CHAPITRE 11

ONDES SINUSOÏDALES

Décrire un phénomène périodique à l'aide d'un modèle sinusoïdal et d'un vecteur de phase.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- Le calcul des paramètres d'un modèle sinusoïdal.
- L'utilisation des vecteurs géométriques dans la résolution de problèmes.
- L'exécution des opérations sur les vecteurs algébriques.
- L'utilisation des nombres complexes pour effectuer des opérations sur des ondes de même fréquence.

OBJECTIFS

11.1 Décrire algébriquement une sinusoïde dont le graphique est donné.

11.2 Représenter graphiquement une sinusoïde dont l'équation est donnée.

11.2 Modèle sinusoïdal

Un modèle sinusoïdal est un modèle obtenu par application des transformations élémentaires à la fonction sinus. En considérant que le modèle est la projection verticale d'un vecteur en rotation autour de l'origine, on décrit l'angle par rapport au temps t et la sinusoïde fondamentale est $f(t) = \sin t$.

Transformations du modèle sinusoïdal

La première transformation est l'étirement-compression vertical que l'on obtient en multipliant par un facteur A. On peut facilement visualiser l'effet de cette transformation en considérant que l'une des sinusoïdes est produite par la rotation d'un vecteur unitaire et l'autre sinusoïde la rotation à par un vecteur de longueur A ayant la même vitesse angulaire.

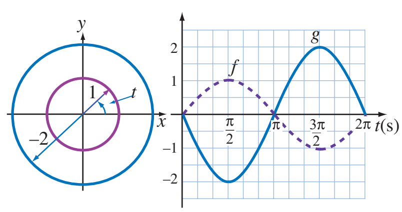
Amplitude

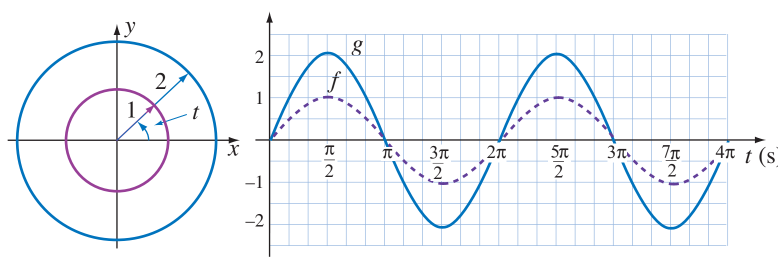
Soit deux rayons, l'un de longueur 1 et l'autre de longueur 2, en rotation autour de l'origine d'un système d'axes à une vitesse angulaire constante de 1 rad/s. Les modèles engendrés par la projection verticale des deux rayons sont

$$f(t) = \sin t \text{ et } g(t) = 2 \sin t,$$

et la représentation graphique de ces modèles est la suivante.

REMARQUE
Si le paramètre A est négatif, le vecteur est desens opposé et la sinusoïde subit une réflexion par rapport à l'axe horizontal.





Nous avons vu au chapitre 4 que l'amplitude d'une onde est la moitié de la différence des valeurs crête à crête. Dans l'exemple précédent, on constate que l'**amplitude** du modèle $g(t)$ est le double de celle de $f(t)$.

Amplitude

L'**amplitude** d'un modèle sinusoïdal est égale à la moitié de la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale du modèle. Dans un modèle vibratoire simple de la forme :

$$f(t) = A \sin (\omega t + \varphi),$$

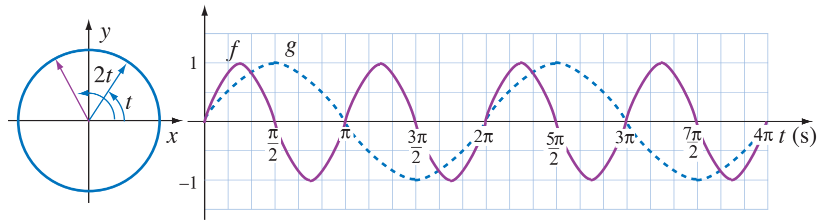
l'amplitude est donnée par le paramètre A.

Fréquence et période

Soit deux rayons unitaires en rotation uniforme autour de l'origine d'un système d'axes l'un ayant une vitesse angulaire de 1 rad/s et l'autre, une vitesse angulaire de 2 rad/s. Les modèles engendrés par la projection verticale des deux rayons sont

$$f(t) = \sin t \quad \text{et} \quad g(t) = \sin 2t,$$

et la représentation graphique de ces modèles la suivante.



Puisqu'un cycle correspond à un angle au centre de 2π rad et que la vitesse de rotation du deuxième rayon est de 2 rad/s, le temps qu'il met pour faire un tour est de π secondes ou 3,1416 s. On obtient donc la durée d'un cycle en divisant la longueur du cycle, soit 2π rad, par la vitesse angulaire. Cet intervalle de temps est la **période** de l'onde sinusoïdale.

Fréquence et période

Soit une onde sinusoïdale d'équation $g(t) = \sin(\omega t)$; la **fréquence** de cette onde est

$$f = \omega/2\pi.$$

Elle représente le nombre de tours par seconde qu'effectue le rayon décrivant l'onde sinusoïdale. L'unité de mesure de fréquence est le hertz (Hz).

La **période** de cette onde sinusoïdale est

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\omega/2\pi} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Elle représente le temps nécessaire pour effectuer un cycle complet. Son unité de mesure est la seconde (s).

REMARQUE

Mathématiquement, une fonction est dite **périodique** s'il existe un nombre réel positif T tel que $f(t+T) = f(t+T)$. Le plus petit nombre T pour lequel on a cette égalité est la **période** de f.

Les ondes sont décrites par des fonctiosn périodiques, les valeurs se répètent à un intervalle constant T.

La fréquence se mesure en cycles par seconde. Cependant, dans le SI, on omet le mot cycle, de sorte que l'unité est 1/s ou s^{-1}, et on l'appelle hertz (Hz).

La fréquence et la période d'une onde sont en relation inverse l'une de l'autre

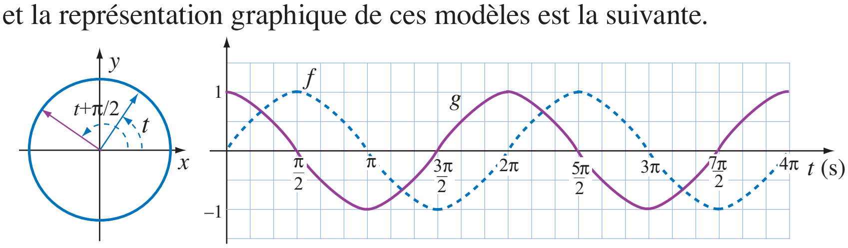
$$T = 1/f \quad \text{et} \quad f = 1/T.$$

Déphasage

Soit deux vecteurs unitaires en rotation uniforme autour de l'origine d'un système d'axes à une vitesse angulaire de 1 rad/s et supposons que l'un des vecteurs a commencé sa rotation π/2 s avant l'autre. Les modèles engendrés par la projection verticale de ces fonctions sont :

$$f(t) = \sin t \quad \text{et} \quad g(t) = \sin(t + \pi/2),$$

et la représentation graphique de ces modèles est la suivante.



Au temps $t = 0$, le rayon dont la projection verticale est décrite par $g(t)$ fait un angle de π/2 avec la partie positive de l'axe des x. Cet angle est appelé **angle de phase**. Un cycle du graphique de $\sin(\omega t + \varphi)$ débute lorsque $\omega t + \varphi = 0$, c'est-à-dire quand $\omega t = -\varphi$ et $t = -\varphi/\omega$ secondes. Cet durée est appelée le **déphasage** t_d de l'onde ou du modèle sinusoïdal. Le déphasage de la fonction g définie ci-dessus est de –π/2 s.

REMARQUE
Le déphasage est la longueur de l'intervalle de temps allant du début de la période du modèle $f(t) = \sin t$ au début de la période du modèle $g(t) = \sin(\omega t + \varphi)$.

Angle de phase et déphasage

Soit un modèle sinusoïdal $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. L'angle φ est appelé **angle de phase**, alors que le **déphasage** de l'onde sinusoïdale est $t = -\varphi/\omega$ s.

EXEMPLE 11.1.1

Soit les modèles sinusoïdaux

$$f(t) = \sin(2\pi t),\ g(t) = \sin(2\pi t + \pi/2) \text{ et } h(t) = \sin(2\pi t - \pi/2).$$

a) Déterminer l'angle de phase de chacun de ces modèles.

b) Déterminer le déphasage de chacun de ces modèles.

c) Déterminer l'amplitude, la période et la fréquence de chacun de ces modèles.

d) Esquisser le graphique de chacun de ces modèles sur un même système d'axes.

