6

DÉRIVÉE : ANALYSE *de* FONCTIONS

Faire l'analyse complète d'une fonction et construire son graphique.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont :

- la détermination des valeurs critiques d'une fonction;
- l'analyse du comportement d'une fonction à partir du signe de ses dérivées première et seconde;
- la détermination des comportements asymptotiques d'une fonction;
- la construction du tableau synthèse des données obtenues dans l'analyse d'une fonction.

OBJECTIFS

6.1 Utiliser le signe de la dérivée première et de la dérivée seconde pour déterminer les tendances d'une fonction sur un intervalle.

6.2 Utiliser l'information donnée par les dérivées, les limites infinies et les limites à l'infini pour construire la représentation graphique d'une fonction.

6.1 Croissance et concavité

Nous avons déjà obtenu intuitivement quelques liens entre les dérivées d'une fonction dans un intervalle et la forme du graphique dans cet intervalle. Nous établirons maintenant ces relations de façon formelle.

Croissance et décroissance

Dans le graphique d'une fonction mathématique, on ne retrouve que quatre formes fondamentales. Ces formes sont les suivantes :

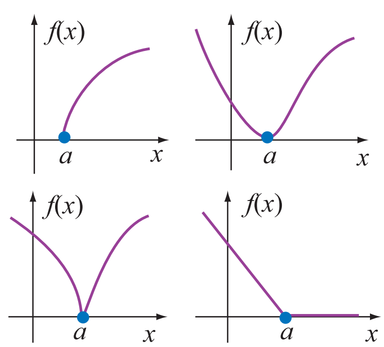
croissante concave vers le bas	croissante concave vers le haut	décroissante concave vers le bas	décroissante concave vers le haut

AnalyseGraphique01

Chacune de ces formes peut être caractérisée par le signe des dérivées première et seconde. Pour que le graphique de la fonction passe d'une forme à l'autre, l'une des dérivées doit changer de signe. Pour qu'une fonction change de signe, elle doit s'annuler ou encore avoir une asymptote (il existe également des fonctions ayant des discontinuités par saut, mais nous ne rencontrerons pas ces situations dans le présent chapitre). En déterminant où s'effectuent les changements de signe des dérivées, nous allons pouvoir déterminer la forme de la fonction dans chacun des intervalles et ainsi faire une analyse complète du comportement de cette fonction.

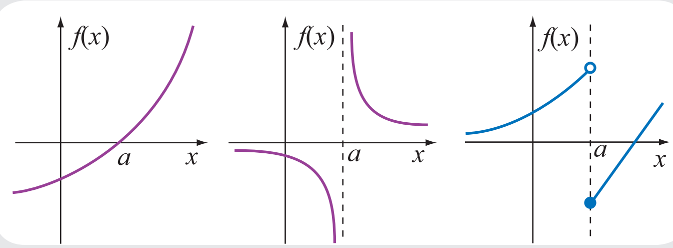
REMARQUE

Lorsque $f(a) = 0$, a est un zéro de la fonction. Le graphique de la fonction peut couper l'axe horizontal, mais pas obligatoirement comme l'indiquent les figures suivantes.



POSTULAT

Soit f, une fonction. Si f change de signe à $x = a$, alors $f(a) = 0$ ou f a une asymptote ou un saut à $x = a$.



Croissance et décroissance

Soit f une fonction définie partout sur un intervalle I.

Si pour tout $a < b \in I$:

- $f(a) < f(b)$, alors f est une fonction strictement croissante sur l'intervalle I.
- $f(a) \leq f(b)$, alors f est une fonction croissante sur l'intervalle I.
- $f(a) > f(b)$, alors f est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle I.
- $f(a) \geq f(b)$, alors f est une fonction décroissante sur l'intervalle I.

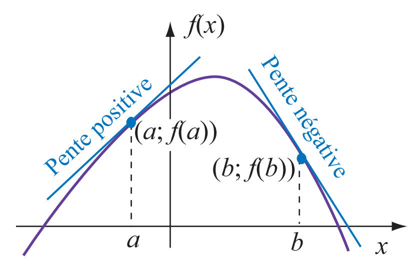
Intuitivement, on constate que si une fonction est croissante en un point d'abscisse a, alors la pente de la tangente en ce point est positive. Si la fonction est décroissante en un point d'abscisse b, alors la pente de la tangente en ce point est négative. De plus, si la pente de la tangente est positive en tout point d'un intervalle, la fonction est croissante sur l'intervalle. Si la pente de la tangente est négative en tout point d'un intervalle, la fonction est décroissante sur l'intervalle. Cette constatation nous amène à énoncer les théorèmes suivants que nous accepterons sans démonstration.

THÉORÈME

Croissance et décroissance en un point

Soit f, une fonction dérivable (donc continue) en $x = a$.

- Si $f'(a) > 0$, alors f est croissante en $x = a$.
- Si $f'(a) < 0$, alors f est décroissante en $x = a$.



THÉORÈME

Croissance et décroissance sur un intervalle

Soit f, une fonction dérivable (donc continue) sur un intervalle I.

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I.

THÉORÈME

Croissance, décroissance et dérivée première

Soit f, une fonction continue sur un intervalle $[c; d]$ telle que f' existe sur $]c; d[$.

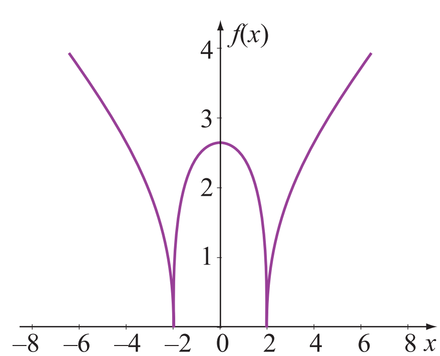
- Si $f'(x) > 0$ sur $]c; d[$, alors f est croissante sur $[c; d]$.
- Si $f'(x) < 0$ sur $]c; d[$, alors f est décroissante sur $[c; d]$.

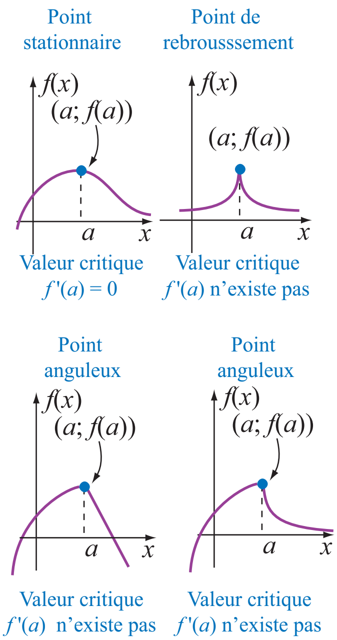
Valeurs critiques (dérivée première)

Les valeurs critiques d'une fonction sont des valeurs pour lesquelles la dérivée est nulle ou n'existe pas. Considérons la fonction $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$ dont la dérivée est $f'(x) = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}}$. Cette dérivée s'annule à $x = 0$. La tangente est donc horizontale en $x = 0$. De plus, la dérivée n'est pas définie à $x = -2$ et à $x = 2$, puisque la division par 0 n'est pas définie. Le graphique de la fonction, donné ci-contre permet de constater qu'à -2 et 2, la tangente est verticale et que le signe de la dérivée change aux points correspondants.

TIC

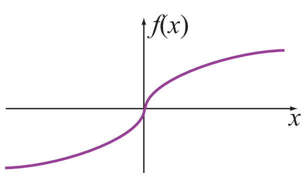
```
plot([(x^2-4)^(2/3),(4-x^2)^(2/3)],
> x=-8..8, y=0..4,numpoints=1000,
> color=blue);
```





REMARQUE

En $x = 0$, la tangente à la courbe de la fonction suivante est verticale, mais le signe de la dérivée est le même à gauche et à droite de 0. Le point (0; 0) n'est donc pas un point de rebroussement.



AnalyseGraphique02

REMARQUE

Pour déterminer les intervalles de croissance et de décroissance d'une fonction, on cherche d'abord les valeurs critiques par rapport à la dérivée première, puis on fait l'étude du signe dans chacun des intervalles définis par ces valeurs.

Valeur critique et point critique (dérivée première)

Soit f, une fonction. On dit qu'un élément a du domaine de f est une **valeur critique** de f relative à la dérivée première si $f'(a) = 0$ ou si $f'(a)$ n'existe pas.

De plus, si a est une valeur critique, le point $(a; f(a))$ du graphique de la fonction f est appelé **point critique**.

Point stationnaire

Soit f, une fonction. On dit qu'un point $(a; f(a))$ est un **point stationnaire** si $f'(a) = 0$.

Point anguleux et point de rebroussement

Soit f, une fonction définie sur un intervalle ouvert et a, un élément de cet intervalle tel que $f'(a)$ n'existe pas. Le point $(a; f(a))$ est :

- un **point anguleux** si en ce point les portions de courbes, à gauche et à droite de a, ont des tangentes de pentes réelles distinctes.
- un **point de rebroussement** si en ce point les portions de courbes, à gauche et à droite de a, ont des tangentes verticales confondues et que le signe de la dérivée première est différent à gauche et à droite de a ($f'(x)$ change de signe lorsque x passe de a^- à a^+).

EXEMPLE 6.1.1

Déterminer les valeurs critiques de la fonction et dire quel est le type de point critique.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 21x + 4$ b) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 2x - 15)^2}$

Solution

a) La dérivée de la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 21x + 4$ est :

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 21 = (3x + 7)(x - 3).$$

Elle s'annule à $x = -7/3$ et $x = 3$, ce sont les valeurs critiques de la fonction.

Puisque $f'(-7/3) = 0$, le point $(-7/3, 941/27)$ est un point stationnaire.

Puisque $f'(3) = 0$, le point $(3, -41)$ est un point stationnaire.

b) La dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 2x - 15)^2}$ est :

$$f'(x) = \frac{2(2x+2)}{3\sqrt[3]{(x^2 + 2x - 15)}} = \frac{4(x+1)}{3\sqrt[3]{(x-3)(x+5)}}.$$

Le numérateur s'annule à $x = -1$, par conséquent -1 est une valeur critique et le point $(-1; \sqrt[3]{256})$ est stationnaire puisque $f'(-1) = 0$.

Le dénominateur s'annule à $x = 3$ et $x = -5$, ce sont deux valeurs critiques puisque $f'(3)$ n'existe pas et $f'(-5)$ non plus.

La fonction f est définie à $x = 3$ et le dénominateur de f' s'annule, à $x = 3$, la tangente est donc verticale en (3; 0).

De plus, $f'(x) < 0$ si $x < 3$ et $f'(x) > 0$ si $x > 3$. Par conséquent, la

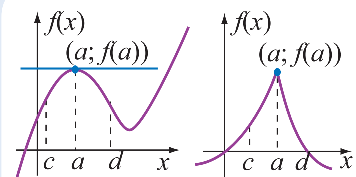
dérivée change de signe lorsque x passe de 3^- à 3^+.
Par conséquent, le point (3; 0) est un point de rebroussement.
Le même raisonnement permet de conclure que (–5; 0) est également un point de rebroussement.

Extremums relatifs

Maximum relatif

Soit f, une fonction et $a \in \text{dom}_f$.

$f(a)$ est un **maximum relatif** de f s'il existe un intervalle ouvert I, tel que $a \in I$ et $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in I$.

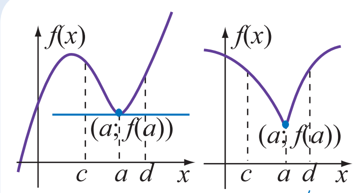


$f'(a) = 0$ $f'(a)\ \nexists$
Maximum relatif à $x = a$

Minimum relatif

Soit f, une fonction et $b \in \text{dom}_f$.

$f(b)$ est un **minimum relatif** de f s'il existe un intervalle ouvert I, tel que $b \in I$ et $f(b) \leq f(x)$ pour tout $x \in I$.



$f'(a) = 0$ $f'(a)\ \nexists$
Minimum relatif à $x = a$

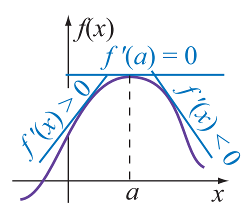
THÉORÈME

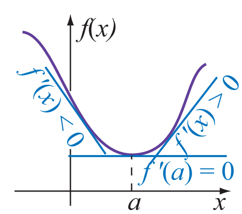
Extremum relatif et dérivée première

Soit f, une fonction continue sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Si $f(a)$ est un maximum relatif ou un minimum relatif de f, alors ;

$f'(a) = 0$ ou $f'(a)$ n'existe pas.





