Cardinalité et dénombrement

Un ensemble est dit **fini** s'il comporte un nombre fini d'éléments et **infini** s'il comporte un nombre infini d'éléments. C'est le cas pour les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Cardinal d'un ensemble fini

Le **cardinal d'un ensemble fini** est le nombre d'éléments qu'il contient. On note card(A) le cardinal d'un ensemble A.

Pour déterminer le cardinal d'un ensemble, on doit souvent avoir recours à des techniques de dénombrement.

Dénombrement01

EXEMPLE 1

Déterminer le cardinal de l'ensemble A dont les éléments sont les mots distincts de quatre lettres que l'on peut former en changeant l'ordre des lettres du mot « loin ».

Solution

Le diagramme ci-contre indique qu'il y a 24 mots distincts. Cependant, on peut dénombrer sans énumérer en considérant le nombre de choix possibles pour chaque position. Les mots sont formés de quatre lettres.

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

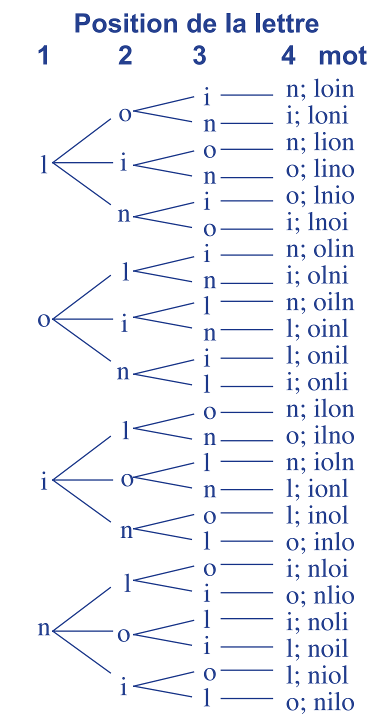
Chacune des cases représente une des positions que peut occuper une lettre dans le mot. On indique le nombre de choix possibles pour chacune de ces positions, ce qui donne :

$$\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}$$

Ce diagramme est une façon de résumer le graphe. Le chiffre 4 de la première case indique qu'il y a quatre choix possibles pour la première lettre, ou encore que le graphe aura quatre points de départ ou quatre racines. De chacune de ces racines partent trois embranchements qui se subdivisent en deux autres embranchements, et ainsi de suite. Le nombre de mots possibles est le nombre de branches du graphe, soit le produit du nombre de racines par le nombre d'embranchements en chaque point,

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ mots distincts.}$$

Le cardinal de l'ensemble est 24.



Permutation

On appelle **permutation** de n objets distincts toute disposition ordonnée de ces n objets. Lorsque les objets sont disposés en cercle, les permutations sont appelées **permutations circulaires**.

REMARQUE

Deux permutations sont distinctes si l'ordre des éléments est différent. Ainsi, les mots « loin » et « lion » sont deux permutations distinctes des lettres l, i, o et n.

Notation factorielle

La notation factorielle que nous allons présenter maintenant nous permettra d'alléger l'écriture lors de la résolution d'un problème de dénombrement.

Factorielle

L'expression $n!$ qui se lit ***n* factorielle** est définie, pour un entier positif n, par l'égalité :

$$n! = n(n-1)(n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1.$$

REMARQUE

$n!$ est donc une façon condensée de représenter le produit d'entiers consécutifs et signifie n **multiplié par tous les entiers positifs qui le précèdent**. Le nombre de permutations de n objets, qui est noté P_n, est égal à $n!$, soit $P_n = n!$. Le nombre de permutations circulaires de n objets, noté P_{cn}, est donné par $P_{cn} = (n-1)!$.

EXEMPLE 2

Déterminer le cardinal de l'ensemble dont les éléments sont les mots distincts de six lettres que l'on peut former avec les lettres a, b, c, d, e et f, et tels que chaque lettre n'est utilisée qu'une seule fois par mot.

Solution

Les différents mots sont obtenus en permutant les lettres données. Puique l'on dispose de 6 lettres, le nombre de permutations est :

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \text{ mots distincts.}$$

Le cardinal de l'ensemble est 720.

| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

REMARQUE

Si on pouvait répéter les lettres dans un même mot, le cardinal de l'ensemble serait $6^6 = 45\,656$. En effet, on aurait

| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |

EXEMPLE 3

Déterminer le cardinal de l'ensemble dont les éléments sont les mots distincts de trois lettres formés avec les lettres du mot « après » et tels que chaque lettre ne peut être utilisée qu'une seule fois par mot.

