Structures algébriques

Les ensembles jouent un rôle important dans le savoir mathématique, surtout lorsqu'ils sont dotés d'une structure.

NH Notion d'ensemble

Ensemble

Ensemble

Un **ensemble** est une collection ou un regroupement d'objets appelés **éléments** ayant une ou des propriétés communes.

Un ensemble a une structure lorsque des opérations sont définis entre ses éléments. On distingue différentes structures selon le type d'opérations et leurs propriétés.

Opération interne

Une **opération interne** d'un ensemble $\boldsymbol{E}$ est une opération qui combine deux éléments de $\boldsymbol{E}$ et dont le résultat est également un élément de $\boldsymbol{E}$.

L'addition de deux matrices de même dimension est une opération interne, tout comme l'addition des couples de $\mathbb{R}^2$ ou des triplets de $\mathbb{R}^3$.

Structure de groupe

On dit qu'un ensemble $\boldsymbol{E}$ muni d'une opération interne $\oplus$ a une **structure de groupe** si et seulement si l'opération $\oplus$ satisfait aux conditions suivantes:

1. Fermeture de l'ensemble $\boldsymbol{E}$ pour l'opération :

   $$\text{Pour tout } a \text{ et } b \in \boldsymbol{E},\ (a \oplus b) \in \boldsymbol{E}.$$

2. Associativité de l'opération :

   $$\text{Pour tout } a,\ b \text{ et } c \in \boldsymbol{E},\ a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c.$$

3. Existence d'un élément neutre pour l'opération :

   Il existe dans l'ensemble $\boldsymbol{E}$ un élément, noté e, tel que :

   $$\text{pour tout } a \in \boldsymbol{E},\quad a \oplus e = e \oplus a = a.$$

4. Existence d'un élément opposé pour l'opération :

   Pour chaque élément a de l'ensemble $\boldsymbol{E}$, il existe dans $\boldsymbol{E}$, un élément, noté a^*, tel que :

   $$a \oplus a^* = a^* \oplus a = 0.$$

REMARQUE
Dans les définitions, les symboles $\oplus$, $\odot$ et $\otimes$ sont utilisés pour désigner des opérations sur des objets qui ne sont pas nécessairement des nombres, comme, par exemple, les couples, les triplets ou les matrices.

REMARQUE
On note e l'élément neutre qui peut prendre différentes formes, $(0;0)$, $(0;0;0)$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ou autre.

Groupe abélien

On dit qu'un groupe est **abélien** lorsque l'opération $\oplus$ est commutative :

$$\text{Pour tout } a \text{ et } b \in \boldsymbol{E},\ a \oplus b = b \oplus a.$$

REMARQUE
Le lecteur est familier avec les opérations sur les nombres entiers et sur les nombres réels et nous admettrons sans démonstration que l'ensemble des nombres entiers muni de l'addition a une structure de groupe abélien que l'on note $\langle \mathbb{Z},+\rangle$ L'ensemble des nombres réels muni de l'addition, noté $\langle \mathbb{R},+\rangle$, forme un groupe abélien. L'ensemble des réels non nuls muni de la multiplication, $\langle \mathbb{R}\backslash\{0\},\times\rangle$, forme un groupe abélien.

Nous avons vu que l'ensemble des couples de $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition a une structure de groupe abélien. On note cette structure $\langle\, \mathbb{R}^2, + \,\rangle$.

L'ensemble des triplets de $\mathbb{R}^3$ muni de l'addition a une structure de groupe abélien. On note cette structure $\langle\, \mathbb{R}^3, + \,\rangle$.

L'ensemble des matrices muni de l'addition a une structure de groupe abélien. On note cette structure $\langle\, \mathbf{M}_{m \times n}, + \,\rangle$

REMARQUE
Dans la notation d'une structure, on indique l'ensemble et la ou les opérations définies sur cet ensemble.

Sous-groupe

Soit $\langle \boldsymbol{E}, \oplus \rangle$ un groupe et $\boldsymbol{F}$ un sous-ensemble non vide de $\boldsymbol{E}$. On dit que $\langle \boldsymbol{F}, \oplus \rangle$ est un **sous-groupe** de $\boldsymbol{E}$ si et seulement si $\langle \boldsymbol{F}, \oplus \rangle$ est un groupe.