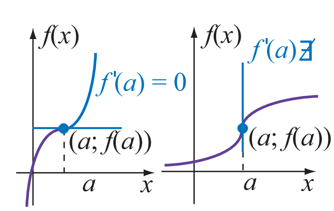
AnalyseGraphique03

THÉORÈME

Test de la dérivée première

Soit f, une fonction continue sur un intervalle ouvert I et $a \in I$, une valeur critique de f par rapport à la dérivée première ($f'(a) = 0$ ou $f'(a)$ n'existe pas).

- Si $f'(x)$ est positive à gauche de a et négative à droite, alors $(a; f(a))$ est un point de maximum relatif de f.
- Si $f'(x)$ est négative à gauche de a et positive à droite, alors $(a; f(a))$ est un point de minimum relatif de f.
- Si $f'(x)$ a le même signe à gauche et à droite de a, alors $(a; f(a))$ n'est ni un point de maximum relatif ni un point de minimum relatif de f.



PROCÉDURE

Recherche des extremum relatifs (dérivée première)

1. Déterminer les valeurs critiques de la fonction par rapport à la dérivée première.
2. Faire l'étude du signe de la dérivée première de part et d'autre des valeurs critiques.
3. Rédiger la conclusion

AnalyseGraphique04

EXEMPLE 6.1.2

Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction définie par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 5.$$

Déterminer le maximum relatif et le minimum relatif de la fonction.

Solution

Valeurs critiques par rapport à la dérivée première

En dérivant la fonction f, on trouve :

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 36 = 3(x^2 + 4x - 12) = 3(x - 2)(x + 6).$$

La dérivée est une fonction quadratique qui s'annule à $x = 2$ et $x = -6$. Ces deux valeurs divisent le domaine de la fonction en trois intervalles ouverts, soit $]-\infty; -6[$, $]-6; 2[$ et $]2; \infty[$.

REMARQUE
Pour que le signe de la dérivée soit différent à gauche et à droite de $x = a$, il faut que la dérivée s'annule à $x = a$ ou que la fonction ait une discontinuité à $x = a$. Ainsi, en calculant l'image par la fonction dérivée à $x = -10$, on peut conclure que la dérivée est négative dans tout l'intervalle $]-\infty; -6[$ puisqu'elle s'annule seulement à -6 et 2.

Étude du signe de la dérivée

Pour déterminer le signe de la dérivée dans l'intervalle $]-\infty; -6[$, on doit trouver l'image par la fonction dérivée d'un élément de cet intervalle. Si on détermine l'image de $x = -10$ par exemple, on trouve :

$$f'(-10) = 3(-12)(-4) = 144 > 0.$$

L'image est plus grande que 0. La dérivée est donc toujours positive dans cet intervalle puisque les changements de signe se font à $x = -6$ et $x = 2$. On peut conclure que la fonction est croissante dans l'intervalle $]-\infty; -6]$. Pour déterminer le signe de la dérivée dans l'intervalle $]-6; 2[$, calculons l'image de 0, ce qui donne :

$$f'(0) = 3(-2)(6) = -36 < 0.$$

L'image est plus petite que 0. La dérivée est donc toujours négative dans cet intervalle puisque les changements de signe se font à $x = 2$ et $x = -6$. La fonction est donc décroissante dans l'intervalle $[-6; 2]$. Pour déterminer le signe de la dérivée dans l'intervalle $[2; \infty[$ calculons l'image de 4, ce qui donne :

$$f'(4) = 3(2)(10) = 60 > 0.$$

L'image est plus grande que 0. La dérivée est donc toujours positive dans cet intervalle puisque les changements de signe se font à $x = 2$ et $x = -6$. La fonction est donc croissante dans l'intervalle $[2; \infty[$.

REMARQUE
Un **maximum relatif** d'une fonction est une valeur qui est plus grande que toutes les autres valeurs du voisinage alors qu'un **minimum relatif** est une valeur qui est plus petite que toutes les autres valeurs du voisinage. Les extremums sont des valeurs de la variable dépendante.

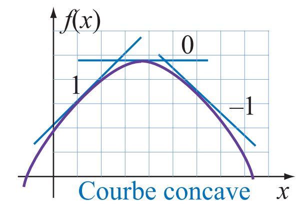
Conclusion

La fonction a un maximum relatif à $x = -6$, car elle est croissante dans l'intervalle $]-\infty; -6]$ et décroissante dans l'intervalle $[-6; 2]$. La fonction a un minimum relatif à $x = 2$, car elle est décroissante dans l'intervalle $[-6; 2]$ et croissante dans l'intervalle $[2; \infty[$.

Concavité

Concavité vers le bas

Géométriquement, une courbe est **concave vers le bas** dans un intervalle si elle est au-dessous de toutes les tangentes que l'on peut tracer à la courbe dans cet intervalle.

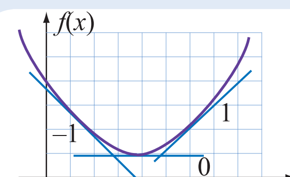


Courbe concave vers le bas

Dans la figure accompagnant la définition de concavité vers le bas, on constate que la fonction dérivée est décroissante dans l'intervalle représenté. En effet, la valeur de la pente de la tangente à la courbe en un point d'abscisse x quelconque de cet intervalle diminue lorsque la valeur de x augmente. La fonction f' étant décroissante dans l'intervalle illustré, sa dérivée f'' est négative dans cet intervalle.

Concavité vers le haut

Géométriquement, une courbe est **concave vers le haut** dans un intervalle si elle est au-dessus de toutes les tangentes que l'on peut tracer à la courbe dans cet intervalle.

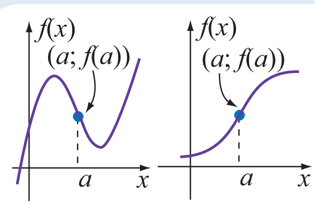


Courbe concave vers le haut

Dans la figure accompagnant la définition de concavité vers le haut, la fonction dérivée est croissante dans l'intervalle représenté. En effet, la valeur de la pente de la tangente à la courbe en un point d'abscisse x quelconque de cet intervalle augmente lorsque la valeur de x augmente. La fonction f' étant croissante, sa dérivée f'' est positive dans cet intervalle.

Point d'inflexion

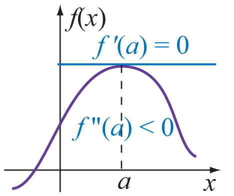
Soit f, une fonction continue en $x = a$. On dit que f a un **point d'inflexion** à $x = a$ si $f(a)$ existe et que la fonction a un changement de concavité au point $(a; f(a))$.

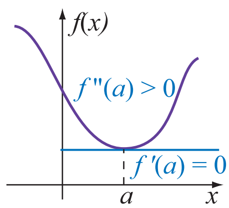


Valeur critique et point critique (dérivée seconde)

Soit f, une fonction. On dit qu'un élément a du domaine de f est une **valeur critique** *de* f relative à la dérivée seconde si $f''(a) = 0$ ou si $f''(a)$ n'existe pas.

De plus, si a est une valeur critique, le point $(a; f(a))$ du graphique de la fonction f est appelé **point critique**.





Les caractéristiques de la concavité détectées à partir des graphiques nous amènent à énoncer le théorème suivant que nous accepterons sans démonstration.

THÉORÈME

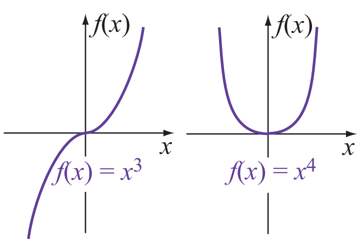
Concavité et dérivée seconde

Soit f, une fonction continue sur $[c; d]$ et telle que f' et f'' existent partout sur l'intervalle $]c; d[$.

- Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in\ ]c; d[$, alors f est concave vers le haut sur l'intervalle $]c; d[$.
- Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in\ ]c; d[$, alors f est concave vers le bas sur l'intervalle $]c; d[$.

REMARQUE

Si la dérivée première et la dérivée seconde s'annulent à $x = a$, la fonction peut avoir un point d'inflexion à $x = a$. C'est le cas pour la fonction $f(x) = x^3$, représentée ci-contre, dont la dérivée première et la dérivée seconde s'annulent toutes les deux à $x = 0$. La fonction a un point d'inflexion à $x = 0$. Ce n'est pas le cas pour $f(x) = x^4$ qui a un minimum à $x = 0$, mais dont les dérivées première et seconde s'annulent à $x = 0$.



AnalyseGraphique05

La dérivée seconde nous fournit un test permettant de déterminer si un zéro de la fonction dérivée correspond à un maximum ou un minimum relatif de la fonction.

THÉORÈME

Test de la dérivée seconde

Soit f, une fonction dérivable en $x = a$ et $f'(a) = 0$.

- Si $f''(a) < 0$, alors la courbe est concave vers le bas et la fonction atteint un maximum relatif en $x = a$.
- Si $f''(a) > 0$, alors la courbe est concave vers le haut et la fonction atteint un minimum relatif en $x = a$.
- Si $f''(a) = 0$, on ne peut rien conclure.

REMARQUE

Pour déterminer les intervalles de concavité vers le bas et vers le haut d'une fonction, on cherche d'abord les valeurs critiques par rapport à la dérivée seconde et on fait l'étude du signe dans chacun des intervalles définis par ces valeurs.

EXEMPLE 6.1.3

Soit les fonctions :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1},\ f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Déterminer les valeurs optimales de la fonction f en appliquant le test de la dérivée seconde.

Solution

Les valeurs critiques par rapport à la dérivée première sont –1 et 1. De plus,

$$f''(-1) = \frac{2(3-1)}{(1+1)^3} > 0 \text{ et } f''(1) = \frac{-2(3-1)}{(1+1)^3} < 0.$$

Puisque $f'(-1) = 0$ et $f''(-1) > 0$, la fonction a un minimum relatif en $x = -1$.

Puisque $f'(1) = 0$ et $f''(1) < 0$, la fonction a un maximum relatif en $x = 1$.

Esquisse graphique de fonctions

Les dérivées première et seconde donnent beaucoup d'information sur les propriétés analytiques d'une fonction qui se visualisent par la forme du graphique de cette fonction. Pour pouvoir utiliser efficacement cette information et l'interpréter correctement, on regroupe les observations dans un tableau de synthèse qui en donne une vue d'ensemble. La procédure à suivre pour dresser le tableau de synthèse et esquisser le graphique d'une fonction est donnée dans l'encadré suivant. Nous compléterons cette procédure à la section suivante pour tenir compte des fonctions ayant un ou des comportements asymptotiques.

PROCÉDURE

Esquisse graphique d'une fonction continue

1. Déterminer le domaine de la fonction et les points de rencontre avec les axes lorsque cela est possible.
2. Déterminer la dérivée première de la fonction et les valeurs critiques relatives à cette dérivée.
3. Déterminer la dérivée seconde de la fonction et les valeurs critiques relatives à cette dérivée.
4. Construire un tableau faisant la synthèse des caractéristiques de la fonction :
   - La première ligne représente le domaine de la fonction et comporte les valeurs critiques de la fonction en ordre croissant (les zéros sont séparés par des colonnes représentant les intervalles de variation).
   - Faire l'étude du signe de la dérivée première, identifier les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que les maxima et minima relatifs.
   - Faire l'étude du signe de la dérivée seconde, identifier les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas et les points d'inflexion.
   - Calculer l'image par la fonction des zéros des dérivées et situer les points ainsi obtenus dans un système d'axes.
5. Esquisser le graphique en tenant compte de l'information contenue dans le tableau.
6. Rédiger la conclusion.

REMARQUE

Dans l'exemple 6.1.2, nous avons effectué quelques-unes de ces étapes. Nous avons trouvé la dérivée première et la dérivée seconde de la fonction définie par:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 5$$

Nous avons également trouvé les valeurs critiques, fait l'étude des signes, identifié les intervalles de croissance et de décroissance, de concavité vers le haut et vers le bas ainsi que le maximum relatif, le minimum relatif et le point d'inflexion. Cette accumulation d'information ne nous permet pas de voir la forme du graphique. Pour utiliser toute l'information, il faut les disposer de façon à avoir une vision globale. C'est le but du tableau de synthèse et du graphique.

EXEMPLE 6.1.4

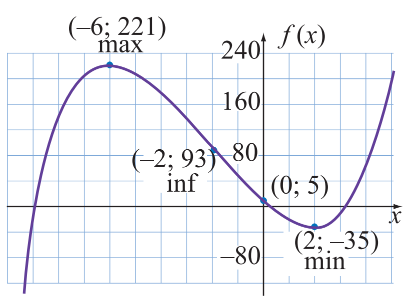
Construire le tableau donnant les caractéristiques graphiques, les valeurs optimales, les points d'inflexion et esquisser le graphique de la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 5.$$

AnalyseGraphique06

REMARQUE
Il est toujours facile de déterminer l'ordonnée à l'origine puisque c'est l'image de 0 par la fonction. Cependant, il n'est pas toujours simple de déterminer les zéros d'une fonction polynomiale, sauf s'il s'agit d'une quadratique ou si la décomposition en facteurs est évidente.