Solution

Il n'est pas utile de représenter les mots par un graphe en arbre. Il suffit de considérer le nombre de choix pour chacune des trois positions. Pour la première lettre du mot, on a le choix parmi cinq lettres; cette lettre ne pouvant être répétée, il reste à choisir une lettre parmi quatre, puis une lettre parmi trois. Ce qui donne le graphique ci-contre.

On obtient en tout soixante mots formés de trois lettres distinctes. Le cardinal de l'ensemble est donc 60.

Dénombrement02

5		
5	4	
5	4	3

$5 \times 4 \times 3 = 60$

Arrangement sans répétition

On appelle **arrangement sans répétition** de p objets choisis parmi n objets distincts toute disposition ordonnée de p objets distincts choisis parmi un ensemble de n objets distincts.On représente par A_n^p le nombre d'arrangements de p objets choisis parmi n objets.

THÉORÈME

Nombre d'arrangements

Le nombre d'arrangements sans répétition de p objets choisis parmi n objets est donné par

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} A_n^p &= n(n-1)(n-2)...(n-p+1) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)(n-p)(n-p-1)...\times 3\times 2\times 1}{(n-p)(n-p-1)...\times 3\times 2\times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

REMARQUE

Pour dénombrer les mots de p objets choisis sans répétition parmi n objets, on doit remplir p cases. Dans la première case, le nombre de possibilités est n. Dans la deuxième, il est de $n-1$ et ainsi de suite. Il s'ensuit que le nombre de possibilités dans la p^e case est $n-p+1$.

n	$n-1$	$n-2$	...	$n-p+1$

Il nous reste un autre cas à traiter, celui de la cardinalité d'un ensemble dont les éléments sont des sous-ensembles d'un ensemble donné. On se souvient que l'ordre selon lequel on énumère les éléments d'un ensemble n'a pas d'importance.

Combinaisons

On appelle **combinaison** de p objets choisis parmi n objets distincts tout groupement non ordonné de p objets choisis parmi ces n objets distincts. On note C_n^p le nombre de ces combinaisons.

Dénombrement03

EXEMPLE 4

Déterminer la cardinalité de l'ensemble G dont les éléments sont les sous-ensembles de trois lettres distinctes que l'on peut former en choisissant parmi les lettres de l'ensemble {A, B, C, D, E}.

Solution

Dans ce problème, l'ordre suivant lequel on choisit les éléments n'a pas d'importance. On veut former des groupements non ordonnés de trois lettres, en énumérant les éléments de l'ensemble G, on obtient :

$$G = \{\{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, B, E\}, \{A, C, D\}, \{A, C, E\}, \{A, D, E\}, \{B, C, D\}, \{B, C, E\}, \{B, D, E\}, \{C, D, E\}\}.$$

Il y a donc dix sous-ensembles possibles et on a $\text{card}(G) = C_5^3 = 10$.

On peut développer une méthode de dénombrement permettant de déterminer la cardinalité de l'ensemble des sous-ensembles sans avoir recours à l'énumération. On remarque qu'en permutant les trois lettres de chacun de ces dix sous-ensembles, on obtient les soixante arrangements de trois lettres choisies parmi cinq, comme l'illustre le tableau suivant :

Arrangements						Combinaisons
ABC	ACB	BCA	BAC	CAB	CBA	{A;B;C}
ABD	ADB	BDA	BAD	DAB	DBA	{A;B;D}
ABE	AEB	BEA	BAE	EAB	EBA	{A;B;E}
ACD	ADC	CDA	CAD	DAC	DCA	{A;C;D}
ACE	AEC	CEA	CAE	EAC	ECA	{A;C;E}
ADE	AED	DEA	DAE	EAD	EDA	{A;D;E}
BCD	BDC	CDB	CBD	DBC	DCB	{B;C;D}
BCE	BEC	CEB	CBE	EBC	ECB	{B;C;E}
BDE	BED	DEB	DBE	EBD	EDB	{B;D;E}
CDE	CED	DEC	DCE	ECD	EDC	{C;D;E}
$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$						C_5^3

