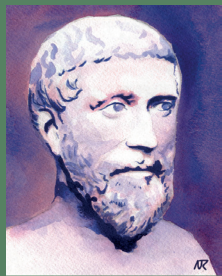
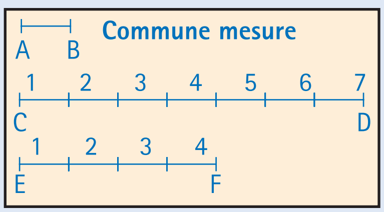
Illustration : Noémie Ross



Pythagore
vers –580 à –495

La commensurabilité était le fondement de la théorie des proportions des Pythagoriciens. La théorie de la commensurabilité découlait de la conviction que le temps et l'espace est constitué de grains indivisibles. Ce qui implique qu'il serait toujours possible de déterminer une commune mesure de deux grandeurs de même nature.

Pythagore
Commensurabilité



Commensurabilité

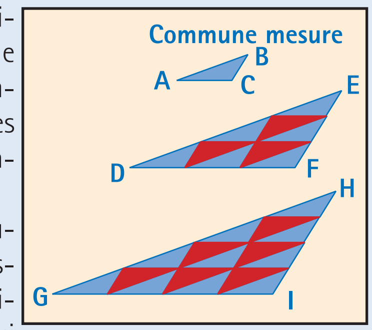
Un aspect important de la géométrie est l'étude de la proportionnalité des figures semblables. Cette étude est fondamentale, par exemple, en architecture pour passer du plan à la construction. Pour les Pythagoriciens, le fondement de la proportionnalité est la commensurabilité.

Illustrons ce concept en considérant un segment de droite AB de longueur quelconque.

Le segment AB est une commune mesure des segments CD et EF puisque AB peut être reportée un nombre entier de fois dans chacun de ces deux segments. Les Pythagoriciens croyaient qu'en considérant des segments quelconques, on peut toujours trouver un segment qui soit commune mesure de ceux-ci.

Pour eux, les segments de droites sont formés de parties indivisibles, les points, dont le nombre peut être indéterminé mais le rapport des segments, qui est le reflet du nombre de ces points, peut être connu. Ce rapport n'est pas considéré comme un nombre par les Pythagoriciens, c'est une relation entre les grandeurs et les figures. Cette conviction les a encouragé à poursuivre leurs recherches pour expliciter le rapport des segments de figures géométriques sous forme de proportions.

Rapports et proportions



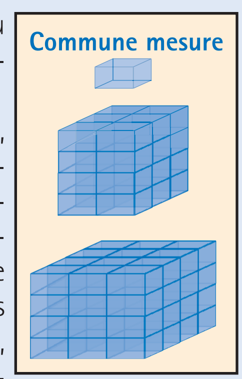
Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est une commune mesure des triangles semblables DEF et GHI.

Ce qui est particulièrement intéressant, c'est l'égalité des rapports, qui forme une proportion et qui caractérise ces triangles semblables.

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{HI}} = \frac{4}{3}.$$

Le rapport des aires des triangles est :

$$\frac{A_{DEF}}{A_{GHI}} = \frac{16}{9}.$$



Le rapport des aires est égal au carré du rapport des lignes homologues.

Dans les solides semblables, les volumes sont proportionnels au cube des lignes homologues. Il est à noter que l'existence d'une commune mesure ne signifie pas que les solides sont semblables. Cependant, s'ils sont semblables, les Pythagoriciens croyaient qu'ils avaient une commune mesure. Cette commune mesure permet de déterminer les rapports de nombres entiers caractérisant la relation entre les figures.

Les médiétés

Si on considère un segment de droite de longueur $a + b$ et que l'on détermine sur ce segment une longueur c, on peut alors considérer divers rapports pour décrire des relations entre ces segments. À partir de cette idée, les Pythagoriciens ont retenus dix rapports impliquant ces longueurs. La grandeur c était appelée une **médiété**. Sur ces dix médiétés, il ne reste aujourd'hui que la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique, la moyenne harmonique et la division en extrême et moyenne raison.