REMARQUE
Sur l'avant-dernière ligne du tableau, les formes incurvées donnent un aperçu du comportement graphique.



■ ***Solution***

Domaine de la fonction

Le domaine d'une fonction polynomiale est l'ensemble des nombres réels. Cette fonction coupe l'axe vertical à $y = 5$, puisque $f(0) = 5$. Dans ce cas, la décomposition en facteurs de la règle de correspondance n'est pas évidente, nous ne déterminerons pas les zéros de la fonction.

Dérivée première

La dérivée première est :

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 36 = 3(x^2 + 4x - 12) = 3(x - 2)(x + 6).$$

Elle s'annule à $x = -6$ et $x = 2$.

Dérivée seconde

La dérivée seconde est :

$$f''(x) = 6x + 12.$$

Elle s'annule $x = -2$. Ces valeurs divisent le domaine de la fonction en quatre intervalles donnés dans le tableau suivant.

Tableau synthèse

x	$-\infty$		-6		-2		2		∞
$f'(x)$	+	+	0	−	−	−	0	+	+
$f''(x)$	−	−	−	−	0	+	+	+	+
$f(x)$		↗	221	↘	93	↘	−35	↗	
			max		inf		min		∞

Dans les lignes pour f' et f'', on indique le signe de la dérivée première et de la dérivée seconde pour identifier les intervalles de croissance, de décroissance, de concavité vers le haut et vers le bas. On peut alors déterminer les extremums de la fonction et ses points d'inflexion. En reportant les données du tableau sur un papier quadrillé, on peut esquisser le graphique ci-contre.

EXEMPLE 6.1.5

Faire le tableau donnant les caractéristiques graphiques, les valeurs optimales, les points d'inflexion et esquisser le graphique de la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x) = x^4 + 2x^3.$$

AnalyseGraphique07

■ ***Solution***

Domaine de la fonction

Le domaine d'une fonction polynomiale est l'ensemble des nombres réels. Cette fonction coupe l'axe verticale à $y = 0$, puisque $f(0) = 0$. On peut aisément décomposer la règle de correspondance en facteurs, on obtient :

$$f(x) = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2).$$

La fonction a deux zéros, à $x = 0$ et $x = -2$.

TIC

```
plot(x^4+2*x^3,x=-3..2,
y=-2..3,color=blue);
```

Dérivée première et valeurs critiques

La dérivée première est :

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x + 3).$$

Elle s'annule à $x = 0$ et $x = -3/2$.

Dérivée seconde et valeurs critiques

La dérivée seconde est :

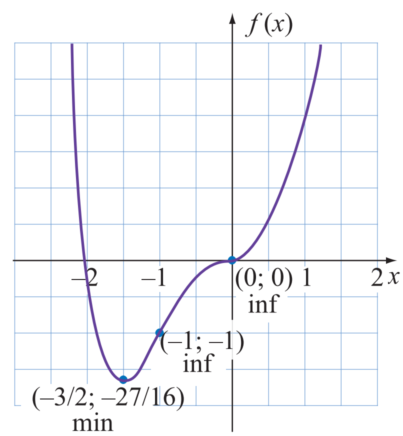
$$f''(x) = 12x^2 + 12x = 12x(x + 1).$$

Elle s'annule à $x = 0$ et $x = -1$.

Tableau synthèse

Les zéros des dérivées première et seconde divisent le domaine de la fonction en quatre intervalles. En faisant l'étude du signe de la dérivée seconde et de la dérivée première dans chacun des intervalles, on identifie les intervalles de croissance et de décroissance, de concavité vers le haut et vers le bas, les extremums relatifs et les points d'inflexion.

x	$-\infty$		$-3/2$		-1		0		∞
$f'(x)$	–	–	0	+	+	+	0	+	+
$f''(x)$	+	+	+	+	0	–	0	+	+
$f(x)$		↘ ∪	–27/16	↗ ∪	–1	↗ ∩	0	↗ ∪	
			min		inf		inf		∞



En reportant les données du tableau dans un système d'axes, on obtient le graphique ci-contre.

EXEMPLE 6.1.6

Faire le tableau donnant les caractéristiques graphiques, les valeurs optimales, les points d'inflexion et esquisser le graphique de la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x) = 4 - \sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

AnalyseGraphique08

Solution

Domaine de la fonction

Puisque la racine cubique est définie pour tout nombre réel, le domaine de la fonction est l'ensemble des nombres réels. L'ordonnée à l'origine est

$$f(0) = 4 - \sqrt[3]{(0-2)^2} = 4 - \sqrt[3]{4} \approx 2{,}41.$$

Les zéros sont donnés par :

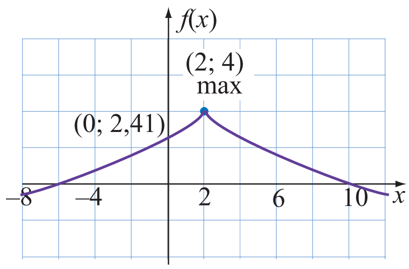
$$4 - \sqrt[3]{(x-2)^2} = 0, \text{ d'où } \sqrt[3]{(x-2)^2} = 4 \text{ et } (x-2)^2 = 64.$$

$$(x - 2) = \pm 8, \text{ d'où } x = 10 \text{ et } x = -6.$$

La fonction a deux zéros, à $x = 10$ et $x = -6$.

REMARQUE

Le but de l'exercice est de faire l'analyse de la fonction, pas seulement d'esquisser le graphique. Le rapport d'analyse doit comporter le tableau de synthèse, le graphique et, dans les applications, l'interprétation selon le contexte.



Dérivée première et valeurs critiques

La dérivée première est :

$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x-2}}.$$

Elle a une seule valeur critique à 2.

Dérivée seconde et valeurs critiques

La dérivée seconde est :

$$f''(x) = \frac{2}{9(x-2)\sqrt[3]{x-2}}.$$

Elle a une seule valeur critique à 2.

Tableau synthèse

Le tableau synthèse comporte deux intervalles,]–∞; 2[et]2; ∞[.

x	$-\infty$		2		∞
$f'(x)$	+	+	∄	–	–
$f''(x)$	+	+	∄	+	+
$f(x)$		↗	4	↘	
			max		

Conclusion

L’étude des signes indique que la fonction a un maximum relatif à (2; 4). C’est un point de rebroussement.

EXEMPLE 6.1.7

Faire le tableau donnant les caractéristiques graphiques, les valeurs optimales, les points d’inflexion et esquisser le graphique de la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 8}.$$

AnalyseGraphique09

Solution

Domaine de la fonction

Puisque la racine cubique est définie pour tout nombre réel, le domaine de la fonction est l’ensemble des nombres réels. L’ordonnée à l’origine est

$$f(0) = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

En factorisant l’expression sous le radical, on obtient :

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)(x+4)}.$$

La fonction a deux zéros, à $x = 2$ et $x = -4$.

Dérivée première et valeurs critiques

La dérivée première est :

$$f'(x)=\frac{2(x+1)}{3\sqrt[3]{(x-2)^2(x+4)^2}}.$$

Elle s'annule à $x = -1$ et elle n'est pas définie pour $x = 2$ et $x = -4$.

Dérivée seconde et valeurs critiques

La dérivée seconde est :

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+2x+28)}{9(x-2)(x+4)\sqrt[3]{(x-2)^2(x+4)^2}}.$$

Elle ne s'annule pas et elle n'est pas définie pour $x = 2$ et $x = -4$.

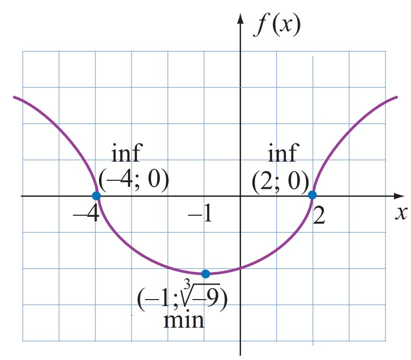


Tableau synthèse

x	$-\infty$		-4		-1		2		∞
$f'(x)$		$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	
$f''(x)$		$-$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	$\sqrt[3]{-9}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
			inf		min		inf		

Conclusion

L'étude des signes indique que la fonction a un minimum relatif à $(-1;\sqrt[3]{-9})$. C'est un point stationnaire. Elle a également des points d'inflexion en (–4; 0) et (2; 0).

6.2 Exercices

1. On donne une fonction f et sa dérivée f'. Déterminer les valeurs critiques de la fonction par rapport à la dérivée première. Pour chacune de ces valeurs, déterminer le point critique correspondant si défini et indiquer la nature de ce point critique.

a) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 24x + 2$
$f'(x) = 3x^2 + 14x - 24$

b) $f(x) = x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2$
$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 4x$

c) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+2}$, $f'(x) = \dfrac{3(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$, $f'(x) = \dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$

e) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{3x-8}$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$, $f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, $f'(x) = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$

i) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$

2. Après avoir complété le tableau , esquisser le graphique de la fonction.

a)

x	$-\infty$		-1		∞
$f'(x)$	+	+	∄	+	+
$f''(x)$	+	+	∄	–	–
$f(x)$			2		

b)

x	$-\infty$		-1		∞
$f'(x)$	+	+	0	+	+
$f''(x)$	–	–	0	+	+
$f(x)$			2		

c)

x	$-\infty$		-3		0		1		∞
$f'(x)$	–	–	0	–	–	–	0	+	+
$f''(x)$	+	+	0	–	0	+	+	+	+
$f(x)$			2		–1		–3		

d)

x	$-\infty$		-4		-1		3		∞
$f'(x)$	–	–	0	+	+	+	0	–	–
$f''(x)$	+	+	+	+	0	–	–	–	–
$f(x)$			–3		1		4		

e)

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
$f'(x)$	–	–	∄	+	0	–	∄	+	+
$f''(x)$	–	–	∄	–	–	–	∄	–	–
$f(x)$			1		4		1		

f)

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
$f'(x)$	–	–	∄	–	0	+	∄	+	+
$f''(x)$	–	–	∄	+	+	+	∄	–	–
$f(x)$			1		–4		1		

g)

x	$-\infty$		-3		0		2		4		∞
$f'(x)$	–	–	∄	+	0	–	∄	–	0	+	+
$f''(x)$	–	–	∄	–	–	–	∄	+	+	+	+
$f(x)$			–2		4		0		–4		

3. Soit la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x) = x^3 - 4x^2.$$

a) Déterminer sa dérivée première.
b) Déterminer sa dérivée seconde.
c) Déterminer les zéros de la dérivée première.
d) Déterminer les zéros de la dérivée seconde.
e) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.
f) Déterminer le(s) maximum et minimum relatif(s) de la fonction.

g) Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas.
h) Déterminer le(s) point(s) d'inflexion.
i) Construire le tableau de synthèse et esquisser le graphique de la fonction et de sa dérivée.

4. Soit la fonction définie par la règle de correspondance

$$f(x) = x^4 - 3x^2.$$

a) Déterminer sa dérivée première.
b) Déterminer sa dérivée seconde.
c) Déterminer les zéros de la dérivée première.
d) Déterminer les zéros de la dérivée seconde.
e) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.
f) Déterminer le(s) maximum et minimum relatifs de la fonction.
g) Trouver les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas.
h) Déterminer le(s) point(s) d'inflexion.
i) Construire le tableau de synthèse et esquisser le graphique de la fonction et de sa dérivée.
j) Déterminer la pente de la tangente aux points d'abscisses –1, 0, 1 et 2.

5. Soit la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x) = x^4 - 8x^2.$$

a) Déterminer sa dérivée première.
b) Déterminer sa dérivée seconde.
c) Déterminer les zéros de la dérivée première.
d) Déterminer les zéros de la dérivée seconde.
e) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.
f) Déterminer le(s) maximum et minimum relatifs de la fonction.
g) Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas.
h) Déterminer le(s) point(s) d'inflexion.
i) Construire le tableau de synthèse et esquisser le graphique de la fonction et de sa dérivée.

Dans les numéros suivants, on donne la fonction et ses dérivées première et seconde. Faire le tableau donnant les caractéristiques analytiques, les valeurs optimales, les points d'inflexion et esquisser le graphique de la fonction.

