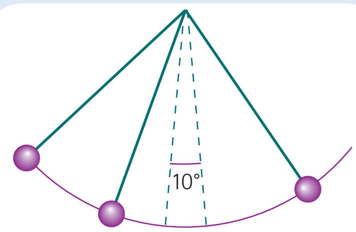
Illustration : Noémie Ross

Christiaan Huygens

1629-1695

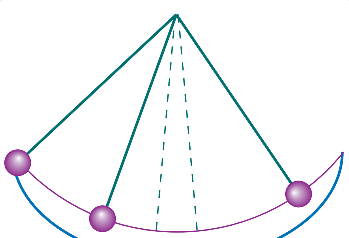
Dans ses travaux pour améliorer la précision des horloges, Huygens a établi que la trajectoire du pendule devait être cycloïdale pour assurer l'isochronisme du pendule. Mais, comment forcer un pendule, dont la trajectroire normale est circulaire, à adopter une trajectoire cycloïdale ?

Christiaan Huygens
Développée d'une courbe



Dès que l'amplitude dépasse 5 degrés par rapport au point le plus bas, le pendule n'est plus parfaitement synchrone.

Des billes partant en même temps de différents points sur une cycloïde atteignent simultanément le point le plus bas de la courbe.

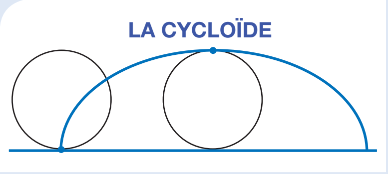


Comment contraindre la masse du pendule à suivre une trajectoire cycloïdale plutôt que circulaire ?

Du pendule à ...

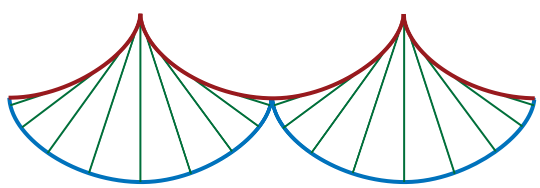
Pour obtenir une meilleure précision de la mesure du temps, Huygens cherche à améliorer la précision des horloges utilisant un pendule et constate que Galilée s'est trompé en prétendant que l'oscillation circulaire d'un pendule est parfaitement isochrone. Si l'amplitude du pendule dépasse 5 degrés par rapport au point le plus bas, le mouvement n'est plus isochrone.

Huygens démontre que pour que le pendule soit isochrone, la masse de celui-ci doit suivre une trajectoire cycloïdale. Autrement dit, a période est constante quelque soit l'amplitude de l'oscillation lorsque la trajectoire est cycloïdale. La cycloïde est la courbe décrite par un point sur la circonférence d'un cercle qui roule sans glisser sur une surgace plane[1].



Mais, comment contraindre la masse à suivre une trajectoire cycloïdale ? Durant toute l'oscillation, la corde du pendule est perpendiculaire à la courbe. La perpendiculare à une courbe en un point est applée *normale* à la courbe en ce point. Dans le cas d'une trajectoire circulaire, la normale, position occupée par la corde, est un rayon du cercle et toutes les normales convergent en un même point, le centre du cercle.

Pour que la masse décrive une cycloïde, il faut déterminer comment contraindre la corde du pendule à être en tout temps perpendiculaire à une cyloïde. Huygens découvre alors qu'en traçant les normales à une cycloïde (en bleu dans la figure ci-dessous), ces normales décrivent une cycloïde translatée (courbe en rouge).

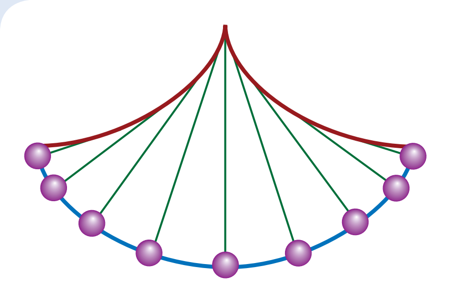


Pour que la masse suive une trajectoire cycloïdale, il faut contraindre la corde du pendule à occuper les positions successives de la normale à la cycloïde.