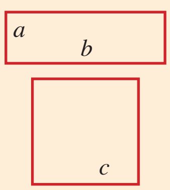
Médiété arithmétique

Une grandeur c est la moyenne arithmétique (médiété arithmétique) de deux grandeurs a et b, si ces trois grandeurs satisfont à la relation :

$$\frac{a-c}{c-b}=1.$$

En isolant c, dans cette proportion, on obtient la définition moderne de moyenne arithmétique :

$$c=\frac{a+b}{2}.$$



Médiété arithmétique

Côté du carré ayant même périmètre que le rectangle.

Géométriquement, la moyenne arithmétique est la longueur du côté du carré ayant même périmètre que le rectangle de côtés a et b.

Médiété géométrique

Une grandeur g est la moyenne géométrique (médiété géométrique) de deux grandeurs a et b, si ces trois grandeurs satisfont à la proportion :

$$\frac{a-g}{g-b}=\frac{a}{g} \quad \text{ou} \quad \frac{a-g}{g-b}=\frac{g}{b}.$$

En isolant g dans l'une ou l'autre de ces proportions, on obtient

$$g=\sqrt{ab}.$$

On en tire également la définition moderne de moyenne géométrique :

$$\frac{a}{g}=\frac{g}{b}.$$

La moyenne géométrique de a et b est représentée géométriquement par le côté du carré ayant même aire que le rectangle de côtés a et b.

Médiété harmonique

La moyenne harmonique h de deux grandeurs a et b est définie par la proportion suivante :

$$\frac{a-h}{h-b}=\frac{a}{b}.$$

En isolant h dans cette proportion, on obtient :

$$h=\frac{ab}{(a+b)/2}.$$

Les Pythagoriciens ont facilement vu que la médiété harmonique est le rapport de l'aire du rectangle sur le quart de son périmètre. On peut aussi la décrire en indiquant que la moyenne harmonique est le carré de la moyenne géométrique sur la moyenne arithmétique des grandeurs a et b.

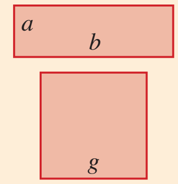
On peut également transformer l'égalité précédente pour obtenir la définition moderne de moyenne harmonique :

$$\frac{1}{h}=\frac{a+b}{2ab}=\frac{\dfrac{a+b}{ab}}{2}=\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{2}.$$

Cette dernière expression permet de dire que la moyenne harmonique de deux grandeurs a et b est la moyenne arithmétique des inverses multiplicatifs de ces grandeurs.

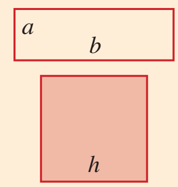
Les moyennes, qui étaient appelées médiétés, étaient toutes définies par des proportions. Les Pythagoriciens ont défini jusqu'à dix médiétés à cause de leur vénération de la Tetraktys. Ces médiétés étaient constructibles à la règle et au compas.

Signalons de plus que les proportions harmoniques sont présentes dans plusieurs domaines de la physique: l'optique, (miroirs et lentilles), l'électricité, l'hydrodynamique et la gravitation.



Médiété géométrique

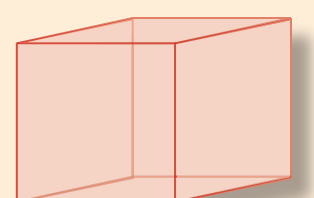
Côté du carré ayant même aire que le rectangle.



Médiété harmonique

Rapport de l'aire du rectangle sur le quart de son périmètre.

Moyenne harmonique dans le cube



Philolaos a découvert que le nombre de sommets d'un cube (8) est la moyenne harmonique entre son nombre de côtés (12) et son nombre de faces (6).