6. $f(x) = x^3 + 8x^2 - 35x + 4$, $f'(x) = 3x^2 + 16x - 35$, $f''(x) = 6x + 16$

7. $f(x) = x^4 - 8x^2$, $f'(x) = 4x^3 - 16x$, $f''(x) = 12x^2 - 16$

8. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9}$, $f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-9)^2}}$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 54}{9(x^2-9)\sqrt[3]{(x^2-9)^2}}$$

9. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-9)^2}$, $f'(x) = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-9}}$

$$f''(x) = \frac{4x^2 - 108}{9(x^2-9)\sqrt[3]{x^2-9}}$$

Dans les numéros suivants, faire le tableau donnant les caractéristiques analytiques, les valeurs optimales, les points d'inflexion et esquisser le graphique des fonctions dont la règle de correspondance est donnée.

10. $f(x) = x^2 + x - 3$

11. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

12. $f(x) = x^4 - 9x^2$

13. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 15x + 1$

14. $f(x) = (x - 2)(x + 2)^3$

15. $f(x) = x^4 + 3x^3$

16. $f(x) = 5x - 2$

17. $f(x) = -3x + 1$

18. $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1$

19. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 4$

20. $f(x) = \sin x$ sur $[-\pi; 3\pi]$

21. $f(x) = \cos x$ sur $[-\pi; 3\pi]$

22. $f(x) = \sin^2 x$ sur $[-\pi; 3\pi]$

23. $f(x) = \cos^2 x$ sur $[-\pi; 3\pi]$

6.3 Asymptotes

Les asymptotes fournissent des indications précieuses pour tracer le graphique d'une fonction. Nous verrons comment les trouver à l'aide des limites. Nous avons déjà rencontré la notion de limite en définissant la notion de taux de variation ponctuel et la fonction dérivée, mais nous verrons comment on peut l'utiliser dans la détection des asymptotes d'une fonction.

Introduction

LimitesInfini01

Considérons la fonction $f(x) = 1/x$. On sait que cette fonction n'est pas définie à 0 car la division par 0 est impossible. Analysons le comportement de la fonction au voisinage de 0 à l'aide d'une table de correspondance. On constate que lorsque x tend vers 0 par la gauche, les images tendent vers $-\infty$. De plus, lorsque x tend vers 0 par la droite, les images tendent vers ∞. On peut décrire ces comportements de la façon suivante :

$$\lim_{x \to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = \infty.$$

ANALYSE DE LA VARIATION Voisinage de 0			
]–1; 0[		]0; 1[	
x	$y = 1/x$	x	$y = 1/x$
–1	–1	1	1
–0,5	–2	0,5	2
–0,1	–10	0,1	10
–0,01	–100	0,01	100
–0,001	–1000	0,001	1000
$x \to 0^-$	$y \to -\infty$	$x \to 0^+$	$y \to \infty$

ANALYSE DE LA VARIATION à moins l'infini et à plus l'infini			
]–∞; –1[		]1; ∞[	
x	$y = 1/x$	x	$y = 1/x$
–1	–1	1	1
–2	–0,5	2	0,5
–10	–0,1	10	0,1
–100	–0,01	100	0,01
–1000	–0,001	1000	0,001
$x \to -\infty$	$y \to 0^-$	$x \to \infty$	$y \to 0^+$

Le deuxième tableau ci-contre nous permet de déterminer le comportement de la fonction à $-\infty$ et à ∞. On constate que si x tend vers $-\infty$, les images deviennent de plus en plus proches de 0 tout en étant plus petites que 0.

Lorsque x tend vers ∞, les images deviennent de plus en plus proches de 0 tout en étant plus grandes que 0. On peut décrire ces comportements de la façon suivante :

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0^- \text{ et } \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0^+.$$

Étudions maintenant le signe des dérivées première et seconde. La dérivée première est :

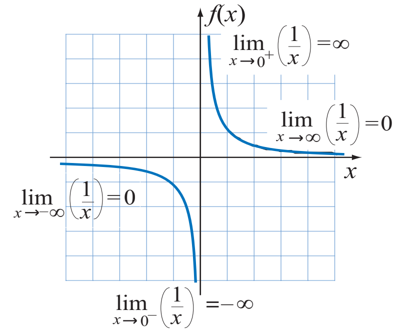
$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

Elle ne s'annule pas et est toujours négative quelle que soit la valeur de x. La fonction est donc toujours décroissante. La dérivée seconde est :

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Elle ne s'annule pas et est négative lorsque $x < 0$ et positive lorsque $x > 0$. On peut conclure que la fonction est concave vers le bas dans l'intervalle]–∞; 0[et concave vers le haut dans l'intervalle]0; ∞[.

Le graphique de la fonction s'approche de plus en plus de la droite $y = 0$ lorsqu'on le parcourt en s'approchant de l'infini et en s'approchant de moins l'infini. De plus, lorsqu'on s'approche de 0 par la gauche ou par la droite, le graphique se rapproche de plus en plus de la droite $x = 0$. Ces droites sont appelées les **asymptotes** de la fonction.



On remarque que les **limites à l'infini** (lorsque x tend vers l'infini ou moins l'infini) correspondent à l'asymptote horizontale de la fonction. Ces deux limites nous serviront dans les exemples qui suivent pour évaluer la limite à l'infini de différentes fonctions.

Les **limites infinies**, quant à elles, sont représentées graphiquement par les asymptotes verticales. Dans le cas de la fonction $f(x) = 1/x$, l'asymptote verticale a comme équation $x = 0$, car le dénominateur de la fonction s'annule à $x = 0$.

REMARQUE

Dans un quotient, lorsque le dénominateur tend vers 0 et que le numérateur est différent de 0, le quotient tend vers $\pm\infty$, selon le signe du numérateur et du dénominateur.

Lorsqu'un tel quotient fait partie de la règle de correspondance d'une fonction, le graphique de celle-ci a une asymptote verticale.

Asymptote verticale

Le graphique d'une fonction f a une **asymptote verticale** à $x = a$ si au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$
$$\text{ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty.$$

Asymptote horizontale

Le graphique d'une fonction f a une **asymptote horizontale** à $y = b$ si au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x\to \infty} f(x) = b.$$

REMARQUE

Pour déterminer si une fonction a une asymptote horizontale, il faut évaluer sa limite à moins l'infini et sa limite à l'infini. Si l'une de ces limites est un nombre réel b, alors le graphique de la fonction a une asymptote horizontale à $y = b$. Si les deux limites sont infinies, le graphique de la fonction n'a pas d'asymptote horizontale.

PROCÉDURE

Asymptotes verticales d'une fonction rationnelle

1. Déterminer les valeurs de la variable indépendante qui annulent le dénominateur.
2. Parmi celles-ci, retenir celles qui annulent seulement le dénominateur.
3. Faire l'étude du comportement de la fonction à gauche et à droite des valeurs retenues.

Évaluation de la limite à l'infini

On peut évaluer les limites à l'infini des fonctions algébriques en tirant profit du comportement asymptotique de la fonction $f(x) = 1/x$. Il suffit de transformer l'expression dont on veut évaluer la limite en mettant en évidence les puissances de x au numérateur et au dénominateur; on fait ainsi apparaître des termes de la forme $1/x$ qui tendent vers 0 lorsque x tend vers l'infini ou moins l'infini.

EXEMPLE 6.3.1

LimitesInfini02

Évaluer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)$.

Solution

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}\right)\text{, par mise en évidence;}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\left(2+\frac{1}{x}\right)}\right)\text{, en simplifiant;}$$

$$=\frac{3-0}{2+0}=\frac{3}{2}\text{, car }\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

On trouve donc : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)=\dfrac{3}{2}$.

REMARQUE
On met toujours en évidence la plus grande puissance de la variable indépendante dans le numérateur et la plus grande puissance de la variable indépendante dans le dénominateur. Après ces mises en évidence, on simplifie. Le facteur mis en évidence n'est pas nécessairement le même au numérateur et au dénominateur.

EXEMPLE 6.3.2

LimitesInfini03

Évaluer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{2x^2+1}\right)$.

Solution

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{2x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(5-\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\text{, par mise en évidence;}$$

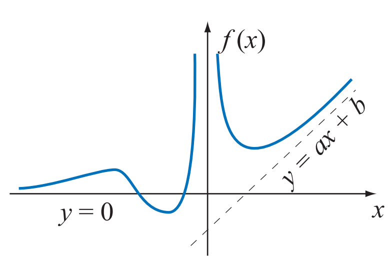
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{2x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\times\frac{\left(5-\frac{3}{x}\right)}{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\text{, en simplifiant;}$$

$$=0\times\frac{5-0}{2+0}=0\text{ car }\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

On trouve donc : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{2x^2+1}\right)=0$.

REMARQUE
Dans l'exemple 6.3.2, le plus grand exposant de la variable n'est pas le même au numérateur et au dénominateur. En simplifiant, il reste alors un facteur $1/x$ qui s'annule lorsque x tend vers ∞.

LimitesInfini04

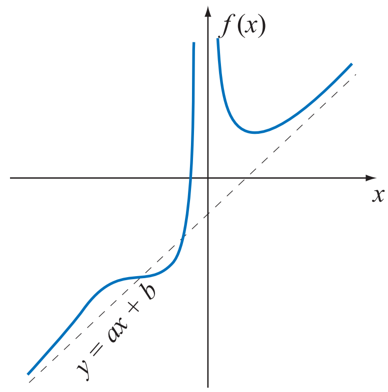


Une fonction f est asymptotique à une droite lorsqu'une partie de son graphique se rapproche de plus en plus de cette droite. L'asymptote peut être horizontale, verticale ou oblique. Lorsqu'elle est oblique, la limite à l'infini (ou moins l'infini) de la fonction est $\pm\infty$. Cependant, la distance entre la courbe de la fonction et l'asymptote tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Cela signifie que si l'équation de l'asymptote oblique d'une fonction f est $y = ax + b$, on doit avoir :

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

ou

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0.$$



Asymptote oblique

Le graphique d'une fonction f a une **asymptote oblique** à $y = ax + b$ si au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]=0 \text{ ou } \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-y\right]=0.$$

EXEMPLE 6.3.3

Dans les cas suivants, analyser la fonction, faire une hypothèse sur son comportement asymptotique et confirmer cette hypothèse par l'évaluation d'une limite.

LimitesInfini05

a) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2+5}$

b) $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{2x^2+7}$

c) $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-7}{x+4}$

d) $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+5}{x+3}$

Solution

a) C'est une fonction rationnelle dont le degré du dénominateur est plus élevé que celui du numérateur, on doit s'attendre à une asymptote horizontale à $y = 0$. Cela est confirmé en évaluant la limite à l'infini.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{x^2+5}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2}\frac{(3-2/x)}{(1+5/x^2)}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{(3-2/x)}{(1+5/x^2)}\right)=0\times\left(\frac{3-0}{1+0}\right).$$

Puisque la limite à l'infini est 0, la fonction a une asymptote horizontale à $y = 0$.

b) C'est une fonction rationnelle dont le degré du dénominateur est égal à celui du numérateur, on doit s'attendre à une asymptote horizontale à $y = 3/2$. Cela est confirmé en évaluant la limite à l'infini. On obtient

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{2x^2+7}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\frac{(3-1/x^2)}{(2+7/x^2)}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3-1/x^2)}{(2+7/x^2)}\right)=\left(\frac{3-0}{2+0}\right)=\frac{3}{2}.$$

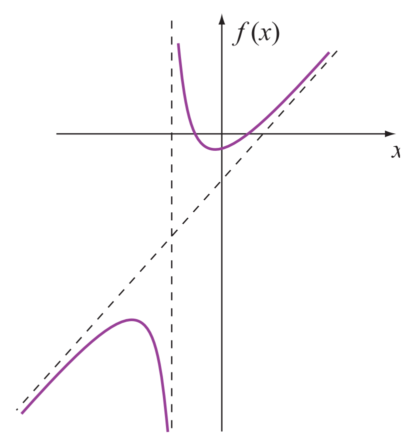
La fonction a donc une asymptote horizontale à $y = 3/2$.

c) C'est une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est plus élevé d'une unité que celui du dénominateur, on doit s'attendre à une asymptote oblique à $y = ax + b$. On détermine cette asymptote par division des polynômes. Cela donne :

$$f(x)=\frac{2x^2+5x-7}{x+4}=2x-3+\frac{5}{x+4}.$$

TIC

```
> with(plots):with(plottools):
> f:=x->(2*x^2+5*x-7)/(x+4);
> g:=x->2*x-3;
> courbes:=plot({f(x),g(x)}
,x=-10..5,    y=-40..20,discont=true):
> av:=line([-4,-40],[-
4,20],linestyle=3):
> display({courbes,av});
```