Lorsque $\boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F} \neq \{e\}$, où e est l'élément neutre de l'opération, on dit que $\boldsymbol{F}$ est un **sous-groupe propre** de $\boldsymbol{E}$.

Pour montrer qu'un sous-ensemble d'un groupe forme un sous-groupe, il n'est pas nécessaire de vérifier que les opérations satisfont à toutes les propriétés. Le théorème suivant indique les propriétés qu'il faut vérifier.

REMARQUE
Pour bien saisir la signification de la fermeture, considérons l'ensemble des entiers impairs. Lorsqu'on additionne deux entiers impairs, la somme est toujours un entier pair. Par conséquent, l'ensemble des entiers impairs n'est pas fermé pour l'addition et ne peut former un sous-groupe des entiers.

Cependant, l'ensemble des entiers pairs est fermé pour l'addition. De plus, haque entier pair a son opposé dans le sous-ensemble des nombres pairs.Par conséquent le sous-ensemble des entiers pairs forme un sous-groupe de l'ensemble des entiers.

THÉORÈME

Conditions d'un sous-groupe

Soit $\langle \boldsymbol{E}, \oplus \rangle$ un groupe. Si $\boldsymbol{F}$ est un sous-ensemble non vide de $\boldsymbol{E}$. Alors $\boldsymbol{F}$ est un sous-groupe de $\boldsymbol{E}$ si et seulement si :

- $\boldsymbol{F}$ est fermé pour l'opération $\oplus$: pour tout a et $b \in \boldsymbol{F}$, $a \oplus b \in \boldsymbol{F}$,
- tout élément de $\boldsymbol{F}$ a son opposé pour l'opération $\oplus$ dans $\boldsymbol{F}$, c'est-à-dire pour tout $a \in \boldsymbol{F}$, $a^* \in \boldsymbol{F}$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Si $\boldsymbol{F}$ est un sous-groupe de $\boldsymbol{E}$, alors, par définition, $\boldsymbol{F}$ est fermé pour l'addition et $\boldsymbol{F}$ contient l'élément opposé de chacun de ses éléments.

$\Leftarrow$ Supposons que $\boldsymbol{F}$ est fermé pour l'opération $\oplus$ et que tout élément de $\boldsymbol{F}$ a son inverse dans $\boldsymbol{F}$. Montrons que $\langle\, \boldsymbol{F}, \oplus \,\rangle$ satisfait à toutes les conditions d'un groupe.

Fermeture

L'ensemble $\boldsymbol{F}$ est fermé pour l'opération, par hypothèse.

Associativité

Soit a, b et c des éléments quelconques de $\boldsymbol{F}$ alors :

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c.$$

En effet, $\boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{E}$ et la propriété d'associativité est satisfaite pour tous les éléments de $\boldsymbol{E}$.

Existence, dans F, d'un élément neutre pour l'opération

Soit a un élément quelconque de $\boldsymbol{F}$. Alors, son opposé a^* est également un élément de $\boldsymbol{F}$ par hypothèse. Puisque l'ensemble $\boldsymbol{F}$ est fermé pour l'opération, cela signifie que $a \oplus a^*$ est un élément de $\boldsymbol{F}$.

Or, $a \oplus a^* = 0$, donc 0 est un élément de $\boldsymbol{F}$ et le sous-ensemble contient l'élément neutre de l'opération.

Existence d'un élément opposé pour l'opération

L'ensemble $\boldsymbol{F}$ contient l'opposé de chacun de ses éléments, par hypothèse.

Le sous-ensemble $\boldsymbol{F}$ satisfait à toutes les conditions d'un groupe. Il forme donc un sous-groupe de $\boldsymbol{E}$.

____

Structure d'anneau

On dit qu'un ensemble $\boldsymbol{E}$ muni de deux opérations internes, $\oplus$ et $\odot$, a une **structure d'anneau** si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\langle \boldsymbol{E}, \oplus \rangle$ est un groupe abélien;
- l'opération $\odot$ est associative;
- l'opération $\odot$ est distributive sur l'opération $\oplus$.

Lorsque l'opération $\odot$ a un élément neutre dans $\boldsymbol{E}$, on dit que l'anneau est **unitaire**.

Lorsque l'opération $\odot$ est commutative, on dit que l'anneau est **commutatif**.

L'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$ muni de l'addition et de la multiplication a une structure d'anneau unitaire.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n, $\langle \mathbf{M}_{n\times n}, + \rangle$ forme une structure d'anneau unitaire.

