA RECHERCHE DE LA TANGENTE

## Approche cinématique

La plupart des courbes étudiées par les mathématiciens de l'Antiquité avaient un caractère statique. C'est le cas particulièrement de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole qui étaient définies par l'intersection d'un plan et d'un cône. Quelques exceptions cependant, la construction d'un cercle à l'aide d'un compas est un processus dynamique. La spirale d'Archimède qui est engendrée par un point qui se déplace à vitesse constante sur une demi-droite à partir d'une de ses extrémités en rotation à vitesse constante autour de cette même extrémité.

Les expériences de Galilée sur la chute des corps ont mis en lumière l'aspect dynamique de la parabole et les lois de Kepler ont fait de même pour l'ellipse. Evangelista Torricelli (NH Torricelli01), qui fut secrétaire de Galilée durant les derniers mois de sa vie, considère qu'une courbe est la trajectoire d'un point en déplacement. Cette conception est également adoptée par Roberval (NH Roberval01). À tout moment, le point tend à se déplacer dans la direction qu'il suivrait si tout à coup il était laissé à lui-même. Dans cette approche, la courbe est la trajectoire d'un point soumis à deux forces égales et la direction du mouvement en tout instant est celle de la bissectrice du parallélogramme de l'intensité des mouvements. Cette méthode ne peut cependant être généralisée. Pour l'appliquer, il faut pouvoir décrire la courbe comme la composée de deux mouvements d'égale intensité, ce qui est assez simple dans le cas des coniques, mais impossible pour une courbe quelconque.

La détermination de la tangente à la courbe en un point est importante dans l'étude du mouvement, mais ce n'est pas le seul incitatif. Auteur d'un ouvrage sur la lumière, intitulé *La Dioptrique*, René Descartes est intéressé par la normale à la courbe qui est perpendiculaire à la tangente. C'est également la droite par rapport à laquelle sont mesurés l'angle d'incidence et l'angle de réflexion d'un rayon lumineux réfléchi par une surface courbe. Les travaux de Kepler en optique ont également permis de prendre conscience de l'importance de la normale. En déterminant la tangente, on connaît la normale et réciproquement, en déterminant la normale, on connaît la tangente. C'est en recherchant la normale à une conique que Descartes développe les premières notions de géométrie analytique (NH Descartes03).




### Géométrie analytique

C'est dans ce contexte que se développe la géométrie analytique qui vise à traduire en termes algébriques les problèmes géométriques et réciproquement. Les premiers développements en algèbre sont l'œuvre des mathématicien arabes, en particulier Al-Khawarizmi (NH Al-Khawarizmi), qui a développé des méthodes de résolutions des équations du second degré inspirées de propriétés présentées dans les *Éléments* d'Euclide (NH Al-Khawarizmi02).

Le philosophe René Descartes (1596-1650) (NH Descartes01) et le mathématicien amateur Pierre de Fermat (1601-1665) (NH Fermat01), en adoptant des démarches différentes, sont à l'origine de la géométrie analytique moderne. Descartes s'intéresse aux problèmes géométriques (NH Descartes02) et, pour les résoudre, il les traduits en problèmes algébriques. C'est dans *La Géométrie*, publié en 1637, que Descartes développe ses idées et qu'il présente des exemples de sa démarche. Cet ouvrage a connu une large diffusion, c'est pourquoi on attribue généralement la découverte de la géométrie analytique à Descartes d'où l'appellation *système d'axes cartésien*.

Fermat s'intéresse plutôt aux expressions algébriques et cherche à déterminer les courbes que ces expressions représentent. Il énonce le principe fondamental de la géométrie analytique selon lequel lorsqu'une équation comporte deux variables les valeurs de l'une d'elles peuvent se représenter par une courbe. Dans cette démarche, il est tout naturel de déterminer tout d'abord les valeurs extrêmes de la fonction et Fermat développe une méthode pour y parvenir. Ces deux approches sont complémentaires et ont donné les deux volets de la géométrie analytique : représenter une courbe donnée par une équation et représenter une équation par une courbe.

Puisque cette branche des mathématiques vise à utiliser les ressources de l'algèbre pour résoudre des problèmes de géométrie et réciproquement, pourquoi ne pas l'avoir appelé géométrie algébrique plutôt que **géométrie analytique** ?

Déjà, les géomètres grecs appelaient **analyse** la démarche de résolution de problème consistant à considérer que celui-ci était résolu et à déduire les propriétés que devait avoir cette solution et à remonter ainsi à un énoncé proche du problème à résoudre.

Cette démarche, comme l'ont remarqué les mathématiciens de la Renaissance, est celle que l'on adopte en algèbre. En notant $x$, la solution d'un problème, on a recours aux propriétés que cette solution doit avoir pour exprimer le problème sous forme d'équation. L'inconnue est ainsi mise en relation avec les données connues du problème et il ne reste qu'à appliquer les manipulations algébriques pour résoudre cette équation et obtenir ainsi la valeur de l'inconnue.

L'adjectif **analyse** fut graduellement utilisé pour décrire les travaux faisant appel à la manipulation des symboles algébriques. L'appellation géométrie analytique a été donnée par Michel Rolle (1632-1719), mais elle a été définitivement adoptée après la publication par Jean-Baptiste Biot (1774-1862) d'un manuel destiné à l'enseignement **Essai de géométrie analytique, appliqué aux courbes et aux surfaces du second ordre** (1805). Cet ouvrage a été traduit en plusieurs langues, favorisant l'adoption de l'appellation **géométrie analytique**.