Sous cette forme, on constate facilement que lorsque x tend vers l'infini, le terme $5/(x + 4)$ tend vers 0 et les images par la fonction devraient se rapprocher de plus en plus de la droite $y = 2x - 3$. Notre hypothèse est que la courbe de la fonction a une asymptote oblique dont l'équation est $y = 2x - 3$. On peut le confirmer en évaluant la limite suivante :

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-y\right], \text{ où } y = 2x - 3.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to\infty}\left[2x-3+\frac{5}{x+4}-(2x-3)\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5}{x+4}\right]=0.$$

Cela signifie que lorsque x tend vers l'infini, la distance entre la courbe de la fonction $f(x)$ et la droite $y = 2x - 3$ tend vers 0. La courbe de la fonction s'approche donc de plus en plus de la droite. En procédant de la même façon, on peut montrer que la courbe de la fonction est également asymptotique à $y = 2x - 3$ lorsque x tend vers moins l'infini. De plus, puisque dans l'expression :

$$f(x)=2x-3+\frac{5}{x+4},$$

les deux termes sont additionnés, lorsque x est plus grand que 0, la courbe est au-dessus de l'asymptote et lorsque x est négatif, la courbe est au-dessous de l'asymptote.

d) C'est une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est plus élevé de deux unités que celui du dénominateur, la fonction n'a pas d'asymptote oblique. On peut cependant effectuer la division des polynômes. Cela donne :

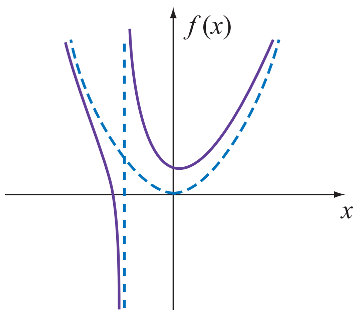
$$\frac{x^3+3x^2+5}{x+3}=x^2+\frac{5}{x+3}.$$

Sous cette forme, on constate facilement que lorsque x tend vers l'infini, le terme $5/(x + 3)$ tend vers 0 et les images par la fonction devraient se rapprocher de plus en plus de la parabole $y = x^2$. La limite suivante confirme cette hypothèse :

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x^2+\frac{5}{x+3}-x^2\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5}{x+3}\right]=0.$$

TIC

```
> f:=x->(x^3+3*x^2+5)/(x+3);
> g:=x->x^2;
> plot({f(x),g(x)},x=-5..5,
  y=-10..10,discont=true);
```



REMARQUE
La fonction en *d* de l'exemple 6.3.3 est asymptotique à la parabole d'équation $y = x^2$.

REMARQUE
Une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est plus élevé d'une unité que celui du dénominateur a une asymptote oblique. On peut déterminer celle-ci par division des polynômes.

Esquisse de fonctions asymptotiques

À la section précédente, nous avons présenté une procédure pour esquisser le graphique d'une fonction. Nous pouvons inclure dans cette procédure la recherche des comportements asymptotiques pour pouvoir représenter graphiquement des fonctions ayant un ou des comportements asymptotiques. Cela nous amène à modifier la procédure pour esquisser le graphique d'une fonction afin d'intégrer la recherche des asymptotes.

PROCÉDURE

Esquisse du graphique d'une fonction ayant des asymptotes

1. Déterminer le domaine et les points de rencontre avec les axes.
2. Déterminer les asymptotes verticales de la fonction.
3. Évaluer la limite ou les limites à l'infini de la fonction.
4. Déterminer la dérivée première de la fonction et trouver ses valeurs critiques.
5. Déterminer la dérivée seconde de la fonction et trouver ses valeurs critiques.
6. Faire un tableau synthèse des caractéristiques de la fonction :
   - La première ligne représente le domaine de la fonction et comporte les valeurs critiques de la fonction en ordre croissant (les valeurs critiques sont séparées par des colonnes représentant les intervalles de variation).
   - Faire l'étude du signe de la dérivée première, identifier les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que les maxima et minima relatifs.
   - Faire l'étude du signe de la dérivée seconde, identifier les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas et les points d'inflexion.
   - Calculer l'image par la fonction des valeurs critiques des dérivées et situer les points ainsi obtenus dans un système d'axes.
7. Esquisser le graphique en tenant compte de l'information contenue dans le tableau.

REMARQUE
Lorsqu'une fonction a une asymptote horizontale, celle-ci est donnée par une limite à l'infini. Les asymptotes verticales d'une fonction rationnelle sont données par les valeurs de la variable indépendante qui annulent le dénominateur sans annuler le numérateur. La fonction définie par $f(x)$ = ln x a une asymptote verticale à x = 0, même si elle n'a pas de dénominateur.

EXEMPLE 6.3.4

Faire le tableau donnant les caractéristiques graphiques, les valeurs optimales, les points d'inflexion, les asymptotes et esquisser le graphique de la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x)=\frac{2x-3}{x-2}.$$

GraphAsymptote01

Solution

Domaine de la fonction

Le domaine de la fonction est $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Les intersections avec les axes sont (0; 3/2) et (3/2; 0).

Asymptote verticale

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{2x-3}{x-2}\right)=\infty \text{ et } \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{2x-3}{x-2}\right)=-\infty.$$

La fonction a donc une asymptote verticale à x = 2.

x	$-\infty$		2		∞
$f'(x)$	–	–	$\nexists$	–	–
$f''(x)$	–	–	$\nexists$	+	+
$f(x)$	3	↘	$\nexists$	↘	3

Évaluation du comportement à l'infini

En divisant les polynômes, on obtient

$$f(x)=\frac{2x-3}{x-2}=2+\frac{1}{x-2}.$$

En évaluant la limite à l'infini sous cette forme, on obtient :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-3}{x-2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2+\frac{1}{x-2}\right)=2.$$

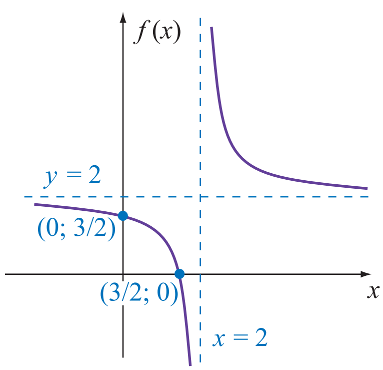
Dérivée première

$$f'(x)=\frac{2\times(x-2)-(2x-3)\times 1}{(x-2)^2}=\frac{-1}{(x-2)^2}.$$

Elle ne s'annule pas, son numérateur est toujours différent de 0.

Dérivée seconde

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(-1(x-2)^{-2}\right)$$
$$=-1\times-2(x-2)^{-3}\times 1=\frac{2}{(x-2)^3}.$$



Elle ne s'annule pas, son numérateur est toujours différent de 0.

Tableau synthèse

On peut maintenant construire un tableau des caractéristiques de la fonction pour en faire la synthèse et esquisser le graphique.

x	$-\infty$		2		∞
$f'(x)$	–	–	∄	–	–
$f''(x)$	–	–	∄	+	+
$f(x)$		↘	∄	↘	
	a.h $y=2$		a.v $x=2$		a.h $y=2$

EXEMPLE 6.3.5

GraphAsymptote02

Faire le tableau donnant les caractéristiques graphiques, les valeurs optimales, les points d'inflexion, les asymptotes et esquisser le graphique de la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x}.$$

Solution

Domaine de la fonction

Le domaine de la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x}=x-\frac{1}{x}$$

est $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Les zéros de cette fonction sont $x=-1$ et $x=1$.

Asymptote verticale

La fonction a une asymptote verticale à $x=0$ puisque seul son dénominateur s'annule à $x=0$.

Évaluation du comportement à l'infini

La fonction a une asymptote oblique à $y = x$, en effet :

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \infty.$$

De plus, $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-y\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-(x)\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Par conséquent les images s'approchent de l'infini lorsque x tend vers l'infini et la différence entre les images et les points de la droite d'équation $y = x$ tend vers 0. On peut conclure que la courbe s'approche de plus en plus de cette droite. La droite $y = x$ est donc une asymptote oblique de la fonction.

Dérivée première

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}.$$

Elle ne s'annule pas car son numérateur est toujours plus grand que 0. Elle est toujours positive.

Dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{-2}{x^3}.$$

Elle ne s'annule pas, il n'y a donc pas de point d'inflexion. Cependant, la dérivée est positive lorsque $x < 0$ et elle est négative lorsque $x > 0$. Sa concavité n'est pas la même de part et d'autre de l'asymptote verticale.

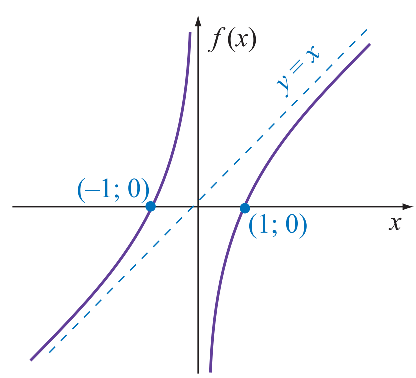


Tableau de synthèse

Le tableau faisant la synthèse des caractéristiques de la fonction est :

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$	+	+	∄	+	+
$f''(x)$	+	+	∄	−	−
$f(x)$		↗	∄	↗	
	a.o $y = x$		a.v $x = 0$		a.o $y = x$

La fonction n'a pas de maximum ni de minimum relatif.

EXEMPLE 6.3.6

Faire le tableau donnant les caractéristiques graphiques, les valeurs optimales, les points d'inflexion, les asymptotes et esquisser le graphique de la fonction définie par la règle de correspondance :

GraphAsymptote03

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

■ *Solution*

Domaine de la fonction

Le domaine de la fonction est $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ puisque la division par 0 n'est pas définie. Il n'y a pas d'intersection avec les axes.

Asymptote verticale

La fonction a une asymptote verticale à $x = 0$.

Évaluation du comportement à l'infini

Lorsque x tend vers l'infini, le terme $1/x^2$ tend vers 0 et le terme x^2 tend vers l'infini. La courbe ne se rapproche cependant pas d'une droite mais de la quadratique $y = x^2$. La fonction n'a pas d'asymptote horizontale ni d'asymptote oblique.

Dérivée première

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + x^{-2}.$$

On peut dériver par la règle de dérivation des puissances,

$$f'(x) = 2x - 2x^{-3} = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^4 - 2}{x^3}.$$

En posant $2x^4 - 2 = 0$, on trouve $x^4 = 1$. Les zéros de la fonction dérivée sont $x = -1$ et $x = 1$.

Dérivée seconde

En appliquant à nouveau la règle de dérivation des puissances,

$$f''(x) = 2 + 6x^{-4} = 2 + \frac{6}{x^4} = \frac{2x^4 + 6}{x^4}.$$

Elle ne s'annule pas et elle est toujours positive. Il n'y a donc pas de point d'inflexion.

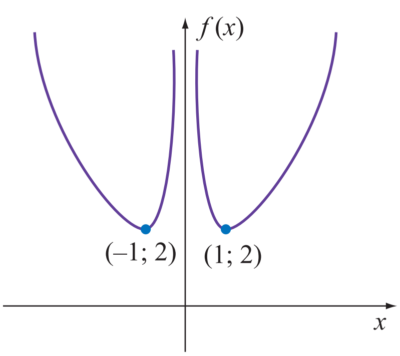


Tableau de synthèse

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	2	↗	$\nexists$	↘	2	↗	
	∞		min		a.v $x = 0$		min		∞

EXEMPLE 6.3.7

GraphAsymptote04

Faire le tableau donnant les caractéristiques graphiques, les valeurs optimales, les points d'inflexion, les asymptotes et esquisser le graphique de la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}.$$

Solution

Domaine de la fonction

Puisque la division par 0 n'est pas définie, le domaine de *f*(*x*) est $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Le graphique coupe l'axe verticale à (0; –3/2), il n'y a pas de zéro.

Asymptote verticale

La fonction a une asymptote verticale à $x = 2$ puisque seul son dénominateur s'annule à $x = 2$.

Évaluation du comportement à l'infini

Par division des polynômes, $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}=x-1+\dfrac{1}{x-2}$.

Sous cette forme, on constate que lorsque x tend vers l'infini, le rapport $1/(x-2)$ tend vers 0 et la fonction s'approche de la droite $y = x - 1$. La fonction a donc une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$.

Dérivée première

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-3)(x-2)-(x^2-3x+3)\times 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2-7x+6-x^2+3x-3}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

La dérivée première est donc $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

Elle s'annule à $x = 1$ et $x = 3$.