Solution

a) L'angle de phase est l'angle que le vecteur fait avec la direction positive de l'axe horizontal au temps 0. L'angle de phase de la fonction $f(t)$ est 0 rad, celui de la fonction $g(t)$ est $\pi/2$ rad et celui de la fonction h{t) est $-\pi/2$ rad.

b) Le déphasage de la fonction $f(t)$ est obtenu en posant $2\pi t = 0$ et en isolant t, ce qui donne

$$t_0 = \frac{0}{2\pi} = 0 \text{ s.}$$

Le déphasage de la fonction g(f) est obtenu en posant $2\pi t + \pi/2 = 0$ et en isolant t, ce qui donne

$$t_0 = \frac{-\pi/2}{2\pi} = -\frac{1}{4} \text{ s.}$$

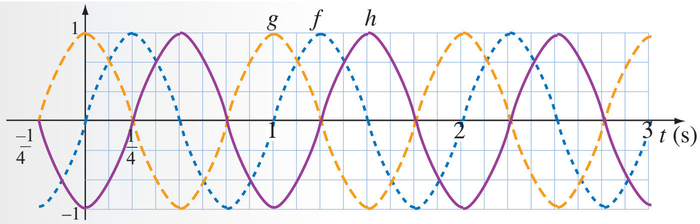
C'est donc dire que la fonction g commence son cycle 1/4 seconde avant la fonction $f(t)$. On dit que la fonction $g(t)$ est en avance de 1/4 seconde sur la fonction $f(t)$. Le déphasage de la fonction $h(t)$ est obtenu en posant $2\pi t - \pi/2 = 0$ et en isolant t, ce qui donne

$$t_0 = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4} \text{ s.}$$

C'est donc dire que la fonction $h(t)$ commence son cycle 1/4 seconde après la fonction $f(t)$. On dit que la fonction $h(t)$ est en retard de 1/4 seconde sur la fonction $f(t)$.

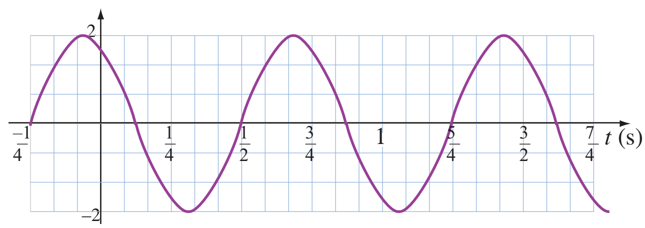
c) L'amplitude des trois fonctions est de 1 unité, leur période est $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ s et leur fréquence est $f = \frac{1}{T} = 1$ Hz.

d) La représentation graphique de ces modèles est la suivante.



EXEMPLE 11.1.2

Déterminer la période, la fréquence, le déphasage et l'amplitude ainsi que la règle de correspondance de la fonction dont la représentation graphique est donnée.



Solution

La fonction ayant un cycle complet durant l'intervalle de temps de –1/4 à 2/4, on en déduit la période et la fréquence,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{3}{4} \text{ s, d'où } \omega = \frac{8\pi}{3} \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{4}{3} \text{ Hz.}$$

L'amplitude est égale à 2 unités et le déphasage est

$$t = -\frac{\phi}{\omega} = -\frac{\phi}{8\pi/3} = -\frac{1}{4}, \text{ d'où } \phi = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} \text{ s.}$$

La fonction est donc $f(t) = 2\sin\left(\frac{8\pi t}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$.

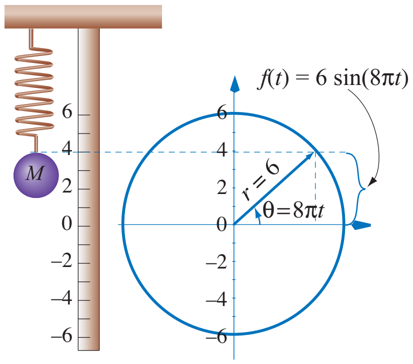
Un peu *d'histoire*

HEINRICH RUDOLPH HERTZ

1857-1894

Heinrich Rudolph Hertz (1857-1894) était un physicien allemand. Il a découvert les ondes électromagnétiques qui portent son nom et il a montré que ces ondes sont régies par les même lois que la lumière. Il a également découvert l'effet photoélectrique, établissant ainsi un lien important entre l'optique et l'électricité. Il a laissé son nom à l'unité de mesure de la fréquence, le hertz (Hz).

Il ne semble pas avoir été très convaincu de l'importance de sa découverte des ondes hertziennes, car il a déclaré : « Je suis persuadé que les ondes hertziennes ne serviront jamais à rien ». Heureusement, d'autres physiciens se sont intéressés à ces ondes. En 1890, le Français Edouard Branly (1844-1940) a inventé le « cohéreur » à limaille, composant principal des récepteurs de télégraphie sans fil. En 1896, l'italien Guglieimo Marconi (1874-1937), à l'âge de vingt-deux ans, construisit un poste de télégraphie sans fil à l'aide de l'« éclateur de Hertz », du « cohéreur de Branly » et de l'« antenne de Popov ».



Mouvements oscillatoires

Le montage illustré ci-contre est formé d'un ressort et d'une échelle graduée de telle sorte que le point 0 indique la position d'équilibre du ressort. Si l'on donne une impulsion à la masse M, celle-ci va osciller autour de la position d'équilibre du ressort. En supposant que les forces de frottement sont négligeables, on peut décrire le mouvement de la masse à l'aide d'un modèle sinusoïdal, en associant la position de la masse à la projection verticale d'un rayon en rotation autour de l'origine d'un système d'axes en faisant coïncider l'échelle graduée avec l'axe vertical. Le ressort est tour à tour étiré puis comprimé. Dans le cas où la masse oscille entre –6 dm et 6 dm et effectue quatre oscillations par seconde, $f = 4$ Hz et $\omega = 2\pi f = 8\pi$. La position de la masse M au temps t est décrite par le modèle sinusoïdal

$$f(t) = 6\sin(8\pi t)$$

où le membre de droite la projection sur l'axe vertical du rayon de longueur 6 en rotation à une vitesse de 8π rad/s.

EXEMPLE 11.1.3

Une masse M, suspendue à un ressort, oscille de –3 dm à 3 dm et elle effectue cinq oscillations complètes par seconde.

a) Quelle est la vitesse angulaire du rayon dont la projection sur l'axe vertical décrit la position de la masse en fonction du temps t ?

b) Déterminer les deux paramètres : la longueur et l'angle de phase du rayon en rotation autour de l'origine, dont la projection verticale décrit le mouvement du ressort si celui-ci est en position 3 au temps initial.

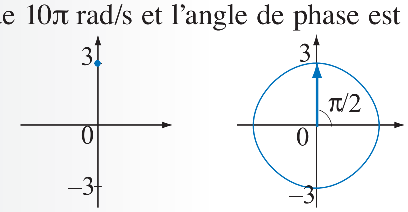
c) Calculer l'amplitude, la période, la fréquence et le déphasage, et tracer le graphique du modèle décrivant la position de la masse au temps t pour un intervalle d'une seconde.

Solution

a) Puisque la fréquence est de 5 oscillations par seconde, la vitesse angulaire est égale à

$$5 \times 2\pi = 10\pi \text{ rad/s.}$$

b) L'amplitude étant de 3 dm, la longueur du rayon est 3. La vitesse angulaire est de 10π rad/s et l'angle de phase est de $\pi/2$ rad.



c) La fonction donnant la position de la masse au temps t est la projection du rayon sur l'axe vertical. Cette fonction est définie par

$$f(t) = 3\sin(10\pi t + \pi/2).$$

Son amplitude est de 3 dm et sa période est égale à

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5} \text{ s.}$$

REMARQUE

Pour décrire un phénomène physique assez simple, il faut souvent utiliser une combinaison de modèles simples. Ainsi,

$$y = f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

est une **fonction composée.** Elle résulte de la combinaison de la règle $y = \sin x$ et de la règle affine

$$x = \omega t + \varphi.$$

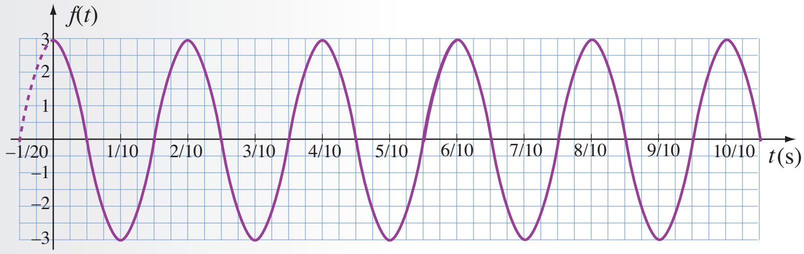
De plus, si $\varphi = \pi/2$, on peut utiliser les propriétés des fonctions trigonométriques et

$$y = A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Sa fréquence est de 5 Hz et son déphasage est l'instant t tel que

$$10\pi t + \pi/2 = 0$$

c'est-à-dire $t = -1/20$ s. La représentation graphique de cette fonction est la suivante.



PROCÉDURE

Description symbolique du graphique d'une sinusoïde

1. Repérer sur le graphique l'instant t_1 du début et l'instant t_2 de la fin du premier cycle.
2. Calculer la période, $T = t_2 - t_1$.
3. Déterminer la fréquence, $f = 1/T$, et la vitesse $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.
4. Déterminer l'angle de phase φ (en posant $\omega t_1 + \varphi = 0$).
5. Déterminer l'amplitude, $A = (V_{max} - V_{min})/2$.
6. Écrire le modèle mathématique $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$.

PROCÉDURE

Représentation graphique d'une sinusoïde

Soit $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$.

