Illustration : Noémie Ross

Brook Taylor
1685-1731

Le nom de Taylor est étroitement associé aux séries. Poursuivant les travaux de Newton, il a développé une méthode de représentation des fonctions par des séries infinies et développé la technique d'intégration par parties.

Brook Taylor

Le mathématicien anglais Brook Taylor est né à Edmonton qui est maintenant un quartier de Londres. Issu d'une famille aisée, ce sont des précepteurs particuliers qui lui donnent sa formation élémentaire et son père, John, lui communique l'amour de la musique et de la peinture. Taylor entre au Saint-John's College de Cambridge en 1703 et reçoit son diplôme en 1709. Il acquiert sa formation mathématique sous la direction de John Machin[1] et de John Keill[2].

En 1708, Taylor produit une solution au problème du centre d'oscillation d'un corps, en utilisant une méthode basée sur l'approche de Newton du calcul différentiel, qui n'a été publiée qu'en 1714. Ce retard a entraîné une dispute avec Jean Bernoulli sur la priorité de la découverte.

Élu membre de la Royal Society en 1712, il fut nommé, la même année, sur le comité qui devait statuer sur les prétentions de Newton et Leibniz quant à la priorité de la découverte du calcul différentiel et intégral.

De 1714 à 1718, il occupe le poste de fut secrétaire de la Royal Society En 1715, il publie un ouvrage intitulé *Linear Perspective.* Taylor y présente les principes de la perspective sous une forme originale et plus générale que dans les ouvrages publiés jusqu'alors.

Cependant, la renommée de Taylor vient surtout de son ouvrage *Methodus incrementorum directa et inversa*, paru en 1715, dans lequel il pose les fondements d'une nouvelle branche des mathématiques appelée aujourd'hui ***Calcul des différences finies***, et de la méthode d'intégration par parties qu'il a développée.

C'est également dans ce texte qu'il présente le développement en série qui porte son nom et qui permet de calculer une valeur approchée d'une fonction en un point à l'aide de ses dérivées successives en ce point. L'approximation affine d'une fonction en un point est un cas particulier d'approximation en série de Taylor.

L'importance du développement en série de Taylor n'a été reconnue qu'en 1772 lorsque Lagrange déclara qu'il s'agissait du principe fondamental du calcul différentiel. Cet ouvrage contient également une étude de physique mathématique: la détermination de la fréquence des vibrations et de la forme d'une corde vibrante, connaissant sa longueur, son poids et sa tension.

En 1715, Taylor a également produit le compte-rendu d'une expérience permettant d'établir la loi de l'attraction ma-

1. Le mathématicien anglais John Machin (1680–1751) est surtout connu pour son calcul de 100 décimales de ϖ, en 1706, exploit réalisé grâce à la formule qui porte son nom, la formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Arc\,tan}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{Arc\,tan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

2. John Keill (1671–1721), né à Édimbourg en Écosse, fut un ardent partisan d'Isaac Newton dans la controverse sur la primauté de la découverte du calcul différentiel et intégral.

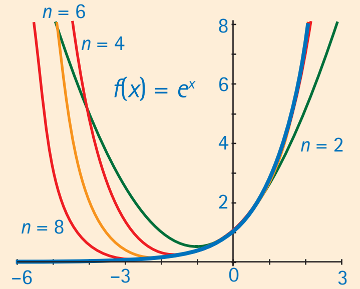
gnétique. Il a développé une méthode pour faire une approximation des racines d'une équation à partir d'une nouvelle méthode de calcul des logarithmes (1717).

Série de Taylor

En analyse, le théorème de Taylor appelé aussi la formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1751, montre qu'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point peut être approchée par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.

l'image par la fonction. L'illustration en bas de page qui représente la fonction cosinus en bleu et les polynômes de Taylor d'ordre 4, 16, 24 et 40, permet de visualiser le fait qu'en prenant un polynôme de ordre de plus en plus élevé, on peut calculer l'image par la fonction pour une valeur de x comprise dans un intervalle de plus en plus large. La série converge pour tout nombre réel, ce qui signifie que le polynôme de ordre infini permet de calculer précisément l'image d'une valeur x quelconque dans l'intervalle $]-\infty; \infty[$.

Polynômes de Taylor de la fonction $f(x) = e^x$ autour de $x = 1$



Intervalle de convergence $]-\infty; \infty[$

Forme générale d'un développement en série de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \ldots$$

Dans une calculatrice, les développements en série sontprogrammés pour calculer les images de valeurs quelconques par des fonctions.

Il suffit d'évaluer l'image de a par les dérivées successives pour déterminer le développement en série d'une fonction au tour de a. En considérant les fonctions sinus et cosinus au voisinage de 0, on obtient les développements suivants :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

En considérant un nombre fini de termes d'un développement en série de Taylor, on obtient un polynôme d'ordre fini dont l'image donne une valeur approchée de

On peut dériver et intégrer ces développements et calculer soit la pente de la tangente en un point d'abscisse x, soit calculer l'aire sous la courbe dans un intervalle $[0; x]$.

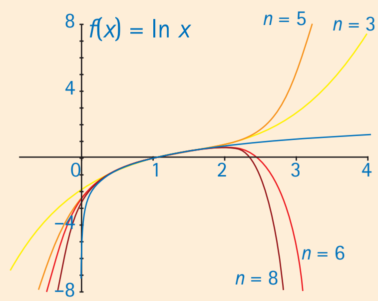
On peut faire de même avec la fonction exponentielle qui est sa propre dérivée

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

ou avec la fonction logarithme naturel au voisinage de 1,

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots$$

Polynômes de Taylor de la fonction $f(x) = \ln x$ autour de $x = 1$



Intervalle de convergence $]0; 2]$

Polynômes de Taylor de la fonction $f(x) = \cos x$