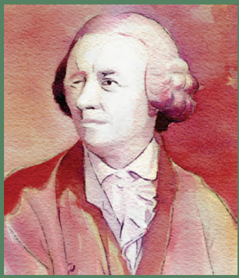

Leonhard Euler
1707-1783

Euler a fait beaucoup de manipulations sur les séries divergentes. Ses manipulations de la série harmonique l'ont conduit à des résultats fort intéressants en lien avec la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Somme des inverses

Somme des inverses

Euler a fait beaucoup de manipulations avec des séries divergentes. En voici un exemple avec la série harmonique.
En représentant la série par ζ,

$$\zeta = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots$$

Euler en réarrange les termes pour séparer ceux dont le dénominateur est pair de ceux dont le dénominateur est impair et, dans le premier regroupement, il met 1/2 en évidence. Cela donne

$$\begin{aligned}\zeta &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\right).\end{aligned}$$

La série à l'intérieur de la première parenthèse est ζ, en substituant dans le développement

$$\zeta = \frac{1}{2}\zeta+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\right).$$

En isolant ζ, il obtient

$$\frac{1}{2}\zeta = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$$

Il regroupe ensuite les termes dont le dénominateur est un multiple de 3 et met 1/3 en évidence, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\zeta = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\right)+\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots\right).$$

La série à l'intérieur de la première parenthèses est alors $\zeta/2$ et, en substituant :

$$\frac{1}{2}\zeta = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta+\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots\right),$$

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\zeta-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta\\ &= \left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}\ldots\right).\end{aligned}$$

En regroupant les termes dont le dénominateur est divisible par 5, il obtient :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta &= \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\right)+\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots\right)\\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta+\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots\right),\end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta = \left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots\right).$$

En poursuivant ainsi pour tous les nombres premiers, il établit que :

$$\ldots\frac{10}{11}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\zeta = \frac{1}{1},$$

et, en isolant ζ dans cette équation, il obtient

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\ldots\\ &= \prod_{p\ \text{premier}}\frac{p}{p-1}\\ &= \prod_{p\ \text{premier}}\frac{1}{1-p^{-1}}.\end{aligned}$$

Il obtient donc que la série harmonique est égale à un produit portant sur les nombres premiers
Cette démonstration est considérée

comme une autre preuve qu'il y a un nombre infini de nombres premiers. En effet, puisque la série harmonique diverge, le produit est infini. Il doit donc comporter un nombre infini de facteurs et chaque facteur est associé à un nombre premier.

Somme des carrés des inverses

Euler a appliqué la même procédure au problème de la somme des inverses des carrés des nombres entiers qui, en 1673, avait été posé à Leibniz par Henry Oldenburg, secrétaire de la *Royal Society*. En représentant la série par $\zeta(2)$,

$$\begin{aligned}\zeta(2)&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\\&=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\ldots\end{aligned}$$

Euler en réarrange les termes pour séparer ceux dont le dénominateur est un multiple de 4 de ceux dont le dénominateur n'est pas divisible par 4 et il met 1/4 en évidence dans le premier regroupement.

$$\begin{aligned}\zeta(2)&=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\ldots\\&=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}\right)+1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\\&=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\end{aligned}$$

Le premier regroupement est alors $\zeta(2)$ et en substituant, il obtient

$$\frac{3}{4}\zeta(2)=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\frac{1}{121}+\ldots$$

En regroupant alors les termes dont le dénominateur est un multiple de 9 et en mettant 1/9 en évidence,

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\zeta(2)&=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\ldots\right)+1+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\\&=\frac{1}{9}\left(1+\frac{1}{9}+\ldots\right)+1+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\end{aligned}$$

Le premier regroupement est alors $\zeta(2)$ et en substituant, il obtient

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\zeta(2)&=\frac{1}{9}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\right)+1+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\\&=\frac{1}{9}\times\frac{3}{4}\zeta(2)+1+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\zeta(2)-\frac{1}{9}\times\frac{3}{4}\zeta(2)&=1+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\\\frac{9}{9}\times\frac{3}{4}\zeta(2)-\frac{1}{9}\times\frac{3}{4}\zeta(2)&=1+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\\\frac{8}{9}\times\frac{3}{4}\zeta(2)&=1+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\end{aligned}$$

En regroupant et en mettant successivement en évidence les inverses des carrés de tous les nombres premiers, l'équation devient

$$\ldots\times\frac{48}{49}\times\frac{24}{25}\times\frac{8}{9}\times\frac{3}{4}\zeta(2)=1$$

En isolant $\zeta(2)$ la somme des inverses des carrés des nombres entiers est transformée en produit,

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots&=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{49}{48}\ldots\\&=\frac{1}{3/4}\cdot\frac{1}{8/9}\cdot\frac{1}{24/25}\cdot\frac{1}{48/49}\ldots\\&=\frac{1}{1-1/4}\cdot\frac{1}{1-1/9}\cdot\frac{1}{1-1/25}\cdot\frac{1}{1-1/49}\ldots\\&=\frac{1}{1-1/2^2}\cdot\frac{1}{1-1/3^2}\cdot\frac{1}{1-1/5^2}\cdot\frac{1}{1-1/7^2}\ldots\end{aligned}$$

Il est à noter que la somme des inverses des carrés des nombres entiers est une série de Riemann convergente et par ses calculs, Euler a estimé que cette somme était $\varpi^2/6$, ce qui a été démontré formellement par la suite.

En généralisant la démarche pour la sommes des inverses des différentes puissances des entiers, on obtient ce que nous notons $\zeta(s)$ et qui est appelée *fonction ζ de Riemann*, soit :

$$\begin{aligned}\zeta(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\text{ premier}}\frac{p^s}{p^s-1}\\&=\prod_{p\text{ premier}}\frac{1}{1-1/p^s}.\end{aligned}$$

Cette fonction est à l'origine des grands développements modernes de la théorie des nombres., elle est en relation avec le nombre $\varpi(x]$ de nombres premiers inférieurs à x.

1. La fonction ζ de Riemann est une fonction rencontrée dans l'étude de la répartition des nombres premiers. La position de ses zéros complexes est liée à la répartition des nombres premiers.