Ce tableau nous permet d'établir la relation entre le nombre de combinaisons et le nombre d'arrangements. En effet, en permutant les éléments de chacune des combinaisons, on obtient tous les arrangements. Par conséquent, en multipliant le nombre de combinaisons par le nombre de permutations des éléments dans chacune des combinaisons, on obtient le nombre d'arrangements. Dans cet exemple, cela signifie :

$$3!C_5^3 = A_5^3,$$

d'où l'on tire $C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5\times4\times3!}{2!\ 3!} = \frac{4\times4}{2\times1} = 10.$

Nombre de combinaisons

En multipliant le nombre de combinaisons par le nombre de permutations des p objets, on obtient le nombre d'arrangements, c'est-à-dire :

$$p!C_n^p = A_n^p,\ \text{d'où } C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

EXEMPLE 5

Déterminer la cardinalité de l'ensemble H des comités non hiérarchisés (sans postes distincts) de cinq personnes que l'on peut former en choisissant parmi neuf personnes.

Solution

L'ordre suivant lequel on choisit les membres du comité n'a aucune importance; ce sont des combinaisons avec $n = 9$ et $p = 5$. Le nombre de comités possibles est :

$$C_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!5!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5!}{4\times3\times2\times1\times5!} = 126.$$

Il y a 126 comités possibles et la cardinalité de l'ensemble dont les éléments sont ces comités est donc car(H) = 126.

PRINCIPES DU DÉNOMBREMENT

Principe multiplicatif

Soit deux opérations dont l'une peut être effectuée de m façons différentes **et** l'autre de n façons différentes. Il y a alors mn façons d'effectuer l'une **et** l'autre opération.

Principe additif

Soit deux opérations dont l'une peut être effectuée de m façons différentes et l'autre de n façons différentes. Il y a alors $m + n$ façons d'effectuer l'une **ou** l'autre opération.

Dénombrement04

EXEMPLE 6

Une étudiante doit faire ses choix de cours pour l'hiver. Parmi les cours offerts, il y a cinq cours de mathématiques et quatre cours de physique.

Dénombrement05

a) Déterminer la cardinalité de l'ensemble des solutions si elle doit choisir trois cours de mathématiques et deux cours de physique.

b) Déterminer la cardinalité de l'ensemble des solutions si elle devait choisir trois cours de mathématiques ou deux cours de physique.

Solution

a) Le nombre de façons de compléter sa fiche est le produit des choix de cours dans chaque discipline. Puisque l'ordre selon lequel elle exprime ses choix n'a pas d'importance, il s'agit de combinaisons et le cardinal de l'ensemble des solutions est :

$$C_5^3\times C_4^2 = \frac{5!}{(5-3)!3!}\times\frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{5\times4\times3!}{2!\ 3!}\times\frac{4\times3\times2!}{2!\ 2!}$$
$$= 10\times6 = 60.$$

b) Le nombre de façons de compléter sa fiche est la somme des choix de cours dans chaque discipline. Le cardinal de l'ensemble des solutions est

$$C_5^3 + C_4^2 = \frac{5!}{(5-3)!3!} + \frac{4!}{(4-2)!2!} = 10+6 = 16.$$

Exercices

1. Déterminer le cardinal des ensembles suivants.
   a) L'ensemble A dont les éléments sont les mots distincts de huit lettres que l'on peut former en permutant les lettres de Philémon.
   b) L'ensemble B dont les éléments sont les mots distincts de quatre lettres que l'on peut former en choisissant parmi les lettres de Philémon, chaque lettre ne devant être utilisée qu'une fois par mot.
   c) L'ensemble C dont les éléments sont les mots distincts de quatre lettres que l'on peut former en choisissant parmi les lettres de Philémon, si les lettres peuvent être utilisée plus d'une fois par mot.
   d) L'ensemble D dont les éléments sont les sous-ensembles de quatre lettres choisis dans l'ensemble $\{p, h, i, l, é, m, o, n\}$.

2. On vous demande de former un comité de quatre personnes en choisissant parmi dix personnes.
   a) Déterminer le cardinal de l'ensemble A de tous les comités possibles.
   b) Il y a, parmi les dix personnes, cinq hommes et cinq femmes, et on vous indique que le comité doit être formé de deux hommes et de deux femmes. Déterminer le cardinal de l'ensemble B de tous les comités possibles.