1. Calculer le déphasage t en posant $\omega t + \varphi = 0$.
2. Calculer la période, $T = 2\pi/\omega$.
3. Déterminer la fréquence $f = 1/T = \omega/2\pi$.
4. Tracer le graphique d'une sinusoïde.
5. Graduer l'axe horizontal et positionne l'axe vertical en tenant compte du déphasage et de la période.
6. Déterminer l'amplitude et graduer l'axe vertical en tenant compte de l'amplitude.

Ondes sinusoïdales

La lumière visible, les rayons infrarouges, les rayons ultraviolets et les sons se déplacent dans l'espace sous forme d'ondes. Trois paramètres caractérisent une onde : la longueur d'onde, la fréquence et la vitesse.

Longueur d'onde

La **longueur d'onde**, représentée par la lettre grecque λ (lambda), est la distance entre deux crêtes consécutives de l'onde. Elle se mesure en mètres (m).

REMARQUE

La vitesse de propagation d'un son est de 336 m/s et la vitesse de propagation de la lumière est de

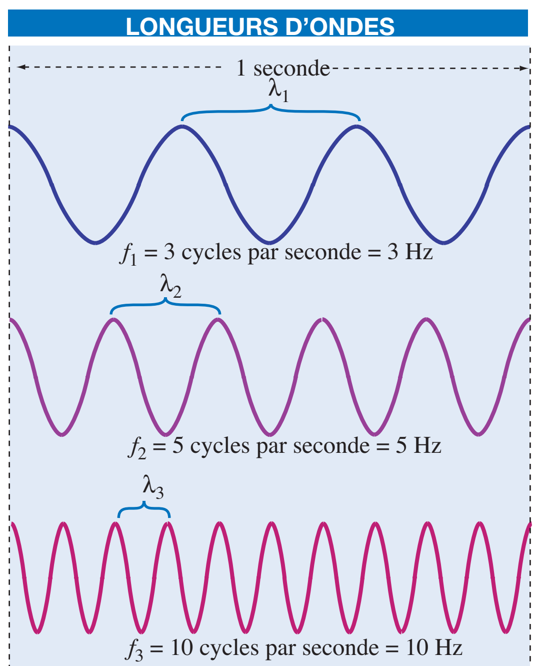
$$2{,}997\,9 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

Soit une onde dont la fréquence est de f cycles par seconde (f Hz) et dont la longueur d'onde est de λ m. Les f cycles parcourus en une seconde ont une longueur totale de $f\lambda$ m. L'onde parcourt donc $f\lambda$ m/s. C'est sa vitesse de propagation

$$v = f\lambda$$

où f est la fréquence en hertz (Hz), λ est la longueur d'onde en mètres (m) et v est la vitesse de propagation en mètres par seconde (m/s).

Dans l'illustration suivante, les trois ondes ont la même vitesse, mais des longueurs d'onde et des fréquences différentes.



REMARQUE

Si des ondes se déplaçant à un même vitesse, la relation entre leur longueur d'onde et leur fréquence en est une de proportionnalité inverse.

REMARQUE

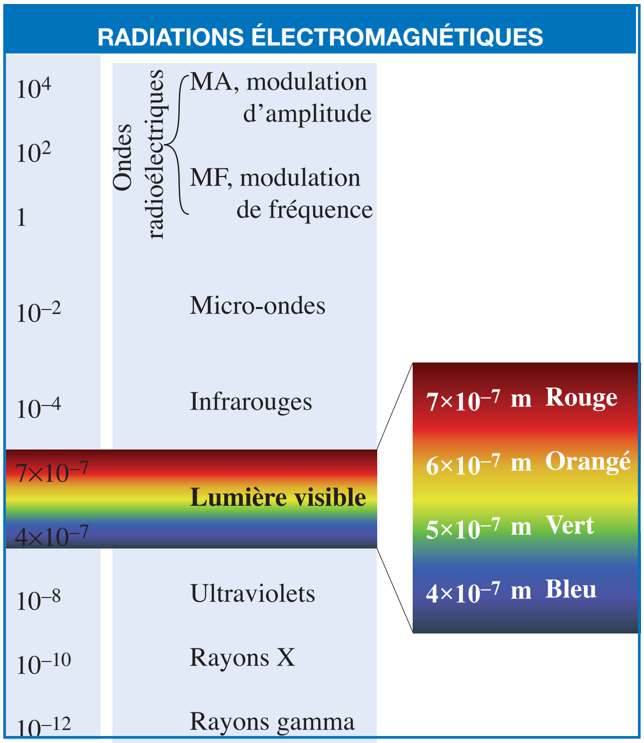
Les ondes peuvent représenter une tension ou un courant associé à une propagation d'énergie comme les ondes sonores ou les ondes radios. Dans ces cas, l'axe horizontal est parfois gradué à l'aide d'une unité de distance. La distance parcourue par l'onde durant un cycle complet est appelée la longueur d'onde. Le symbole de la longueur d'onde est λ (lambda) et l'unité de mesure de la longueur d'onde est le mètre.

Radiation électromagnétique

La radiation électromagnétique est l'une des formes de déplacement de l'énergie dans l'espace. Ce type de radiation est une onde qui se déplace à la vitesse de la lumière. On désigne sa vitesse par la lettre c et sa fréquence par la lettre grecque ν (nu)

$$\lambda\nu = c.$$

La lumière visible, l'énergie solaire, les ondes radio font partie des radiations électromagnétiques. Le spectre de ces ondes est donné dans la figure suivante.



EXEMPLE 11.1.4

Déterminer la fréquence d'une lumière rouge dont la longueur d'onde est de 650 nm.

Solution

On connaît la vitesse, c'est celle de la lumière, c = 2,9979 × 10^8 m/s. On peut déterminer la fréquence ν puisqu'on connaît aussi la longueur d'onde λ :

$$\lambda\nu = c.$$

Il faut d'abord exprimer la longueur d'onde en mètres. Puisque $\lambda = 650$ nm, alors

$$\lambda = 6{,}50 \times 10^2 \text{ nm} \times \frac{1 \text{ m}}{10^9 \text{ nm}} = 6{,}50 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

En isolant ν et en remplaçant c et λ par leurs valeurs, on obtient

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{2{,}997\,9 \times 10^8 \text{ m/s}}{6{,}50 \times 10^{-7} \text{ m}} = 0{,}461\,21 \ldots \times 10^{15}.$$

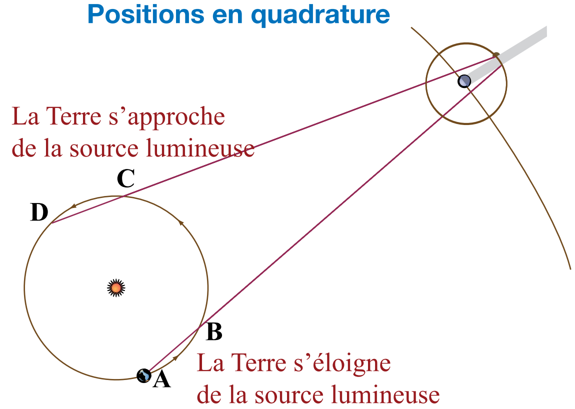
La fréquence de la lumière rouge est de 4,61 × 10^{14} Hz, si on arrondit à trois chiffres significatifs.

Un peu *d'histoire*

VITESSE DE LA LUMIÈRE

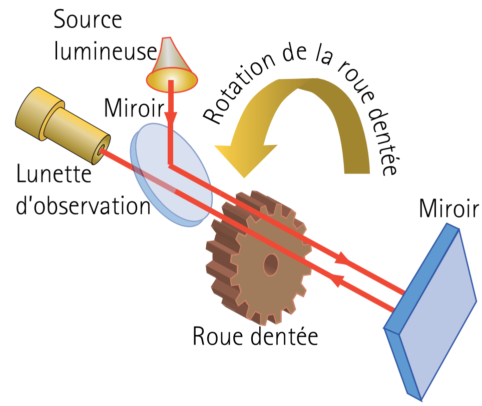
Aristote (NH Aristote01) croyait que la lumière se propageait instantanément et tous les savants, jusqu'à Galilée, partageaient cette conviction (NH Galilée01). Galilée est le premier savant à douter de la validité de cette croyance. Il a tenté de démontrer expérimentalement que la vitesse de la lumière est finie. L'expérience consistait à placer en des lieux élevés deux hommes munis chacun d'une lanterne masquées par un écran. Le premier découvre sa lanterne et déclenche en même temps un mécanisme de mesure du temps. Le second découvre sa lanterne dès qu'il aperçoit la lumière de l'autre et le premier arrête son horloge dès qu'il aperçoit la lumière du second. Cette expérience n'a pas donné de résultats concluants à cause, d'une part, le temps de réaction des expérimentateurs et d'autres part, les mécanismes de mesure du temps de l'époque qui n'avaient pas la précision nécessaire pour mesurer des durées aussi petites.

En 1676, l'astronome danois Ole Christensen Rømer travaillant à l'observatoire de Paris étudie les éclipses du satellite Io de Jupiter (NH Rømer, Lumière, Rømer). Lorsque Io est dans le cône d'ombre de Jupiter, elle n'est pas visible de la Terre. La période de révolution du satellite sur son orbite est le temps écoulé entre deux immersions ou deux émersions consécutives de Io de la zone d'ombre de Jupiter. En se servant de cette observation, Rømer en déduit que la lumière prend un peu plus de 16 minutes pour parcourir le diamètre de l'orbite terrestre. Rømer ne calcule pas la vitesse de la lumière, mais il démontre pour la première fois que cette vitesse est finie[1].