Dérivée seconde

Pour une application plus simple de la règle de dérivation du quotient, effectuons le produit des facteurs au numérateur de la dérivée première.

$$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}.$$

En dérivant, on obtient :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x+3)2(x-2)\times 1}{(x-2)^4} \\ &= \frac{2(x-2)[(x^2-4x+4)-(x^2-4x+3)]}{(x-2)^4} \\ &= \frac{2(x-2)[x^2-4x+4-x^2+4x-3]}{(x-2)^4}=\frac{2}{(x-2)^3}. \end{aligned}$$

La dérivée seconde est donc $f''(x)=\dfrac{2}{(x-2)^3}$.

Elle ne s'annule pas. Il n'y a pas de point d'inflexion.

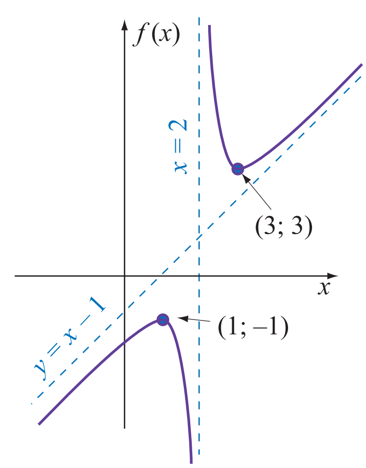


Tableau de synthèse

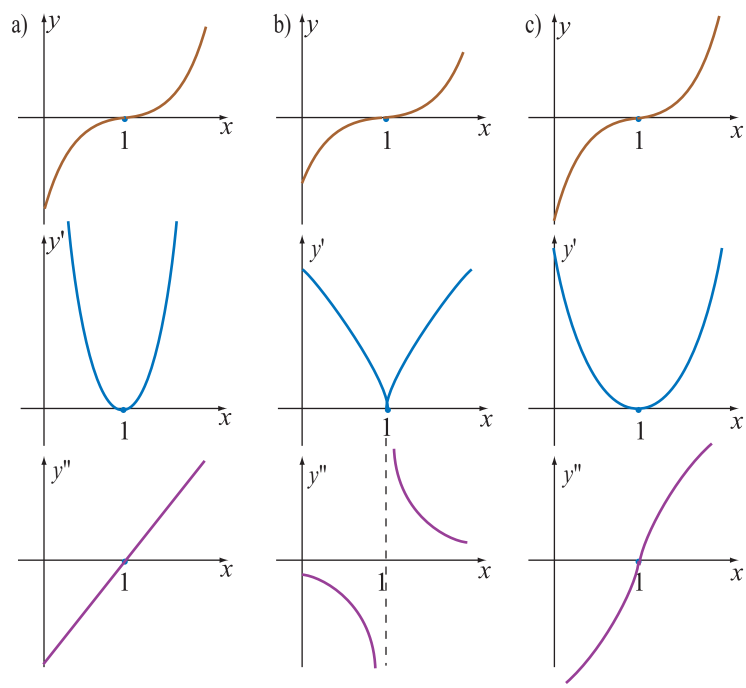
x	$-\infty$		1		2		3		∞
$f'(x)$	+	+	0	–	∄	–	0	+	+
$f''(x)$	–	–	–	–	∄	+	+	+	+
$f(x)$		↗	–1	↘	∄	↘	3	↗	
	a.o $y = x - 1$		max		a.v $x = 2$		min		a.o $y = x - 1$

EXEMPLE 6.3.8

Soit les fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^{5/3}, g(x) = (x-1)^3 \text{ et } h(x) = \frac{5}{13}(x-1)^{13/5}.$$

Les graphiques de ces fonctions et de leurs dérivées première et seconde sont donnés ci-dessous, associer chaque fonction à son graphique.



Solution

En déterminant les dérivées première et seconde dans chaque cas, on obtient :

$$f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^{5/3}, \quad f'(x) = \frac{5}{2}(x-1)^{2/3}, \quad f''(x) = \frac{5}{3}(x-1)^{-1/3}.$$

$$g(x) = (x-1)^3, \quad g'(x) = 3(x-1)^2, \quad g''(x) = 6(x-1).$$

$$h(x) = \frac{5}{13}(x-1)^{13/5}, \quad h'(x) = (x-1)^{8/5}, \quad h''(x) = \frac{8}{5}(x-1)^{3/5}.$$

On constate que la dérivée première de la fonction g est une fonction quadratique et sa dérivée seconde est une fonction affine. On peut donc associer la fonction g aux graphiques a.

On constate que la dérivée première de la fonction f a un point de rebroussement à $x = 1$ puisque le facteur $((x-1)^2)^{1/3}$ s'annule à $x = 1$ et est positif à gauche et à droite. De plus, sa dérivée seconde a une discontinuité infinie à $x = 1$ puisqu'on a alors division par 0. On peut donc associer la fonction f aux graphiques b.

La dérivée première de la fonction h est positive à gauche et à droite de $x = 1$ à cause du facteur $((x-1)^8)^{1/5}$ qui ne change pas de signe à $x = 1$. Cependant, la dérivée seconde est négative à gauche et positive à droite car le facteur $((x-1)^{3/5}$ change de signe à $x = 1$. On peut donc associer la fonction h aux graphiques c.

CARACTÉRISTIQUES

Fonction rationnelle (rappel)

Soit f, une fonction rationnelle.

- Si le dénominateur de la fonction ne s'annule jamais, la fonction n'a pas d'asymptote verticale.
- Si le dénominateur s'annule à $x = a$ et que le numérateur est non nul lorsque $x = a$, la fonction a une asymptote verticale d'équation $x = a$.
- Si le dénominateur et le numérateur s'annulent lorsque $x = a$, la fonction peut avoir un trou ou une asymptote verticale à $x = a$.
- Si le numérateur s'annule et que le dénominateur est non nul lorsque $x = a$, la fonction a un zéro à $x = a$.
- Si le degré du numérateur est plus petit que celui du dénominateur, la fonction a une asymptote horizontale à $y = 0$.
- Si le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur, la fonction a une asymptote horizontale à $y = b$, où b est le rapport des coefficients dominants du numérateur et du dénominateur.
- Si le degré du numérateur est plus élevé d'une unité que celui du dénominateur, on a une asymptote oblique que l'on détermine par division des polynômes.

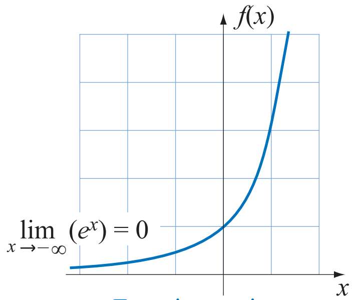
Fonction exponentielle de base *e*

Dans l'introduction de cette section, nous avons présenté deux limites particulières que nous avons utilisées pour évaluer la limite à l'infini de fonctions rationnelles. Ces limites sont :

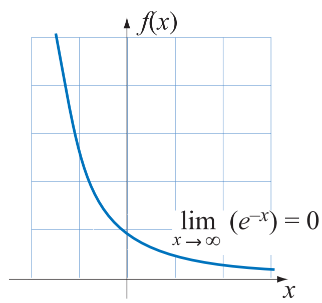
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0^- \text{ et } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0^+.$$

Pour évaluer la limite à l'infini d'une fonction dont la règle de correspondance comporte une expression exponentielle, nous avons également recours à des limites particulières qui décrivent le comportement des fonctions exponentielles de base e. En effet, les fonctions exponentielles :

$$f(x) = e^x \text{ et } f(x) = e^{-x}.$$



Fonction croissante
$f(x) = e^x$



Fonction décroissante
$f(x) = e^{-x}$

ont un comportement asymptotique. Elles ont une asymptote horizontale mais d'un seul côté, soit à gauche soit à droite selon que la fonction est croissante ou décroissante.

La fonction définie par $f(x) = e^x$ est asymptotique à la partie gauche de l'axe horizontal, ce qui s'écrit :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

La fonction définie par $f(x) = e^{-x}$ est asymptotique à la partie droite de l'axe horizontal, ce qui s'écrit :

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0.$$

On doit tenir compte de ces limites particulières lorsqu'on doit évaluer la limite à l'infini ou à moins l'infini d'une fonction dont la règle de correspondance comporte des expressions exponentielles.

Valeur stable

Lorsqu'un phénomène est descriptible en fonction du temps par un modèle mathématique comportant une asymptote horizontale, l'asymptote horizontale est appelée la **valeur stable** du phénomène.

REMARQUE

Dans l'exemple 6.3.9, la demande se stabilise, peu importe le montant additionnel consacré à la publicité. Celle-ci ne peut créer de nouveaux clients potentiels mais simplement convaincre un client d'utiliser un produit plutôt que ses concurrents.

EXEMPLE 6.3.9

Le modèle suivant décrit la relation entre une vitesse v en m/s et le temps t en secondes.

$$v(t) = 32 - 24e^{-t} \text{ m/s}.$$

Déterminer la valeur stable du modèle et représenter graphiquement ce modèle pour $t > 0$.

■ *Solution*

La valeur stable est la limite à l'infini, soit :

$$\lim_{t\to\infty}[32 - 24e^{-t}] = 32 - 24 \times 0 = 32.$$

On a une valeur stable de 32 m/s. L'ordonnée à l'origine est 8 m/s.

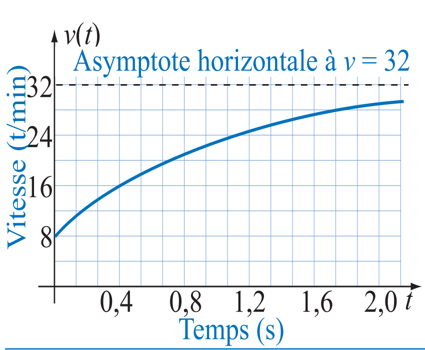
La dérivée de la fonction est :

$$v'(t) = \frac{d}{dt}\left(32 - 24e^{-t}\right) = 0 - 24\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\right) = 24e^{-t}.$$

Cette dérivée ne s'annule jamais. La fonction est toujours croissante, car la dérivée est toujours positive. En dérivant $v'(t)$, on obtient la dérivée seconde du modèle, soit :

$$v''(t) = \frac{d}{dt}\left(24e^{-t}\right) = 24\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\right) = -24e^{-t}.$$

Elle ne s'annule jamais. La fonction est toujours concave vers le bas car la dérivée seconde est toujours négative.



EXEMPLE 6.3.10

Construire le tableau donnant les valeurs optimales, les points d'inflexion, les asymptotes et esquisser le graphique de la fonction

$$f(x) = x\,e^{-x}.$$

GraphAsymptote05

Solution

La fonction $f(x) = x\,e^{-x}$ coupe les axes en (0; 0). Lorsque x tend vers l'infini, on a une expression de la forme $\infty\times 0$ et lorsque x tend vers moins l'infini, on a une expression de la forme $-\infty\times\infty$. Pour tenter de détecter le comportement de la fonction, on doit effectuer quelques calculs comme dans le tableau ci-contre. Ceux-ci suggèrent que :

x	$f(x)$	x	$f(x)$
–1	–2,7	1	0,3678794
–2	–14,8	2	0,2706706
–4	–218,4	4	0,0732626
–8	–23847,7	8	0,0026837
–16	–142177768,3	16	0,0000018
–32	$-2{,}5\times10^{15}$	32	$4{,}052\times10^{-13}$

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty.$$

Son domaine est . En dérivant la fonction, on obtient :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\right) = 1\times e^{-x} + x\times(e^{-x}\times -1) = e^{-x}(1-x).$$

Elle s'annule à $x = 1$. La dérivée seconde est :

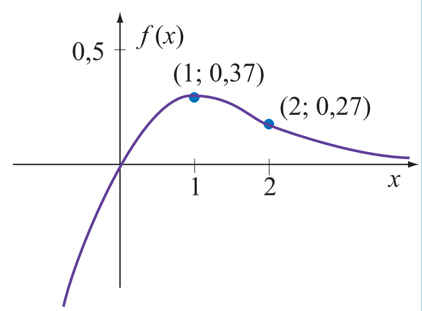
$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^{-x}(1-x)) = (e^{-x}\times -1)(1-x) + e^{-x}\times -1$$
$$= e^{-x}(-1+x-1) = e^{-x}(x-2).$$

Elle s'annule à $x = 2$. Le tableau est alors :

x	$-\infty$		1		2		∞
$f'(x)$	+	+	0	–	–	–	–
$f''(x)$	–	–	–	–	0	+	+
$f(x)$		↗	0,37	↘	0,27	↘	
	$-\infty$		max		inf		a.h $y = 0$

TIC

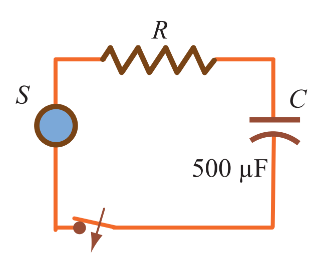
```
> f:=x->x*exp(-x);
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
> Diff(f(x),xx)=diff(f(x),x,x);
> plot(f(x),x=-2..10,y=-2..1);
```



