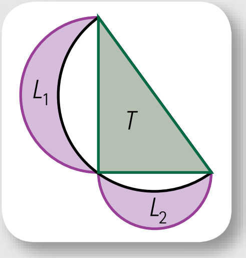
# AIRES, COURBES ET VOLUMES

Les problèmes de calcul de l'aire d'une surface courbe, de la longueur d'une courbe et du volume d'un solide remontent à l'Antiquité. Les géomètres grecs, pour comparer les aires de deux figures géométriques, devaient construire à la règle et au compas, et pour chacune de ces figures, un carré de même aire (NH Quadrature). La tâche s'est compliquée lorsqu'ils ont voulu réaliser la quadrature de figures délimitées par des lignes courbes.

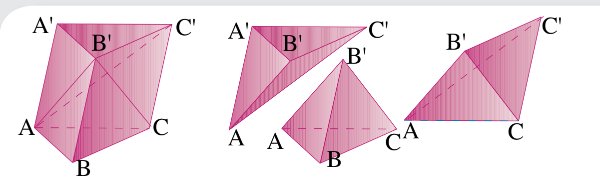
Hippocrate de Chio est le premier à avoir réalisé la quadrature de figures délimitées par des courbes appelées *lunules d'Hippocrate* et la somme des aires des lunules est égale à l'aire du triangle rectangle sur lequel elles sont construites et il est assez simple de construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un triangle rectangle (NH Hippocrate, Hippocrate).



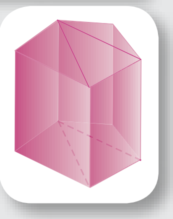

Les géomètres grecs ont également voulu comparer les aires et les volumes de solides. On attribue à Eudoxe de Cnide (NH Eudoxe01) d'avoir déterminé l'aire et le volume du cylindre et du cône, résultats livrés par Euclide dans le livre XII des *Éléments*.

*Tout prisme ayant un triangle pour base se divise en trois pyramides égales entre elles ayant des triangles pour base.*

*Éléments Livre XII, proposition 7*



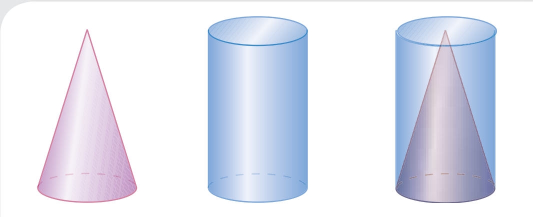

Il découle de cette proposition que le volume d'une pyramide à base triangulaire est égal au tiers du volume du prisme de même base et de même hauteur. Ce résultat est ensuite généralisé à un prisme quelconque puisque la base d'un prisme est un polygone qui peut se diviser en triangles.



Par la méthode de double réduction à l'absurde appelée méthode d'exhaustion, Euclide démontre que

*Tout cône est la tierce partie du cylindre qui a la même base que lui et une hauteur égale.*

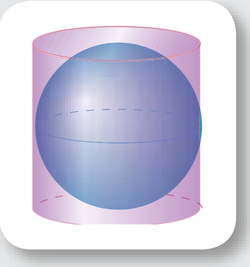
*Éléments Livre XII, proposition 10*



Parmi les savants de l'Antiquité, Archimède occupe une place importante pour l'ensemble de ses découvertes et la qualité de celles-ci. Les résultats dont il était particulièrement fier sont à l'effet que

*La surface de la sphère est quatre fois celle d'un grand cercle (cercle dont le diamètre est le même que la sphère).*

*Lorsqu'un cylindre est circonscrit à une sphère avec un diamètre égal à celui de la sphère, le volume et la surface du cylindre sont une fois et demie le volume et la surface de la sphère.*



C'est en procédant par la méthode d'exhaustion qu'Archimède démontre ces propositions. Mais, comment a-t-il procédé pour savoir quoi démontrer ? Pour trouver la relation entre des aires et ces volumes ? En 1906, la découverte à Constantinople d'une copie du traité *Méthode* d'Archimède qui était adressé à Ératosthène a permis d'en connaître la réponse. On sait maintenant qu'Archimède considérait que la surface ou le solide étaient découpées en tranches et comparaît ces tranches à celles d'une autre surface ou d'un autre solide de telle sorte qu'elles soient en équilibre par sa méthode des leviers. Ainsi, dans la figure ci-dessous, les tranches de la sphère et du cône sont en équilibre avec la tranche du cylindre par rapport au point A, ce qui est vrai pour toutes les tranches découpées à une même distance de A. À partir de cette constatation, il parvient à l'énoncé de la propriété qu'il démontre ensuite par exhaustion (NH Archimède05-06).