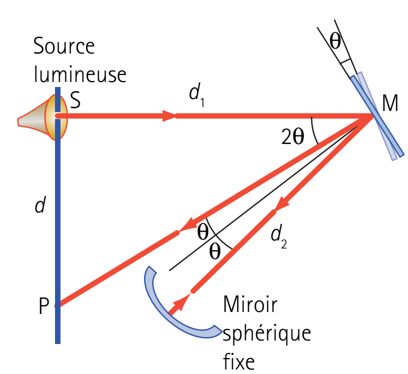


Principe des observations de Rømer

L'expérience de Rømer sur la vitesse de la lumière se fondait sur des observations astronomiques et montrait que la vitesse de la lumière est finie. Mais quelle est cette vitesse ? Peut-on réaliser des expériences permettant de calculer précisément cette vitesse sans avoir recours aux observations astronomiques ? Au début du XIX^e siècle, deux expériences furent réalisées sur Terre pour calculer cette vitesse. L'une par Louis Hyppolite Fizeau (NH Fizeau, Lumière, Fizeau).



L'autre expérience fut réalisée par Léon Foucault (NH Foucault01, Lumière, Foucault). De plus, Foucault a répété son expérience dans l'eau, ce qui a démontré que la vitesse de la lumière est différente dans l'air et dans l'eau. On doit également à Foucault une expérience démontrant la rotation de la Terre à l'aide d'un pendule (NH Foucault02).



Principe des observations de Foucault

1. Pour bien comprendre les principes des procédés utilisés pour mesurer la vitesse de la lumière, il faut visionner les vidéos.

11.2 Exercices

1. L'amplitude d'une sinusoïde est de 3,5 et sa fréquence de 50 Hz.
   a) Déterminer sa période.
   b) Déterminer le temps nécessaire pour effectuer cinq cycles.
   c) Déterminer sa vitesse angulaire sous forme d'un multiple de π.
   d) Donner l'équation de cette sinusoïde.

2. L'équation d'une sinusoïde est

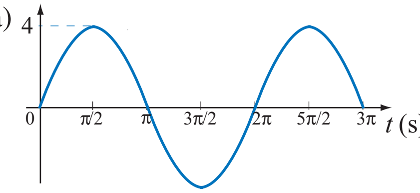
$$g(t) = 25 \sin(40\pi t + \pi/4).$$

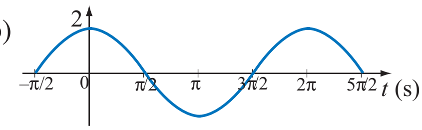
   a) Déterminer son amplitude.
   b) Déterminer sa fréquence.
   c) Déterminer le temps nécessaire pour effectuer 4 cycles.
   d) Indiquer si la sinusoïde est en avance ou en retard de phase par rapport à $f(t) = 25 \sin(40\pi t)$ et calculer son déphasage.

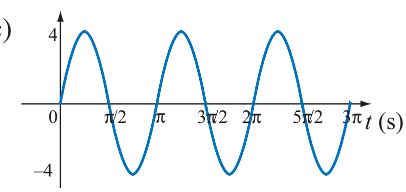
3. Déterminer le vecteur de phase associé à chacune des sinusoïdes suivantes.
   a) $f(t) = 25 \sin(40\pi t - \pi/3)$
   b) $f(t) = 60 \sin(120\pi t + 7\pi/2)$

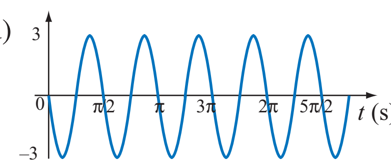
4. Représenter graphiquement les modèles sinusoïdaux suivants.
   a) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 0{,}5 \sin t$
   b) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = \sin 2t$
   c) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 3 \sin t$
   d) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 2 \sin \pi t$
   e) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = \sin(t + \pi/2)$
   f) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 2{,}5 \sin(t + \pi/2)$
   g) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 2 \sin(t - \pi/2)$
   h) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 2 \sin 2t$
   i) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 2 \sin(2t - 3)$
   j) $f(t) = \sin t$ et $g(t) = 2 \sin(2t - 1)$

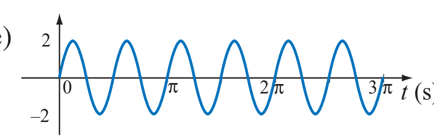
5. Déterminer la vitesse angulaire, l'angle de phase, la période, la fréquence, le déphasage et l'amplitude ainsi que la règle de correspondance des fonctions dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

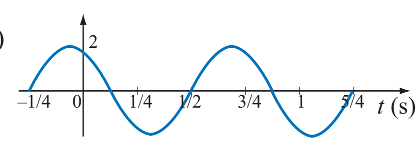
a)


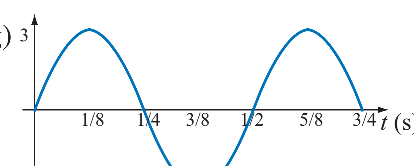
b)


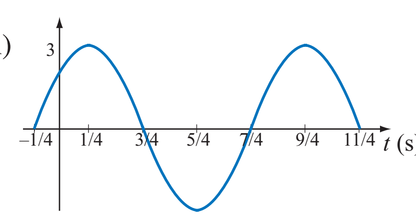
c)


d)


e)


f)


g)


h)


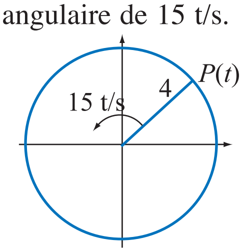
6. Dans un feu d'artifice, on obtient une couleur bleue en chauffant du chlorure de cuivre (CuCl) à environ 1 200°C. Le composé émet alors de la lumière bleue dont la longueur d'onde est de 450 nm.
   a) Calculer la fréquence de cette lumière.
   b) Les travaux de Max Planck (1858-1947) ont montré que l'énergie émise ou absorbée par la matière est un multiple entier de $h\nu$ où h est la constante de Planck, dont la valeur expérimentale est $6{,}626 \times 10^{-34}$ J·s et ν est la fréquence de la radiation électromagnétique émise ou absorbée. La variation d'énergie est donc
   $$\Delta E = nh\nu$$
   où n est un nombre entier de quanta d'énergie. Déterminer l'énergie d'un quantum émis par CuCl.

7. Le laser d'un lecteur de disque compact utilise une lumière de 780 nm de longueur d'onde.
   a) Quelle est la fréquence de cette lumière?
   b) Quel est l'énergie d'un photon (quantum d'énergie) de cette lumière?

8. Une station de radio MF émet à 102,3 MHz. Quelle est la longueur d'onde de ces ondes radioélectriques?

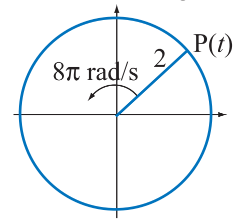
9. Le mercure émet de la lumière visible dont la longueur d'onde est soit de 407,7 nm soit de 435,8 nm. Calculer l'énergie d'un seul photon et d'une mole de photons de lumière pour chacune de ces longueurs d'onde.

10. Un vecteur de longueur 4 est en mouvement circulaire autour de l'origine d'un système d'axes à une vitesse angulaire de 15 t/s.



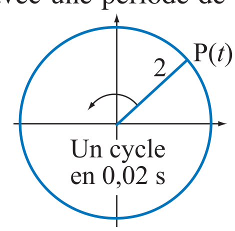
   a) Déterminer la fréquence de ce mouvement.
   b) Déterminer la période de ce mouvement.
   c) Calculer la vitesse angulaire en radians par seconde.
   d) Exprimer la hauteur du point P en fonction du temps t si la hauteur initiale est 0.
   e) Calculer la hauteur du point P à 1/60 s.

11. Un vecteur de longueur 2 est en mouvement circulaire à une vitesse angulaire de 8π rad/s.



   a) Déterminer la fréquence de ce mouvement.
   b) Déterminer la période de ce mouvement
   c) Calculer la vitesse angulaire en tours par seconde.
   d) Exprimer la hauteur du point P en fonction du temps t si l'angle de phase est $\pi/2$ rad.
   e) Calculer la hauteur du point P à 1/32 s.

12. Un vecteur de longueur 6 est en mouvement circulaire avec une période de 0,02 s.



   a) Déterminer la fréquence de ce mouvement.
   b) Déterminer la vitesse angulaire en radians par seconde.
   c) Exprimer la position du vecteur en fonction du temps t si l'angle de phase est $-\pi/2$ rad.
   d) Calculer la position du vecteur à 1/200 s.

13. La position d'un vecteur en mouvement circulaire est décrite par $f(t) = 6 \sin(6\pi t - \pi/2)$
   a) Déterminer l'amplitude du mouvement vertical.
   b) Déterminer la période et la fréquence de ce mouvement.
   c) Déterminer la vitesse angulaire en radians par seconde.
   d) Trouver l'angle de phase de ce mouvement.

14. Une masse M suspendue à un ressort oscille de –4 dm à 4 dm en effectuant cinq oscillations complètes par seconde.
    a) Quelle est la vitesse angulaire du vecteur dont la projection sur l'axe vertical décrit la position de la masse en fonction du temps t ?
    b) Donner les paramètres: longueur et angle de phase du vecteur en rotation autour de l'origine, dont la projection verticale décrit le mouvement du ressort si celui-ci est en position 4 au temps initial.
    c) Donner l'amplitude, la période, la fréquence et le déphasage et tracer le graphique du modèle décrivant la position de la masse au temps t.

