Pierre de Fermat
1601-1665

Fermat a développé une méthode de calcul de l'aire sous une courbe en effectuant la somme des aires de rectangles dont les bases forment une progression géométrique de raison plus petite que 1.

Pierre de Fermat
Calcul d'aires

Fermat s'est également intéressé au problème de l'aire sous la courbe d'une fonction de la forme $y = x^n$ et a développé une méthode ingénieuse, applicable pour les valeurs entières et fractionnaires de n pour trouver l'aire sous la courbe dans un intervalle $[0; c]$.

Pour bien comprendre le déroulement de la méthode de Fermat, précisons les étapes de celle-ci.

1. Diviser l'intervalle selon une progression géométrique à partir de l'extrémité droite de l'intervalle en multipliant successivement la valeur frontière de l'intervalle par une fraction plus petite que 1.
2. En utilisant ces sous intervalles comme bases, faire la somme des aires des rectangles construits à partir de la droite de l'intervalle.
3. Déterminer la valeur limite lorsque la raison de la progression géométrique tend vers 1. C'est la valeur cherchée.

Pour illustrer sa méthode, considérons la courbe $y = x^2$ et l'aire sous la courbe dans l'intervalle $[0; c]$. Fermat subdivise l'intervalle $[0; c]$ en un nombre infini de sous-intervalles en prenant comme abscisses les valeurs :

$$c, cr, cr^2, cr^3, \dots, cr^n,$$

où r est une fraction positive et plus petite que 1.

Ainsi, pour $r = 1/2$, les subdivisions de l'intervalle, à partir de la droite de la figure, sont :

$$\left\{\dots, \frac{c}{8}, \frac{c}{4}, \frac{c}{2}, c\right\}$$

La somme des aires des rectangles construits à partir de la droite est alors la somme en bas de page.

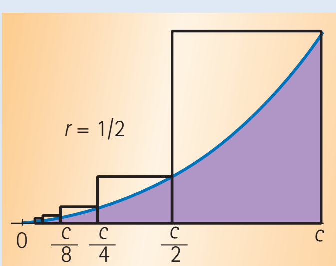
C'est une progression géométrique dont le premier terme est

$$c^3\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{c^3}{2}$$

et dont la raison est

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Puisque la somme infinie d'une progression géométrique de raison r $(0 < r < 1)$



$$\sum A_i = c^2\left(c-\frac{c}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}\right)^2\left(\frac{c}{2}-\frac{c}{4}\right)+\left(\frac{c}{4}\right)^2\left(\frac{c}{4}-\frac{c}{8}\right)+\dots$$
$$= c^3\left(1-\frac{1}{2}\right)+c^3\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3+c^{n+1}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^6+c^{n+1}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^9+\dots$$

et dont le premier terme est a est

$$S_\infty = \frac{a}{1-r},$$

on obtient donc :

$$\sum A_i = \frac{c^3\left(1-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

En factorisant et en simplifiant, on a alors :

$$\sum A_i = \frac{c^3\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}$$

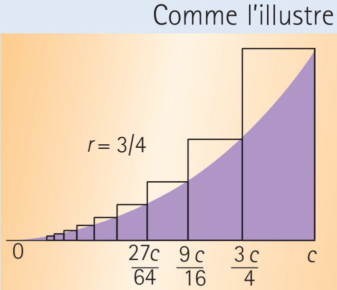
$$= \frac{c^3}{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}.$$

C'est la somme des aires des rectangles de la figure de la page précédente.

Considérons maintenant ce qui se passe lorsque la raison de la progression géométrique s'approche de 1. Prenons, par exemple, $r = 3/4$. Les subdivisions de l'intervalle, à partir de la droite, sont alors :

$$\left\{\ldots, \frac{27c}{64}, \frac{9c}{16}, \frac{3c}{4}, c\right\}.$$

Comme l'illustre la figure ci-dessous, en prenant $r = 3/4$, la largeur des rectangles diminue. Plus la valeur de r s'approche de 1, plus la somme des aires des triangles est proche de l'aire sous la courbe.



Il suffit donc de trouver la somme des aires lorsque r tend vers 1 pour obtenir l'aire sous la courbe. Les aires des rectangles, en débutant par celui de droite, forment alors une progression géométrique dont la raison est plus petite que 1. C'est la progression :

$$\{c^2(c-cr), c^2r^2(cr-cr^2), c^2r^4(cr^2-cr^3), \ldots\}$$
$$= \{c^3(1-r), c^3r^3(1-r), c^3r^6(1-r), \ldots\}$$

Dans cette progression, le premier terme est $c^3(1-r)$ et la raison est r^3. La somme est alors :

$$\sum A_i = \frac{c^3(1-r)}{1-r^3} = \frac{c^3(1-r)}{(1-r)(1+r+r^2)}$$

$$= \frac{c^3}{(1+r+r^2)}.$$

et, lorsque r tend vers 1, on obtient :

$$\sum A_i = \frac{c^3}{1+1+1} = \frac{c^3}{3}.$$

L'aire sous la courbe $y = x^2$ dans l'intervalle $[0; c]$ est donc $c^3/3$. On remarque que la procédure en est une de géométrie analytique, contrairement aux approches de plusieurs mathématiciens de l'époque et des époques précédentes.

Vers 1635, Fermat généralise ce résultat en considérant une relation $y = x^n$ pour un entier n positif quelconque.

Dans la progression obtenue, le premier terme est $c^n(c-cr)$ et la raison est r^{n+1}. La somme des aires de ces rectangles est alors :

$$\sum A_i = \frac{c^n(c-cr)}{1-r^{n+1}}$$

$$= \frac{c^{n+1}(1-r)}{(1-r)(1+r+r^2+r^3+\ldots+r^n)}$$

$$= \frac{c^{n+1}}{(1+r+r^2+r^3+\ldots+r^n)}.$$

et, lorsque r tend vers 1, on a :

$$A = \lim_{r\to 1}\frac{c^{n+1}}{(1+r+r^2+r^3+\ldots+r^n)}$$

$$= \frac{c^{n+1}}{(1+1+1+1+\ldots+1)}$$

$$= \frac{c^{n+1}}{n+1}.$$

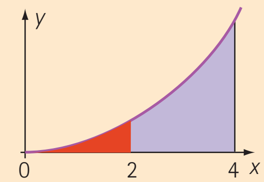
Il étendit ce résultat aux puissances fractionnaires positives par la suite.

De nos jours, ce résultat s'écrit :

$$\int_0^c x^n\,dx = \frac{c^{n+1}}{n+1}.$$

Aire sous la courbe

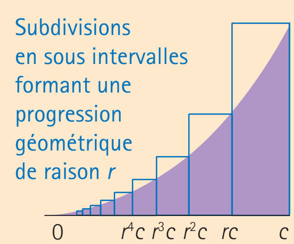
Pour déterminer l'aire sous la courbe $y = x^2$ dans l'intervalle $[2; 4]$, il suffit de calculer la différence des aires des intervalles $[0; 4]$ et $[0; 2]$.



En appliquant le résultat de Fermat, on obtient :

$$A_{[2;4]} = A_{[0;4]} - A_{[0;2]}$$
$$= \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3}$$
$$= \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}.$$

Généralisation du résultat



On remarque que le procédé est particulier parce qu'il comporte dès le départ une infinité de rectangles pour calculer une valeur approchée de l'aire sous la courbe. De plus, le procédé donne un résultat correct, même si on a une infinité de segments de longueur c^n qui se superposent à la verticale de $x = c$ lorsque r devient égal à 1.