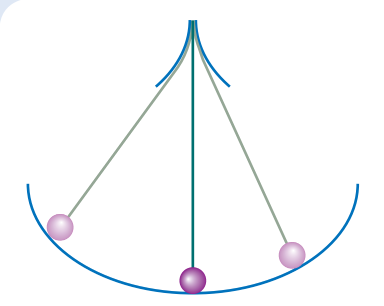
Eurêka, aurait dit Archimède. Pour que la corde du pendule se confonde avec la position de la normale à la cycloïde, il faut construire une horloge dans la-

1. Pour connaître l'équation de la cycloïde, voir la vidéo ÉquaParam09 à l'adresse

quelle le pendule oscille entre deux joues cycloïdales.



En pratique, il n'est pas nécessaire dans un pendule d'avoir une amplitude aussi imprtante que dans la figure précédente. Il suffit d'ajouter deux lamelles qui auront pour effet de modifier la direction de la corde en temps réel de sorte que la masse ait une trajectoire cycloïdale.



Les lamelles cycloïdales modifient la direction de la corde du pendule pour que celle-ci soit en tout temps normale à une cycloïde.

... la développée d'une courbe

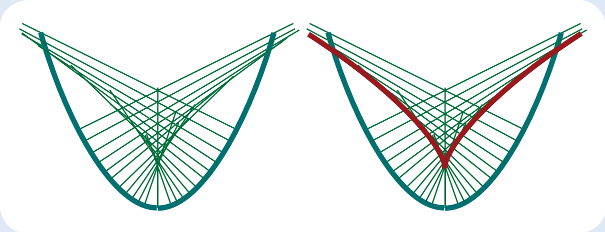
Pour résoudre le problème de l'isochronisme du pendule, Huygens a déterminé une courbe définie par les normales à une autre courbe. La courbe dont on trace les normales est la **développante** et la courbe obtenue est la **développée**.

Une développée d'une courbe est une courbe dont les tangentes sont les normales à la courbe de départ.

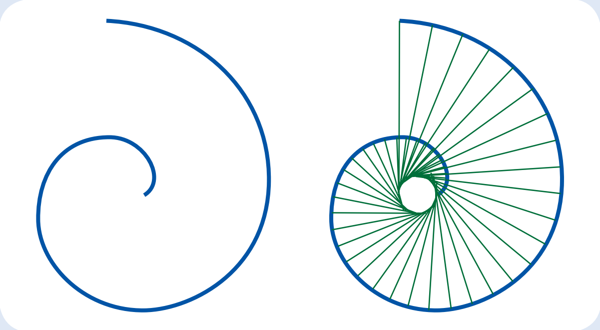
Il est à noter que la développée d'une courbe peut également être définie comme le lieu de ses centres de courbure, c'est-à-dire le lieu des centres des circonférences tangentes à la courbe.

Voyons quelques exemples. La développée d'un cercle est le centre de ce cercle, c'est le point de convergence de toutes les normales à la courbe.

En traçant les normales à une parabole, on voit apparaître une courbe, c'est la développée de la parabole.

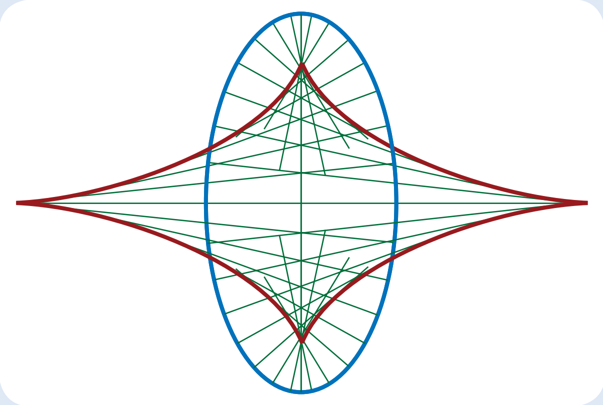


La figure suivante est une anti-clothoïde et sa développée est un cercle.



On peut aussi interpréter la figure d'une autre façon. Si on déroule une corde enroulée autour d'un cercle en la maintenant bien tendue, on obtient la développante du cercle.

La développée d'une ellipse est une astroïde dilatée.



La recherche de Hugens pour améliorer la précision des horloges à pendule lui a fait ouvrir un nouveau champ d'étude des courbes.