15. Une masse M suspendue à un ressort oscille de –5 dm à 5 dm en effectuant huit oscillations complètes par seconde.
    a) Quelle est la vitesse angulaire du vecteur dont la projection sur l'axe vertical décrit la position de la masse en fonction du temps t ?
    b) Donner les paramètres: longueur et angle de phase du vecteur en rotation autour de l'origine, dont la projection verticale décrit le mouvement du ressort si celui-ci est en position 0 au temps initial et se déplace vers le haut.
    c) Donner l'amplitude, la période, la fréquence et le déphasage et tracer le graphique du modèle décrivant la position de la masse au temps t.

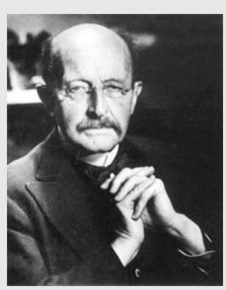
16. Déterminer la fréquence d'une lumière bleue dont la longueur d'onde est de 420 nm.

17. Donner l'angle de phase et le vecteur de phase du courant sinusoïdal donné.
    a) $i(t) = 0{,}5\sin(377t + \pi/3)$ A
    b) $i(t) = 2{,}5\sin(80\pi t + \pi/2)$ A.

Un peu *d'histoire*

MAX PLANCK

1858-1947



Max Planck était un physicien allemand. Durant ses études à l'université de Munich, il envisagea d'entreprendre une carrière en physique mais son professeur lui dit que la physique était une science complète dans laquelle on ne pouvait espérer faire de nouvelles découvertes, tout ayant déjà été découvert. Malgré cet avis défavorable, Planck persévéra et partit étudier à Berlin, où il eut Helmholtz et Kirchhoff comme professeurs. Il retourna à Munich en 1880 et reçut son doctorat en 1880, à 21 ans, pour une thèse sur la deuxième loi de la thermodynamique. Il y enseigna jusqu'en 1885, après quoi il occupa pendant quatre ans une chaire à Kiel, pour ensuite succéder à Kirchhoff à Berlin, en 1889. Il occupa cette chaire jusqu'en 1925.

C'est en 1900 qu'il annonça sa découverte de la formule maintenant appelée **formule de radiation de Planck.** En deux mois, il déduisit la théorie des quanta. Il avait observé, c'est que la matière ne peut émettre ni absorber une quantité quelconque d'énergie. Cela l'amena à supposer que l'énergie n'était transférée que par quantités qui sont des multiples entiers d'une quantité $h\nu$ où $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J·s est une constante et ν est la fréquence de la radiation électromagnétique absorbée ou émise.

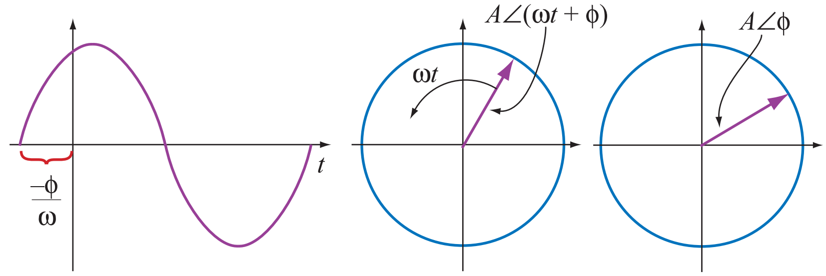
Au début, la théorie rencontra de la résistance, mais les travaux de Niels Bohr, qui calcula les positions des lignes spectrales en se basant sur la théorie des quanta, contribuèrent à la faire accepter.

11.3 Tension et courant sinusoïdaux

Dans l'analyse d'un circuit à courant alternatif sinusoïdal, l'information sur l'amplitude et l'angle de phase de la tension et du courant sont décrits par des vecteurs de phase en rotation autour de l'origine d'un système d'axes. Les vecteurs de phase sont des vecteurs complexes, et en effectuant sur ces vecteurs les opérations définies sur les nombres complexes, on peut déterminer le vecteur de phase décrivant la somme des sinusoïdes des tensions ou des courants. On peut ainsi effectuer la somme de tensions sinusoïdales ou de courants sinusoïdaux.

Onde sinusoïdale et vecteur

Les renseignements importants pour effectuer des opérations sur les sinusoïdes de même fréquence sont le module et l'angle de phase, c'est-à-dire l'angle que le vecteur fait avec l'axe horizontal au temps 0. C'est pourquoi il est d'usage d'utiliser pour fins de calcul un vecteur sous forme polaire ne véhiculant que ces informations. Ce vecteur est appelé **vecteur de phase** et noté I_0 ou V_0 selon qu'il s'agit d'un courant ou d'une tension.



Onde sinusoïdale $v(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ — Vecteur générateur $V(t) = A\angle(\omega t + \phi)$ — Vecteur de phase $V_0 = A\angle\,\phi$

REMARQUE

L'angle de phase d'un vecteur complexe est toujours compris entre $-\pi$ et π et en effectuant la somme de sinusoïdes, on peut avoir à modifier la somme des angles de phase en ajoutant ou en retranchant des multiples de 2π.

Vecteur de phase

Soit z un vecteur complexe en rotation autour de l'origine à une vitesse constante ω. On appelle **vecteur de phase** la forme polaire du vecteur complexe à $t = 0$. Le module du vecteur de phase décrit l'amplitude de l'onde sinusoïdale engendrée et la direction ϕ du vecteur complexe est l'angle de phase.

Notations

Si la tension sinusoïdale aux bornes d'une source est $e(t) = A\sin(\omega t + \phi)$, le vecteur de phase véhiculant l'information sur l'amplitude et l'angle de phase au temps 0 est noté $E_0 = A\angle\varphi$.

Le vecteur de phase d'une tension sinusoïdale aux bornes d'une composante est noté $v(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ et son vecteur de phase est noté $V_0 = A\angle\varphi$.

Le vecteur de phase d'un courant sinusoïdal est noté $i(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ et son vecteur de phase est noté $I_0 = A\angle\varphi$.

Dans les cas où il y a plusieurs tensions ou plusieurs courants de même fréquence, disons

$$v_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \text{ et } v_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi_2),$$

on distingue les vecteurs de phase en les notant

$$V_{10} = A_1\angle\varphi_1 \text{ et } V_{20} = A_2\angle\varphi_2.$$

Déphasage d'un circuit ou d'une composante

Dans un circuit ou une composante d'un circuit, l'angle entre le vecteur tension et le vecteur courant est appelé **angle de déphasage du circuit ou de la composante**. L'intervalle de temps pour que les vecteurs parcourent l'angle de déphasage est appelé le **déphasage du circuit ou de la composante**.

REMARQUE

C'est toujours la tension qui sert de référence pour définir le déphasage et l'angle de déphasage. En pratique, puisque les sinusoïdes ont même fréquence, on peut déterminer l'angle de déphasage en faisant la différence entre l'angle de phase du vecteur tension et l'angle de phase du vecteur courant.

EXEMPLE 11.3.1

La tension appliquée à un circuit est décrite par

$$v(t) = 60 \sin(20\pi t) \text{ V}$$

et le courant total est décrit par

$$i(t) = 4 \sin(20\pi t - \pi/6) \text{ A}.$$

Trouver l'angle de déphasage et le déphasage entre la tension et le courant.

Solution

L'angle de phase de la tension est de 0 rad et l'angle de phase du courant est de $-\pi/6$ rad. La différence de phase est alors

$$0 \text{ rad} - (-\pi/6) \text{ rad} = \pi/6 \text{ rad}.$$

L'angle de déphasage est donc de $\pi/6$ radians. Le déphasage est le temps nécessaire pour parcourir cet angle de $\pi/6$ radians. Puisque la vitesse angulaire est de $20\pi t$ rad/s, le déphasage est

$$t = \frac{\pi/6 \text{ rad}}{20\pi \text{ rad/s}} = \frac{1}{120} \text{ s}.$$

Addition de vecteurs de phase

Le vecteur de phase est essentiellement un nombre complexe et les opérations sur les vecteurs de phase s'effectuent de la même façon que sur les nombres complexes.

En additionnant des ondes sinusoïdales de même fréquence, on obtient une nouvelle onde sinusoïdale dont la fréquence est la même que celle des ondes additionnées. Pour effectuer une telle somme, on tire profit de la description de ces ondes par des vecteurs de phase. En exprimant les vecteurs sous forme rectangulaire, on peut en effectuer la somme et les caractéristiques du vecteur résultant (amplitude et angle de phase) sont les caractéristiques de la sinusoïde résultante.

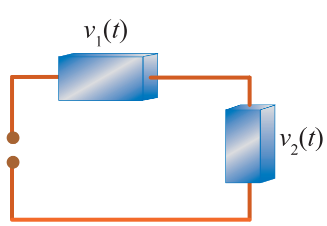
REMARQUE
Pour mettre en évidence le déphasage entre les ondes présentes dans un même circuit, il est d'usage de graduer l'axe horizontal en multiples de la pulsation ω. On représente alors par ωt la graduation de l'axe horizontal.