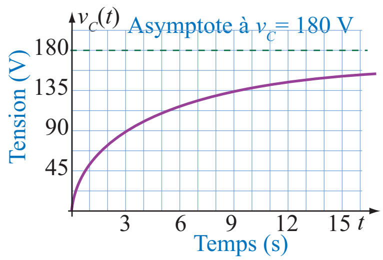
EXEMPLE 6.3.11

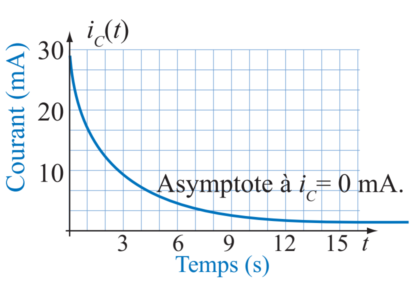
Un circuit comporte un condensateur dont la capacité est de 500 μF. Durant la période d'instabilité qui suit la fermeture du circuit, la tension aux bornes du condensateur est décrite en fonction du temps t par

$$v_C(t) = 60\left(\frac{3t}{t+3}\right)\text{ V.}$$



a) Trouver la valeur stable de la tension.
b) Trouver le taux de variation de la tension au temps $t = 0$.
c) Si ce taux demeurait constant, au bout de combien de temps la valeur stable de la tension serait-elle atteinte ?
d) Représenter graphiquement la fonction décrivant la tension aux bornes du condensateur au temps t durant l'intervalle de 15 secondes suivant la fermeture du circuit.
e) Trouver la fonction décrivant le courant en fonction du temps.
f) Trouver la valeur stable du courant.
g) Représenter graphiquement la fonction décrivant le courant au temps t durant l'intervalle de 15 secondes suivant la fermeture du circuit.





Solution

a) La valeur stable de la tension est la limite à l'infini dont la représentation graphique est l'asymptote horizontale, soit

$$\lim_{t\to\infty}\left(60\left(\frac{3t}{t+3}\right)\right)=60\times\lim_{t\to\infty}\left(\frac{3t}{t+3}\right)=180\text{ V.}$$

La valeur stable est donc de 180 V.

b) On doit d'abord déterminer la dérivée de la fonction décrivant la tension. La fonction étant un quotient, on a

$$\frac{d}{dt}\left(60\left(\frac{3t}{t+3}\right)\right)=60\frac{d}{dt}\left(\frac{3t}{t+3}\right)=60\times\frac{3(t+3)-3t}{(t+3)^2}=\frac{540}{(t+3)^2}\text{ V/s.}$$

On a donc $\dfrac{dv_C}{dt}=\dfrac{540}{(t+3)^2}$ V/s.

À t = 0, on a $\left.\dfrac{dv_C}{dt}\right|_0=\dfrac{540}{(0+3)^2}=60$ V/s.

c) Si le taux de variation initial demeurait constant, on aurait une droite d'équation $v_C = 60t$. La valeur stable de 180 V serait atteinte lorsque $60t$ = 180 V, ce qui donne 3 s.

d) La tension est nulle au temps $t = 0$ et sa valeur stable est de 180 V. La fonction est toujours positive pour $t > 0$. De plus, la dérivée ne s'annule pas et elle est également toujours positive pour $t > 0$. La fonction est donc toujours croissante dans l'intervalle considéré. Le graphique ci-contre illustre le fait que la tension augmente graduellement à mesure que le condensateur se charge. La valeur stable représente la tension aux bornes du condensateur lorsqu'il est chargé.

e) Le courant est décrit par

$$i_C(t)=C\frac{dv_C}{dt}=500\times10^{-6}\times\frac{540}{(t+3)^2}\text{ V/s}=\frac{0{,}27}{(t+3)^2}\text{ A.}$$

On a donc $i_C(t)=\dfrac{0{,}27}{(t+3)^2}$ A.

f) La valeur stable du courant est donnée par la limite à l'infini de la fonction, soit

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{0{,}27}{(t+3)^2}\right)=0\text{ A.}$$

g) Le courant initial est $i(0)$ = 0,03 A = 30 mA.
La fonction qui décrit le courant est toujours positive. Sa dérivée est

$$\frac{di_C}{dt}=i_C'(t)=\frac{-0{,}54}{(t+3)^3}\text{ A/s.}$$

Elle est négative pour $t > 0$; la fonction est donc décroissante dans l'intervalle considéré. Sa dérivée seconde indique qu'elle est concave vers le haut et elle est asymptotique à l'axe horizontal. La représentation graphique ci-contre illustre le fait que le courant diminue à mesure que le condensateur se charge.

Un peu d'histoire

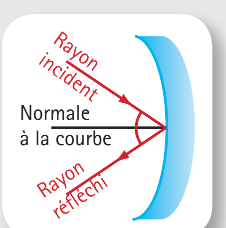
LA RECHERCHE DE LA TANGENTE

Approche cinématique

La plupart des courbes étudiées par les mathématiciens de l'Antiquité avaient un caractère statique. C'est le cas particulièrement de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole qui étaient définies par l'intersection d'un plan et d'un cône. Quelques exceptions cependant, la construction d'un cercle à l'aide d'un compas et la spirale d'Archimède, engendrée par un point qui se déplace à vitesse constante sur une demi-droite à partir d'une de ses extrémités en rotation à vitesse constante autour de cette même extrémité sont des constructions dynamiques.

Les expériences de Galilée sur la chute des corps ont mis en lumière l'aspect dynamique de la parabole et les lois de Kepler ont fait de même pour l'ellipse. Evangelista Torricelli (NH Torricelli01), qui fut secrétaire de Galilée durant les derniers mois de sa vie, considère qu'une courbe est la trajectoire d'un point en déplacement. Cette conception est également adoptée par Roberval (NH Roberval01). À tout moment, le point tend à se déplacer dans la direction qu'il suivrait si tout à coup il était laissé à lui-même. Dans cette approche, la courbe est la trajectoire d'un point soumis à deux forces égales et la direction du mouvement en tout instant est celle de la bissectrice du parallélogramme de l'intensité des mouvements. Cette méthode ne peut cependant être généralisée. Pour l'appliquer, il faut pouvoir décrire la courbe comme la composée de deux mouvements d'égale intensité, ce qui est assez simple dans le cas des coniques, mais impossible pour une courbe quelconque.

La détermination de la tangente à la courbe en un point est importante dans l'étude du mouvement, mais ce n'est pas le seul incitatif. Auteur d'un ouvrage sur la lumière, intitulé *La Dioptrique*, René Descartes est intéressé par la normale à la courbe qui est perpendiculaire à la tangente. C'est également la droite par rapport à laquelle sont mesurés l'angle d'incidence et l'angle de réflexion d'un rayon lumineux réfléchi par une surface courbe. Les travaux de Kepler en optique ont également permis de prendre conscience de l'importance de la normale. En déterminant la tangente, on connaît la normale et réciproquement, en déterminant la normale, on connaît la tangente. C'est en recherchant la normale à une conique que Descartes met au point les premières notions de géométrie analytique (NH Descartes03).



Géométrie analytique

La géométrie analytique qui vise à traduire en termes algébriques les problèmes géométriques et réciproquement prend son essor dans ce contexte. Les premiers développements en algèbre sont l'œuvre des mathématicien arabes, en particulier Al-Khawarizmi (NH Al-Khawarizmi), qui a développé des méthodes de résolutions des équations du second degré inspirées de propriétés présentées dans les *Éléments* d'Euclide.

Le philosophe René Descartes (1596-1650) (NH Descartes01) et le mathématicien amateur Pierre de Fermat (1601-1665) (NH Fermat01), en adoptant des démarches différentes, sont à l'origine de la géométrie analytique moderne. Descartes s'intéresse aux problèmes géométriques (NH Descartes02) et il utilise l'algèbre pour les résoudre. C'est dans *La Géométrie*, publié en 1637, que Descartes développe ses idées et qu'il présente des exemples de sa démarche. Cet ouvrage a connu une large diffusion, c'est pourquoi on attribue généralement la découverte de la géométrie analytique à Descartes d'où l'appellation **système d'axes cartésien**.

Fermat s'intéresse plutôt aux expressions algébriques et cherche à déterminer les courbes que ces expressions représentent. Il énonce le principe fondamental de la géométrie analytique selon lequel lorsqu'une équation comporte deux variables les valeurs de l'une d'elles peuvent se représenter par une courbe. Dans cette démarche, il est tout naturel de déterminer tout d'abord les valeurs extrêmes de la fonction et Fermat développe une méthode pour y parvenir. Ces deux approches sont complémentaires et ont donné les deux volets de la géométrie analytique : représenter une courbe donnée par une équation et représenter une équation par une courbe.

Puisque cette branche des mathématiques vise à utiliser les ressources de l'algèbre pour résoudre des problèmes de géométrie et réciproquement, pourquoi ne pas l'avoir appelé géométrie algébrique plutôt que **géométrie analytique** ?

Déjà, les géomètres grecs appelaient **analyse** la démarche de résolution de problème consistant à considérer que celui-ci était résolu et à déduire les propriétés que devait avoir cette solution et à remonter ainsi à un énoncé proche du problème à résoudre.

Cette démarche, comme l'ont remarqué les mathématiciens de la Renaissance, est celle que l'on adopte en algèbre. En notant x, la solution d'un problème, on a recours aux propriétés que cette solution doit avoir pour exprimer le problème sous forme d'équation. L'inconnue est ainsi mise en relation avec les données connues du problème et il ne reste qu'à appliquer les manipulations algébriques pour résoudre cette équation et obtenir ainsi la valeur de l'inconnue.

L'adjectif **analyse** fut graduellement utilisé pour décrire les travaux faisant appel à la manipulation des symboles algébriques. L'appellation géométrie analytique a été donnée par Michel Rolle (1632-1719), mais elle a été définitivement adoptée après la publication par Jean-Baptiste Biot (1774-1862) d'un manuel destiné à l'enseignement **Essai de géométrie analytique, appliqué aux courbes et aux surfaces du second ordre** (1805). Cet ouvrage a été traduit en plusieurs langues, favorisant l'adoption de l'appellation **géométrie analytique**.

6.4 Exercices

Esquisser le graphique des fonctions après avoir complété le tableau dont une partie de l'information est donnée.

1.

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	2		5		8

2.

x	$-\infty$		2		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$\nexists$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$\nexists$	$+$	$+$
$f(x)$	0		4		0

3.

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	4		2		0		2		4

4.

x	$-\infty$		-8		1		3		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$-$	$-$
$f(x)$	2		3		4		$\nexists$		2

5.

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	∞		0		$\nexists$		4		∞

6.

x	$-\infty$		-4		2		4		∞
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	∞		-4		-2		0		∞

7.

x	$-\infty$		-1		0		2		∞
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	∞		-2		0		4		$-\infty$

8.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$		$\nexists$		3		∞

9.

x	$-\infty$		2		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$\nexists$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$\nexists$	$+$	$+$
$f(x)$	-2		4		2

10.

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	∞		-2		$\nexists$		2		$-\infty$

Évaluer les limites suivantes à l'aide des propriétés des limites à l'infini.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{x+2}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2-6x}{3x-8}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{x^2+2}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{4x-2}\right)$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x+1}\right)$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7}{8-x}\right)$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{3}{x^2}\right)$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-3+\dfrac{5}{x-1}\right)$

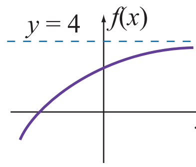
19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-5}{2n+1}\right)$

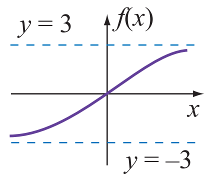
20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{n^2}\times\dfrac{3n^2-2}{2}\right)$

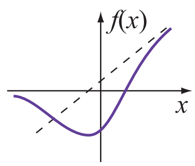
21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9}{n^3}\times\dfrac{2n^3-3n+2}{6}\right)$

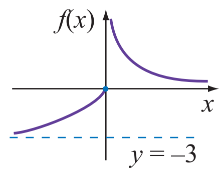
22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{1/x}\right)$

23. Trouver la limite à l'infini et à moins l'infini des fonctions dont le graphique est donné.

a) 

b) 

c) 

d) 

24. Soit la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x)=\frac{x+3}{x-2}.$$

a) Trouver la dérivée de cette fonction.
b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance et les valeurs optimales de la fonction.
c) Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas et les points d'inflexion de la fonction.
d) Déterminer le domaine de la fonction f'.
e) Déterminer les asymptotes et esquisser le graphique.