Structure de corps

On dit qu'un ensemble **E** muni de deux opérations internes, $\oplus$ et $\odot$ a une **structure de corps** si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\langle \boldsymbol{E}, \oplus, \odot \rangle$ est un anneau commutatif;
- $\langle \boldsymbol{E}\backslash\{e\}, \odot \rangle$ est un groupe;
- l'opération $\odot$ est distributive sur l'opération $\oplus$.

Lorsque l'opération $\odot$ est commutative, on dit que le corps est **commutatif**.

REMARQUE

La condition $\langle \boldsymbol{E}\backslash\{e\}, \odot \rangle$ est un groupe implique que chaque élément de $\boldsymbol{E}$, sauf l'élément neutre pour l'opération $\odot$, a un élément inverse dans $\boldsymbol{E}$. Symboliquement : pour tout élément a de $\boldsymbol{E}$, il existe dans $\boldsymbol{E}$ un élément a' tel que :

$$a \odot a' = a' \odot a = 1.$$

L'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$, l'ensemble de nombres rationnels, $\mathbb{Q}$, et l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{C}$, avec l'addition et la multiplication ont une structure de corps commutatif.

Certaines structures font intervenir une opération externe.

Opération externe

Soit E et F deux ensembles. On appelle **opération externe** sur E :

- une opération qui combine un élément de F et un élément de E pour donner un élément de E.
- ou une opération qui combine deux éléments de E pour donner un élément de F.

Structure d'espace vectoriel sur un corps K

Un ensemble V muni d'une opération interne, notée $\oplus$ et appelée addition, et d'une opération externe, notée $\otimes$ et appelée multiplication par un scalaire a une **structure d'espace vectoriel** sur K si :

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w} \in V$ et pour tout scalaire r et $s \in K$:

1. Fermeture de l'addition des vecteurs :
$$\vec{u} \oplus \vec{v} \in V$$
2. Commutativité de l'addition des vecteurs :
$$\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u}$$
3. Associativité de l'addition des vecteurs :
$$(\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w} = \vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w})$$
4. Il existe, dans V, un élément neutre pour l'addition, noté $\vec{0}$, tel que, pour tout $\vec{u} \in V$:
$$\vec{u} \oplus \vec{0} = \vec{0} \oplus \vec{u} = \vec{u}$$
5. Pour tout élément $\vec{u}$ de V, il existe, dans V, un élément opposé, noté $-\vec{u}$, tel que :
$$\vec{u} \oplus (-\vec{u}) = (-\vec{u}) \oplus \vec{u} = \vec{0}$$
6. Fermeture de la multiplication d'un vecteur par un scalaire :
$$r \otimes \vec{u} \in V$$
7. Distributivité de la multiplication sur l'addition des scalaires :
$$(r+s) \otimes \vec{u} = r \otimes \vec{u} + s \otimes \vec{u}$$
8. Distributivité de la multiplication sur l'addition des vecteurs :
$$r \otimes (\vec{u} \oplus \vec{v}) = r \otimes \vec{u} + r \otimes \vec{v}$$
9. Associativité mixte :
$$r \otimes (s \otimes \vec{u}) = (rs) \otimes \vec{u}$$
10. Élément neutre pour la multiplication d'un vecteur par un scalaire :
$$1 \otimes \vec{u} = \vec{u}$$

REMARQUE

La multiplication d'une matrice par un scalaire est une opération externe du premier type. L'opération combine un nombre réel et une matrice de dimension $m \times n$ et que le résultat de l'opération est également une matrice de dimension $m \times n$.

Le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ est une opération externe du second type. Elle combine deux vecteurs et le résultat de l'opération n'est pas un vecteur, c'est un scalaire.

REMARQUE

Dans l'étude que nous avons fait de l'algèbre linéaire, le corps des scalaires, K, était le corps des nombres réels, mais on peut aussi considérer le corps des rationnels, $\mathbb{Q}$, ou le corps des complexes, $\mathbb{C}$.

REMARQUE

On peut regrouper les cinq premières conditions en indiquant que :

$\langle E, \oplus \rangle$ est un groupe commutatif.

REMARQUE

Les éléments du corps K sont parfois appelés **opérateurs sur les éléments** de E.

Lorsque l'ensemble des opérateurs est un anneau plutôt qu'un corps, l'ensemble E a une **structure de module**.