PROCÉDURE

Addition de sinusoïdes de même fréquence

1. Déterminer le vecteur de phase de chacune des sinusoïdes (vecteurs au temps 0)
$$V_1 = A_1\angle\phi_1 \text{ et } V_2 = A_2\angle\phi_2.$$
2. Exprimer les vecteurs de phase sous forme rectangulaire.
$$V_1 = A_1(\cos\phi_1 + j\sin\phi_1) \text{ et } V_2 = A_1(\cos\phi_2 + j\sin\phi_2)$$
3. Additionner les vecteurs de phase sous forme rectangulaire,
$$V = V_1 + V_2 = a + jb.$$
4. Exprimer le vecteur somme sous forme polaire, $V_1 = A_1\angle\phi_1$, où
$$A = \sqrt{a^2+b^2},\ \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \text{ et } \phi = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha > 0 \\ \alpha \pm \pi & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$
5. Déterminer le vecteur générateur de la somme des sinusoïdes et la somme elle-même.
$$V(t) = A\angle(\omega t + \phi) \text{ et } v(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$
Le module du vecteur somme est l'amplitude de la somme des sinusoïdes.
L'argument du vecteur somme est l'angle de phase de la somme des sinusoïdes.
La fréquence demeure la même.

EXEMPLE 11.3.2



Dans le circuit illustré ci-contre, les tensions aux bornes des composantes sont décrites en fonction du temps par
$$v_1(t) = 3\sin(120\pi t) \text{ et } v_2(t) = 5\sin(120\pi t + \pi/3).$$
Déterminer $e(t)$, la tension appliquée au circuit. Esquisser le graphique de ces trois fonctions.

Solution

Par la loi des tensions de Kirchhoff, la tension à la source est égale à la somme des tensions aux bornes des composantes. Le vecteur de phase décrivant la tension à la source est la somme des vecteurs de phase décrivant la tension aux bornes des composantes. Les vecteurs de phase des tensions aux bornes des composantes sont respectivement
$$V_{10} = 3\angle 0 \text{ et } V_{20} = 5\angle\pi/3.$$
Pour additionner ces vecteurs, on les écrit sous forme rectangulaire,
$$E_0 = V_{10} + V_{20} = 3(\cos 0 + j\sin 0) + 5(\cos\pi/3 + j\sin\pi/3) = 5{,}5 + j4{,}33.$$
Pour déterminer l'amplitude et l'angle de phase, on doit exprimer le vecteur somme E_0 sous forme polaire. Le module est
$$\|E_0\| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5{,}5^2 + 4{,}33^2} = 6{,}999\ 921\ \ldots$$
et l'argument
$$\phi = \arctan\left(\frac{4{,}33}{5{,}5}\right) = 38{,}21°,\ \text{car } a > 0.$$

Le vecteur de phase de la somme des tensions est donc

$$E_0 = V_{10} + V_{20} = 7\angle 38.21\ °.$$

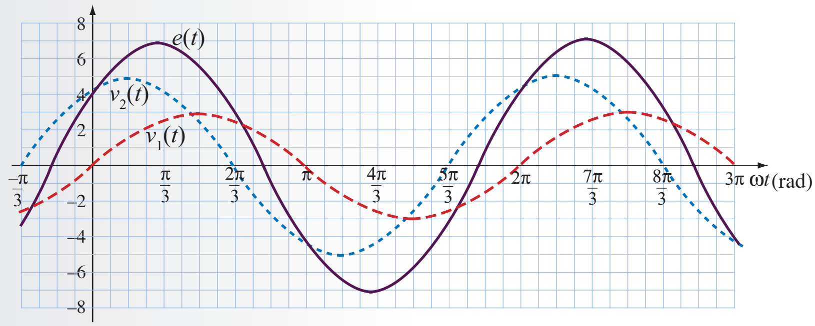
Le vecteur en rotation est

$$E(t) = 7\angle(120\pi t + 38{,}21°)$$

dont la projection verticale est la fonction décrivant la tension sinusoïdale, soit

$$e(t) = 7\sin(120\pi t + 38{,}21°)$$

La représentation graphique de ces tensions est la suivante



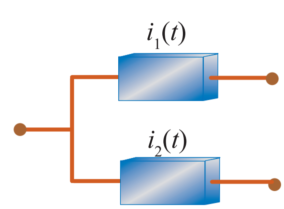
En additionnant les deux sinusoïdes de l'exercice précédent, on a simplement appliqué la loi des tensions de Kirchhoff. De la même façon, on peut appliquer la loi des courants de Kirchhoff lorsque les composantes sont en parallèle. Le courant d'entrée dans le nœud est égal à la somme des courants de sortie. Puisqu'il s'agit de sinusoïdes de même fréquence, on procède avec les vecteurs de phase pour trouver le vecteur de phase du courant d'entrée. Connaissant ce vecteur de phase, on connaît la sinusoïde décrivant le courant d'entrée.

EXEMPLE 11.3.3

Dans le circuit illustré ci-contre, les courants dans les composantes sont décrits en fonction du temps par

$$i_1(t) = 0{,}2\sin(120\pi t + \pi/6) \text{ et } i_2(t) = 0{,}4\sin(120\pi t + \pi/3).$$

Déterminer le courant d'entrée et esquisser le graphique des fonctions.



Solution

Par la loi des courants de Kirchhoff, le courant à l'entrée est égal à la somme des courants dans les composantes. Le vecteur de phase décrivant le courant d'entrée est alors la somme des vecteurs de phase décrivant les courants dans les composantes. Les vecteurs de phase des courants dans les composantes sont respectivement

$$I_{10} = 0{,}2\angle\pi/6 \text{ et } I_{20} = 0{,}4\angle\pi/3.$$

d'où

$$\begin{aligned} I_0 = I_{10} + I_{20} &= 0{,}2(\cos\pi/6 + j\sin\pi/6) + 0{,}4(\cos\pi/3 + j\sin\pi/3) \\ &= 0{,}3732 + j0{,}4464. \end{aligned}$$

Pour déterminer l'amplitude et l'angle de phase, on doit exprimer le vecteur somme sous forme polaire. Le module est

$$\|I_0\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0,3732^2 + 0,4464^2} = 0,581\ 851\ \ldots$$

et l'argument est

$$\phi = \arctan\left(\frac{0,4464}{0,3732}\right) = 50,10°,\ \text{car } a > 0.$$

Le vecteur de phase de la somme des courants est donc

$$I_0 = 0,582\angle 50,10°.$$

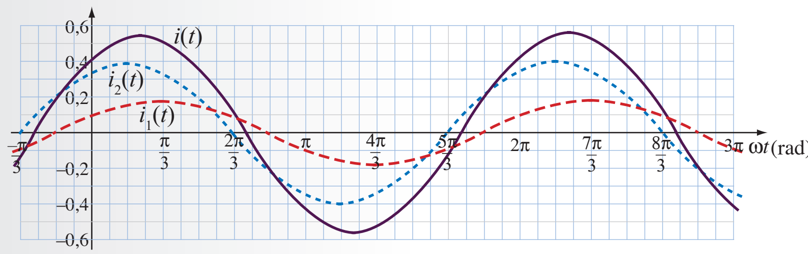
Le vecteur en rotation est

$$I(t) = 0,582\angle(120\pi t + 50,10°).$$

dont la projection verticale est la fonction décrivant le courant sinusoïdale, soit

$$i(t) = 0,582\ \sin(120\pi t + 50,10°).$$

La représentation graphique des fonctions est la suivante.



Impédance

Les vecteurs de phase sont un outil efficace pour déterminer la somme des tensions ou de courants mais ce n'est pas la seule application de ces vecteurs. Ils permettent également de généraliser la loi d'Ohm pour les circuits en régime alternatif. Dans l'étude du courant continu, la résistance est une des caractéristiques d'un circuit. On sait par la loi d'Ohm que, dans certaines conditions, la résistance est donnée par le rapport de la tension sur le courant, soit

$$R = V/I.$$

En courant alternatif, on ne peut procéder de cette façon car la tension et le courant sont décrits par des sinusoïdes et il n'y a pas de règle pour simplifier un quotient de sinusoïdes. De plus, la tension et le courant ne sont pas nécessairement en phase. Cependant, on peut effectuer le quotient des vecteurs de phase associés à ces sinusoïdes; ce quotient donne un nombre complexe dont le module est le rapport de la tension maximum sur le courant maximum et dont l'argument est l'angle de déphasage du circuit. Ce nombre complexe est appelé **impédance** du circuit et l'inverse multiplicatif de l'impédance s'appelle l'admittance.

Impédance et admittance

L'**impédance** d'un circuit, notée Z**,** est définie par le quotient

$$Z = \frac{E_0}{I_0},$$

où E_0 est le vecteur de phase de la tension appliquée au circuit et I_0 est le vecteur de phase du courant total dans le circuit. De la même façon, l'impédance d'une composante est le rapport du vecteur de phase de la tension aux bornes de cette composante sur le vecteur de phase du courant circulant dans la composante. L'inverse multiplicatif de l'impédance est l'**admittance**; elle est notée Y, et définie par

$$Y = 1/Z.$$

EXEMPLE 11.3.4

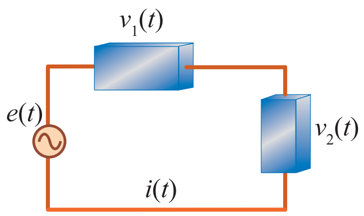
Calculer l'impédance du circuit illustré ci-contre, sachant que la tension appliquée est décrite par

$$e(t) = 60 \sin(120\pi t) \text{ V}$$

et que le courant est décrit par

$$i(t) = 15 \sin(1207\pi t - \pi/6) \text{ A}.$$

Donner la signification des paramètres de l'impédance et calculer le déphasage du circuit.