25. Soit la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x)=\frac{2x-5}{x+2}.$$

a) Trouver la dérivée de cette fonction.
b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.
c) Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas et les points d'inflexion de la fonction.
d) Déterminer le domaine de la fonction f'.
e) Déterminer les asymptotes et esquisser le graphique.

26. Évaluer les limites suivantes à l'aide des propriétés des limites à l'infini.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-e^{-x}\right)$
b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+e^{-x}\right)$
c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3e^{-x}\right)$
d) $\lim\limits_{x\to\infty}7\left(1-e^{-x}\right)$
e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-e^{x}\right)$
f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(6e^{x}\right)$
g) $\lim\limits_{t\to\infty}40\left(1-e^{-0,2t}\right)$
h) $\lim\limits_{t\to-\infty}40\left(1-e^{-0,2t}\right)$

27. Esquisser le graphique des fonctions suivantes à l'aide de leurs asymptotes verticales et horizontales.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$
b) $f(x)=\dfrac{1}{x(x-2)}$
c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x(x-2)}$
d) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$

28. Un réservoir est doté d'un système de pompage automatique qui se met en marche lorsque la jauge descend en bas de 10 L. Le volume pompé est alors décrit en fonction du temps par :

$$V(t)=\frac{375t}{3t+2},$$

où V est en litres et t en minutes.

a) Trouver la dérivée de cette fonction.
b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.
c) Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas et les points d'inflexion de la fonction.
d) Déterminer le domaine de la fonction mathématique et le domaine de validité du modèle.
e) Déterminer les asymptotes, construire le tableau de synthèse et esquisser le graphique.

29. Soit $f(x)=\dfrac{600x}{x^2+1}$ dont les dérivées sont :

$$f'(x)=\frac{600(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\text{ et }f''(x)=\frac{1200x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

a) Déterminer le domaine de la fonction et de ses dérivées.
b) Déterminer les intervalles de croissance et de

décroissance de la fonction.

b) Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas et les points d'inflexion de la fonction.

d) Déterminer les asymptotes, construire le tableau de synthèse et esquisser le graphique.

30. Un réservoir est muni d'un dispositif électronique qui contrôle l'ouverture d'une vanne dès que le volume de liquide est inférieur à 5 litres. Le volume est décrit par :

$$V(t)=\frac{80t+10}{t+2}\text{ L},$$

où t est le temps en secondes mesuré à partir du déclenchement du système de remplissage.

a) Trouver la dérivée de cette fonction.

b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

c) Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas et les points d'inflexion de la fonction.

d) Déterminer le domaine de la fonction mathématique et le domaine de validité du modèle.

e) Déterminer les asymptotes, construire le tableau de synthèse et esquisser le graphique.

31. Soit $f(x)=\dfrac{500x}{e^x}$ dont les dérivées sont :

$$f'(x)=\frac{500(1-x)}{e^x} \text{ et } f''(x)=\frac{500(x-2)}{e^x}$$

a) Déterminer le domaine de la fonction et de ses dérivées.

b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

c) Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas et les points d'inflexion de la fonction.

d) Déterminer les asymptotes, construire le tableau de synthèse, construire le tableau de synthèse et esquisser le graphique.

32. On estime que la puissance requise pour opérer un appareil durant la période transitoire qui suit sa mise en marche est

$$P(t)=\frac{800t^2}{e^t}\text{ W},$$

où P est en watts (W) et le temps t est en minutes. Cette période transitoire dure 8 minutes, après quoi la puissance requise demeure constante.

a) Trouver la dérivée de cette fonction.

b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

c) Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas et les points d'inflexion de la fonction.

d) Déterminer le domaine de la fonction mathématique et le domaine de validité du modèle.

e) Déterminer les asymptotes, construire le tableau de synthèse et esquisser le graphique.

33. Les organisateurs de floralies annuelles ont estimé que le nombre de visiteurs sur le site au cours d'une journée de 8 heures est décrit par :

$$N(t)=600\frac{t^2-8t}{t-9},$$

où t est le temps en heures. Le temps 0 représente l'heure d'ouverture du site.

a) Trouver la dérivée de cette fonction.

b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

c) Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas et les points d'inflexion de la fonction.

d) Déterminer le domaine de la fonction mathématique et le domaine de validité du modèle.

e) Déterminer les asymptotes, construire le tableau de synthèse et esquisser le graphique.

34. Soit la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{24x-18x^2}{e^x}.$$

a) Trouver la dérivée de cette fonction.

b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.

c) Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas et les points d'inflexion de la fonction.

d) Déterminer le domaine de la fonction f.

e) Déterminer les asymptotes, construire le tableau de synthèse et esquisser le graphique.

35. Soit la fonction définie par

$$f(x)=3+3e^x-xe^x.$$

a) Faire l'analyse globale de la fonction, sachant que

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0.$$

b) Déterminer la différentielle de la fonction au voisinage de x = 0 et au voisinage de x = 1.
c) Calculer la variation de la fonction sur l'intervalle [0; 0,5] et sur l'intervalle [1; 1,25].
d) Déterminer un modèle d'approximation linéaire de la fonction au voisinage de 0 et au voisinage de 1.
e) Utiliser le premier modèle pour estimer l'image de la fonction à 0,5 et le second pour estimer l'image de la fonction à 1,5.

36. Soit la fonction définie par

$$f(x) = 4e^{-x/4} \sin x$$

a) Faire l'analyse de la fonction dans l'intervalle [0; 6π], sachant que :

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \sin x = 0.$$

b) Déterminer la différentielle de la fonction au voisinage de $x = 0$.
c) Calculer la variation de la fonction sur l'intervalle [0; 0,25].
d) Déterminer un modèle d'approximation linéaire de la fonction au voisinage de 0.
e) Utiliser ce modèle pour estimer l'image de la fonction à 0,5.

37. On a établi le modèle suivant pour décrire le mouvement amorti.

$$p(t) = e^{-0,5t} \sin 2t.$$

où t est le temps en seconde et p, la position du corps par rapport à la position d'équilibre.
a) Esquisser le graphique de ce mouvement amorti durant l'intervalle de temps [0; 12].
b) Déterminer la différentielle de la position dans l'intervalle [1; 1,5].
c) Calculer la vitesse au temps $t = 0$ et à $t = 2$.
d) Calculer l'accélération à $t = 0$ et à $t = 2$.

Faire l'analyse complète de la fonction.

38. $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$

39. $f(x) = \dfrac{x^3}{e^{x^2}}$

40. Des chercheurs ont développé un modèle qui, selon eux, permet de prédire que le nombre de personnes qui attraperont le virus lors de la prochaine épidémie de grippe. Ce modèle est :

$$N(t) = 30t^3e^{-t/3},$$

où N est le nombre de personnes malades et t le temps en jours à partir du début de l'épidémie.
a) Déterminer la dérivée de cette fonction.
b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.
c) Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas et les points d'inflexion de la fonction.
d) Déterminer le domaine de la fonction mathématique et le domaine de validité du modèle.
e) Déterminer les asymptotes, construire le tableau de synthèse, construire le tableau de synthèse et esquisser le graphique.

Exercices de synthèse

1. Soit f une fonction dont la dérivée s'annule à $x = a$. Peut-on conclure que f a un maximum ou un minimum à $x = a$? Justifier.

2. Soit f une fonction dont la dérivée seconde s'annule à $x = a$. Peut-on conclure que f a un point d'inflexion à $x = a$? Justifier.

3. Soit f une fonction qui change de signe à $x = a$. Peut-on conclure que f a un zéro à $x = a$? Justifier.

4. Soit f une fonction ayant un maximum relatif à $x = a$. Peut-on conclure que la dérivée s'annule à $x = a$? Justifier.

5. Soit f une fonction ayant un point d'inflexion à $x = a$. Peut-on conclure que la dérivée seconde s'annule à $x = a$? Justifier.

6. Soit f une fonction croissante dans l'intervalle $]-\infty; a[$ et dont la dérivée s'annule à $x = a$. Peut-on conclure que f est décroissante dans l'intervalle $[a; \infty[$? Justifier.

7. On donne l'information suivante sur une fonction f dans un intervalle $]a; b[$. Compiler cette infor-

mation dans un tableau synthèse et esquisser au moins deux graphiques possibles de la fonction.

a) $f(c) = 1$, $f'(c) = 0$ et $f''(x) < 0$ dans tout l'intervalle $]a; b[$.

b) $f(c) = 1$, $f'(c) = 0$ et $f''(x) > 0$ dans tout l'intervalle $]a; b[$.

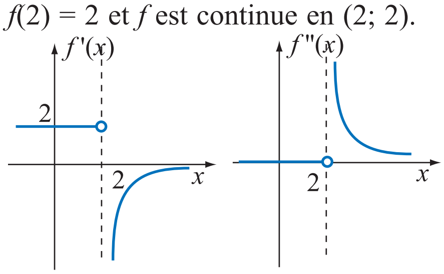
c) $f(c) = 1$, $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$. De plus, $f''(x) < 0$ si $x < c$ et $f''(x) > 0$ si $x > c$.

d) $f(c) = 1$, $f'(c)$ n'existe pas, $f''(c) = 0$. De plus, $f''(x) > 0$ si $x < c$ et $f''(x) < 0$ si $x > c$.

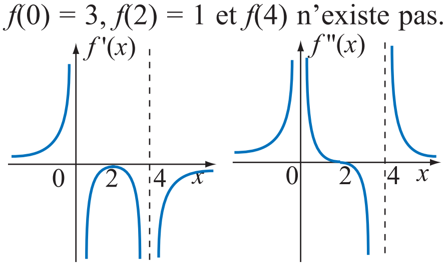
e) $f(c) = 1$, $f'(c)$ n'existe pas. De plus, $f''(x) =1$ si $x < c$ et $f''(x) < 0$ si $x > c$.

8. On donne quelques caractéristiques d'une fonction ainsi que le graphique de ses dérivées première et seconde. En utilisant ces informations, construire le tableau des caractéristiques de la fonction et esquisser son graphique. Pour chacun des points critiques, indiquer s'il s'agit d'un point stationnaire, anguleux ou de rebroussement. Dans le cas des points stationnaires, préciser s'il s'agit d'un minimum, d'un maximum ou d'un point d'inflexion.

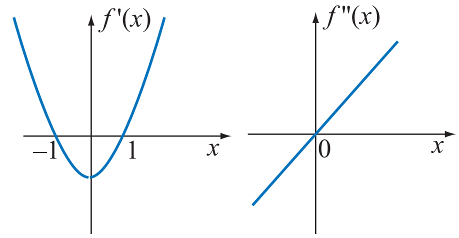
a) $f(2) = 2$ et f est continue en $(2; 2)$.



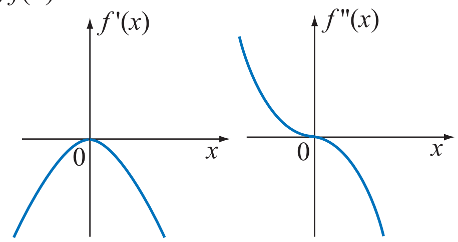
b) $f(0) = 3$, $f(2) = 1$ et $f(4)$ n'existe pas.



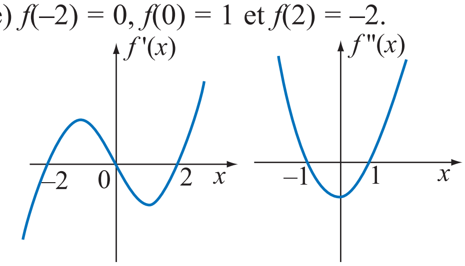
c) $f(-1) = 4$, $f(0) = 2$ et $f(1) = 1$.



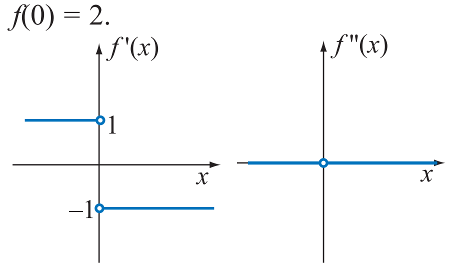
d) $f(0) = 1$.



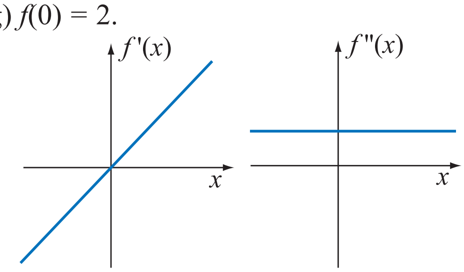
e) $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$ et $f(2) = -2$.



f) $f(0) = 2$.



g) $f(0) = 2$.



h) $f(0) = 2$.