3. Une banque demande à chacun de ses clients de se choisir un numéro d'identification personnelle pouvant compter de 5 à 8 chiffres et le premier doit être différent de 0.
   a) Combien y a-t-il de numéros d'identification de cinq chiffres possibles si les cinq chiffres doivent être distincts?
   b) Combien y a-t-il de numéros d'identification de cinq chiffres possibles si les chiffres peuvent être répétés?
   c) Au total, combien y a-t-il de numéros d'identification possibles si les chiffres doivent être distincts?
   d) Au total, combien y a-t-il de numéros d'identification possibles si les chiffres peuvent être répétés?

4. Une compagnie de logiciels donne à ses produits des numéros de série qui sont une suite de douze caractères dont les trois premiers sont des lettres identifiant le produit et les deux derniers sont des chiffres indiquant l'année de la mise à jour. Par exemple, la compagnie a mis sur le marché, en 2012, un produit de compression des données dont le numéro de série est de la forme cod-LLL-CCCC-12, où L représente une lettre quelconque et C un chiffre quelconque.
   a) Combien de numéros de série différents peuvent être obtenus si les lettres et les chiffres doivent être distincts?
   b) Combien de numéros de série différents peuvent être obtenus si les lettres et les chiffres peuvent être répétés?
   c) Combien de numéros de série différents peuvent être obtenus si les lettres peuvent être répétées, mais les chiffres doivent être distincts?
   d) Combien de numéros de série différents peuvent être obtenus si les lettres doivent être distinctes, mais les chiffres peuvent être répétés?

5. Lors d'un examen, vous recevez un questionnaire dont les questions sont divisées en deux groupes. Le groupe A contient quatre questions et le groupe B contient six questions. Déterminer la cardinalité de l'ensemble des façons de répondre au questionnaire dans les conditions suivantes.
   a) Si vous devez répondre à quatre questions dont deux du groupe A et deux du groupe B.
   b) Si vous devez répondre à six questions dont deux du groupe A et quatre du groupe B.
   c) Si vous devez répondre à deux questions que vous pouvez choisir soit dans le groupe A, soit dans le groupe B.
   d) Si vous devez répondre à six questions en choisissant au moins deux questions du groupe A.
   e) Si vous devez répondre à six questions en choisissant au plus deux questions du groupe A.

6. Déterminer la cardinalité de l'ensemble des diagonales d'un décagone.

7. Déterminer la cardinalité de l'ensemble des triangles dont les sommets coïncident avec ceux d'un décagone.

8. Déterminer la cardinalité de l'ensemble des quadrilatères dont les sommets coïncident avec ceux d'un décagone.

9. On vous demande de former des mots de passe en vous servant des nombres premiers compris entre 10 et 70, soit :

$$\{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67\}.$$

   a) Déterminer le cardinal de l'ensemble A comprenant tous les mots de passe de huit chiffres que l'on peut former en choisissant quatre nombres premiers distincts entre 10 et 70.
   b) Déterminer le cardinal de l'ensemble B de tous les mots de passe formés par le produit de quatre des nombres premiers énumérés ci-haut.
   c) Déterminer le cardinal de l'ensemble C comprenant tous les mots de passe de huit chiffres que l'on peut former en choisissant quatre nombres premiers entre 10 et 70.

10. Une banque demande à ses clients de se choisir un numéro d'identification personnelle.
   a) Germain veut utiliser une permutation des lettres de son prénom. Déterminer le cardinal de l'ensemble de ces permutations.
   b) Pour retrouver plus facilement son mot de passe en cas d'oubli, Germain décide de choisir parmi ces permutations un mot dont les trois premières lettres sont des voyelles et les quatre autres des consonnes. Déterminer le cardinal de l'ensemble des solutions qui s'offrent à lui.
   c) Annabella décide aussi d'utiliser une permutation des lettres de son prénom. Déterminer le cardinal de l'ensemble de ces permutations.

Réponses

1. a) $\text{card}(A) = 40\,320$ c) $\text{card}(C) = 4\,096$
   b) $\text{card}(B) = 1\,680$ d) $\text{card}(D) = 70$

2. a) $\text{card}(A) = 210$ b) $\text{card}(B) = 100$

3. a) 27 216 NIP c) 2 340 576 NIP
   b) 90 000 NIP d) 99 990 000 NIP

4. a) 78 624 000 c) 88 583 040
   b) 175 760 000 d) 156 000 000

5. a) 90 d) 185
   b) 90 e) 115
   c) 21

6. 35

7. 120

8. 210

9. a) 32 760 c) 50 625
   b) 1 365

10. a) 5 040 c) 15 120
   b) 144