Solution

La tension est décrite par la projection verticale du vecteur

$$E(t) = 60\angle 120\pi t.$$

Le vecteur de phase de la tension est $E_0 = 60\angle 0$.

Le courant est décrit par la projection verticale du vecteur

$$I(t) = 15\angle(120\pi t - \pi/6).$$

Le vecteur de phase du courant est $I_0 = 15\angle(-\pi/6)$

L'impédance est le rapport des vecteurs de phase, soit

$$Z = \frac{E_0}{I_0} = \frac{60\angle 0}{15\angle(-\pi/6)} = 4\angle \pi/6.$$

Ce vecteur complexe indique que le rapport de la tension maximum sur le courant maximum est de 4 Ω et que l'angle de déphasage est de $\pi/6$ rad ou 30°. Puisque la vitesse angulaire est de $120\pi t$ rad/s, le temps nécessaire pour parcourir un angle de $\pi/6$ rad est la valeur de t telle que

$$t = \frac{\pi/6 \text{ rad}}{120\pi \text{ rad/s}} = \frac{1}{720} \text{ s}.$$

Le déphasage du circuit est donc de 1/720 s.

Puisque l'impédance est la généralisation de la loi d'Ohm aux circuits en régime alternatif, on peut déterminer le courant lorsqu'on connaît la tension et l'impédance du circuit puisqu'on isolant I_0 dans $Z = E_0/I_0$, on obtient

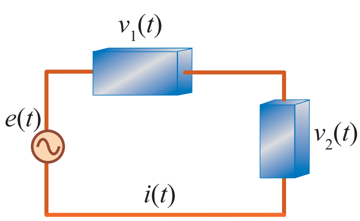
$$I_0 = E_0/Z.$$

On peut également calculer la tension en connaissant le courant et l'impédance puisqu'on isolant E_0 obtient

$$E_0 = ZI_0.$$

Dans ces calculs, l'impédance est un nombre complexe sous forme polaire; la tension et le courant sont représentés par leur vecteur de phase respectif.

EXEMPLE 11.3.5



L'impédance d'un circuit est $Z = 6\angle\pi/3$ et la tension est décrite par

$$e(t) = 72 \sin(80\pi t) \text{ V}$$

Déterminer le courant.

■ ***Solution***

La tension est la projection verticale du vecteur $E(t) = 72\angle 80\pi t$ et le vecteur de phase de cette tension est $E_0 = 72\angle 0$.

Le vecteur de phase du courant est le quotient du vecteur de phase de la tension et de l'impédance, ce qui donne

$$I_0 = \frac{E_0}{Z} = \frac{72\angle 0}{6\angle\pi/3} = 12\angle(-\pi/3).$$

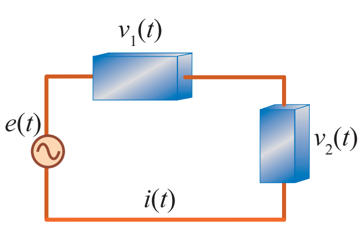
Puisque le vecteur de phase du courant est $I_0 = 12\angle(-\pi/3)$, le courant est décrit par la projection verticale du vecteur

$$I(7) = 12\angle(80\pi t - \pi/3).$$

Le courant est donc l'onde sinusoïdale

$$i(t) = 12 \sin(80\pi t - \pi/3) \text{ A}$$

EXEMPLE 11.3.6



L'impédance d'un circuit est $Z = 8\angle\pi/4$. Quelle tension faut-il appliquer au circuit illustré pour que le courant soit décrit par

$$i(t) = 2{,}5 \sin(60\pi t) \text{ A},$$

■ ***Solution***

Le courant est la projection verticale du vecteur $I(t) = 2{,}5\angle 60\pi t$ et le vecteur de phase est $I_0 = 2{,}5\angle 0$.

Le vecteur de phase de la tension est le produit de l'impédance et du vecteur de phase du courant, ce qui donne

$$E_0 = ZI_0 = (8\angle\pi/4) \times (2{,}5\angle 0) = 20\angle\pi/4.$$

Puisque le vecteur de phase de la tension est $E_0 = 20\angle\pi/4$, la tension est décrite par la projection verticale du vecteur

$$E(t) = 20\angle(60\pi t + \pi/4).$$

La tension est donc l'onde sinusoïdale

$$e(t) = 20 \sin(60\pi t + \pi/4) \text{ V}.$$

Un peu *d'histoire*

APPLICATIONS DE LA TRIGONOMÉTRIE

La vocation première de la trigonométrie n'a pas été le calcul de distances et de hauteurs, même si cet usage est celui qui nous vient d'abord à l'esprit lorsqu'il est question de cette branche des mathématiques. C'est comme support technique à l'astronomie que la trigonométrie a d'abord été utilisée par les savants, babyloniens, grecs et arabes. Dans la philosophie aristotélicienne, le monde supralunaire et le monde sublunaire obéissaient à des principes distincts. Il n'était pas que les méthodes utilisées dans l'étude du monde supralunaire puissent avoir des applications dans le monde sublunaire. Il a fallu que la trigonométrie devienne un champ disciplinaire distinct pour que les applications terrestres se développent.

La trigonométrie a commencé à se développer comme discipline indépendante de l'astronomie grâce aux mathématiciens arabes, en particulier Nasir Al-din Tusi (1201-1274), qui a déterminé la « loi des sinus », et Al-Kashi (1380-1429) qui a déterminé la « loi des cosinus ». Ces lois ont simplifié les procédures de résolution des triangles quelconques. En Europe, l'évolution de la trigonométrie comme branche indépendante des mathématiques doit beaucoup à l'astronome et mathématicien allemand Johann Müller, ou Regiomontanus (1436-1476).

Arc de méridien et forme de la Terre

Deux grands projets scientifiques nécessitant la mesure des longueurs d'arc d'un méridien ont permis des applications à grande échelle de la trigonométrie.

Ne pouvant accepter l'existence du vide et des forces qui se communiquent à distance comme la gravitation, Descartes a imaginé un système dans lequel les planètes sont mues par des tourbillons de matière. Selon Descartes : « les mouvements des planètes sont dus à leur entraînement par des tourbillons d'une matière subtile occupant les espaces intersidéraux » (NH Descartes04). Cette théorie des tourbillons, qui s'oppose à celle de Newton, est alors la doctrine officielle en France. Pour que ces tourbillons puissent causer la rotation de la Terre, ils devaient exercer une certaine pression à l'équateur et Jacques Cassini (1677-1756) en déduit que la Terre doit être un ellipsoïde allongée aux pôles.

Cependant, en l'absence de ces tourbillons de matière, comme dans la théorie de Newton, la force centrifuge devrait avoir comme effet un aplatissement de la Terre aux pôles.

Pour départager ces deux théories, il fallait donc déterminer la forme de la Terre. Est-elle allongée ou aplatie aux pôles? La solution est de mesurer la longueur d'un arc de 1 degré d'un méridien, au nord et à l'équateur. Ces mesures étaient faites en mesurant une longueur de base et les angles de triangles joignant deux points situés à 1 degré de différence sur un même méridien qu'il fallait ensuite résoudre par calculs en ayant recours à la trigonométrie (NH Maupertuis). La méthode de calcul de longueurs terrestres par triangulation avait été développée pour la première fois par Willebrord Snell (1580-1626).

Arc de méridien et définition du mètre

En 1790, l'Assemblée nationale française, issue de la révolution de 1789, décide d'uniformiser les unités de mesure à la grandeur de la France. La première unité de mesure qu'il fallait établir est celle de la longueur et ,pour que cette unité soit acceptable internationalement, il fallait qu'elle soit déterminée à partir d'une longueur terrestre. On choisit le dix millionième du quart de la longueur d'un méridien terrestre. Il restait à mesurer cette longueur, la tâche fut confiée à deux savants, Jean-Baptiste Delambre et Pierre François Méchain. (NH mètre). Il leur fallait procéder par triangulation et résoudre les triangles en ayant recours à la trigonométrie pour mesurer l'arc de méridien joignant Dunkerque à Barcelone.

Modèles sinusoïdaux

L'usage des fonctions trigonométriques s'est depuis répandu dans une foule de domaines, en particulier en physique pour la description des phénomènes vibratoires (NH Ondes01, NH Hooke). Les propriétés des fonctions sinusoïdales par rapport à l'addition (NH Ondes02) ont donné aux mathématiciens et aux physiciens les outils nécessaires pour décrire et analyser tous les phénomènes ondulatoires. Les phénomènes sonores et optiques ont ainsi révélé leurs secrets, ce qui a permis le développement des applications technologiques modernes.

Le mathématicien Joseph Fourier (NH Fourier01), dans son étude de la chaleur (NH Fourier02), a donné une représentation des fonctions périodiques comme somme de fonctions sinus et cosinus qui est à la base de la numérisation de la musique et des images (NH Ondes03). Ces sommes de fonctions ont soulevé un questionnement, une somme infinie de fonctions continues est-elle également une fonction continue ? (NH Ondes04)

11.4 Exercices

1. La tension aux bornes d'une branche d'un circuit est décrite par
$$v(t) = 15 \sin(20\pi t - \pi/6) \text{ V}.$$
   a) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle la tension atteint sa valeur maximale.
   b) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle la tension atteint sa valeur minimale.
   c) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle la tension est nulle.
   d) Donner le vecteur de phase associé à cette tension.

2. La tension aux bornes d'une branche d'un circuit est décrite par
$$v(t) = 28 \sin(30\pi t + 3\pi/4) \text{ V}.$$
   a) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle la tension atteint sa valeur maximale.
   b) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle la tension atteint sa valeur minimale.
   c) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle la tension est nulle.
   d) Donner le vecteur de phase associé à cette tension.

3. La tension aux bornes d'une branche d'un circuit est décrite par
$$v(t) = 17 \sin(60\pi t + \pi/3) \text{ V}.$$
   a) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle la tension atteint sa valeur maximale.
   b) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle la tension atteint sa valeur minimale.
   c) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle la tension est nulle.
   d) Donner le vecteur de phase associé à cette tension.

4. Le courant dans une branche d'un circuit est décrit par
$$i(t) = 5 \sin(25\pi t - \pi/3) \text{ mA}.$$
   a) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle le courant atteint sa valeur maximale.
   b) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle le courant atteint sa valeur minimale.
   c) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle le courant est nul.
   d) Donner le vecteur de phase associé à ce courant.

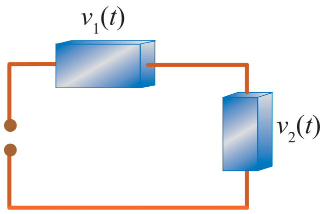
5. Le courant dans une branche d'un circuit est décrit par
$$i(t) = 4 \sin(25\pi t - \pi/2) \text{ mA}.$$
   a) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle le courant atteint sa valeur maximale.
   b) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle le courant atteint sa valeur minimale.
   c) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle le courant est nul.
   d) Donner le vecteur de phase associé à ce courant.

6. Le courant dans une branche d'un circuit est décrit par
$$i(t) = 8 \times 10^{-2} \sin(25\pi t + \pi/2) \text{ A}.$$
   a) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle le courant atteint sa valeur maximale.
   b) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle le courant atteint sa valeur minimale.
   c) Calculer la plus petite valeur positive de t pour laquelle le courant est nul.
   d) Donner le vecteur de phase associé à ce courant.

7. Une génératrice produit un courant sinusoïdal de 30 cycles par seconde ayant une amplitude 0,5 A et dont l'angle de phase est nul. Donner la fonction décrivant le courant en fonction du temps et le vecteur associé à cette fonction.

8. Une génératrice produit un courant sinusoïdal de 25 cycles par seconde ayant une amplitude 12 mA et dont l'angle de phase est $\pi/6$. Donner la fonction décrivant le courant en fonction du temps et le vecteur associé à cette fonction.

9. Déterminer la tension d'entrée $e(t)$ dans la partie de circuit illustrée ci-dessous.

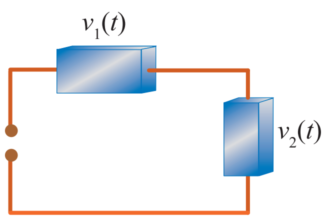


Les tensions aux bornes des composantes sont

$v_1(t) = 9 \sin (\omega t + \pi/4)$ V

et $v_2(t) = 12 \sin (\omega t + 5\pi/6)$ V.

10. Déterminer la tension d'entrée $e(t)$ dans la partie de circuit illustrée ci-dessous.

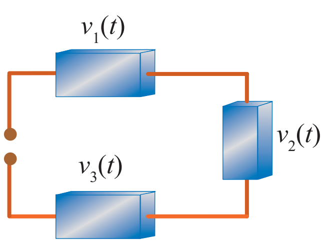


Les tensions aux bornes des composantes sont

$v_1(t) = 20 \sin (377t + \pi/3)$ V

et $v_2(t) = 12 \sin (377t + 5\pi/6)$ V.

11. Déterminer la tension d'entrée $e(t)$ dans la partie de circuit illustrée ci-dessous.



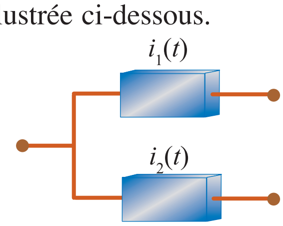
Les tensions aux bornes des composantes sont

$v_1(t) = 15 \sin (157t - \pi/6)$ V,

$v_2(t) = 28 \sin (157t + 3\pi/4)$ V,

et $v_3(t) = 17 \sin (157t + \pi/3)$ V.

12. Déterminer le courant d'entrée $i(t)$ dans la partie de circuit illustrée ci-dessous.

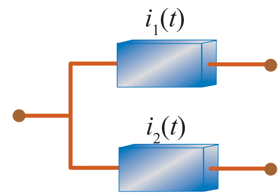


Les courants dans les composantes sont

$i_1(t) = 5 \times 10^{-2} \sin (157t + \pi/2)$ A

et $i_2(t) = 2 \times 10^{-2} \sin (377t + \pi/3)$ A.

13. Déterminer le courant d'entrée $i(t)$ dans la partie de circuit illustrée ci-dessous.

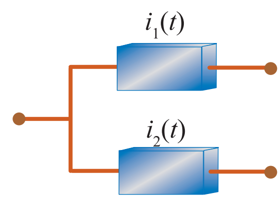


Les courants dans les composantes sont

$i_1(t) = 4 \times 10^{-3} \sin (157t + \pi/3)$ A

et $i_2(t) = 7 \times 10^{-3} \sin (377t - \pi/4)$ A.

14. Déterminer le courant d'entrée $i(t)$ dans la partie de circuit illustrée ci-dessous.



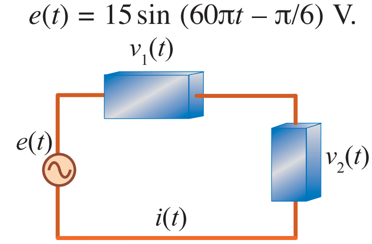
Les courants dans les composantes sont

$i_1(t) = 8 \times 10^{-2} \sin (157t - \pi/4)$ A

et $i_2(t) = 4 \times 10^{-2} \sin (377t + \pi/3)$ A.

15. Dans le circuit illustré ci-dessous, la tension aux bornes de la source est décrite par

$e(t) = 15 \sin (60\pi t - \pi/6)$ V.



L'équation du courant est

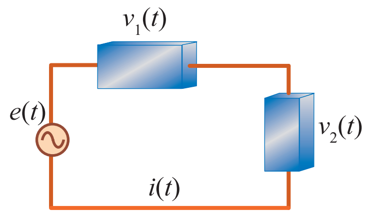
$i(t) = 12 \sin (60\pi t - \pi/4)$ A

a) Calculer l'impédance du circuit.

b) Déterminer l'angle de déphasage et le déphasage du circuit.

16. Dans le circuit illustré ci-dessous, la tension aux bornes de la source est décrite par

$$e(t) = 18 \sin (30\pi t + \pi/2) \text{ V.}$$



L'équation du courant est

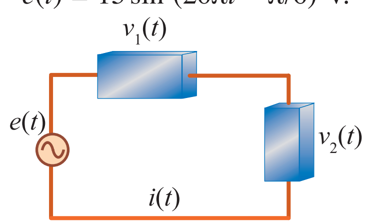
$$i(t) = 3 \sin (30\pi t + \pi/6) \text{ A}$$

a) Calculer l'impédance du circuit.

b) Déterminer l'angle de déphasage et le déphasage du circuit.

17. Dans le circuit illustré ci-dessous, la tension aux bornes de la source est décrite par

$$e(t) = 15 \sin (20\pi t - \pi/6) \text{ V.}$$



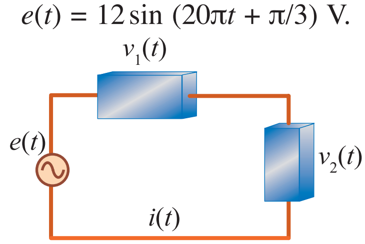
L'impédance est $Z = 6\angle\pi/6$.

a) Déterminer l'équation du courant.

b) Déterminer l'angle de déphasage et le déphasage du circuit.

18. Dans le circuit illustré ci-dessous, la tension aux bornes de la source est décrite par

$$e(t) = 12 \sin (20\pi t + \pi/3) \text{ V.}$$



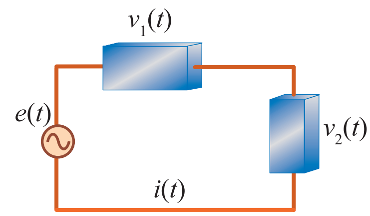
L'impédance est $Z = 4\angle\pi/2$.

a) Déterminer l'équation du courant.

b) Déterminer l'angle de déphasage et le déphasage du circuit.

19. Dans le circuit illustré ci-dessous, le courant est décrit par

$$i(t) = 1{,}8 \sin (80\pi t + \pi/3) \text{ A.}$$



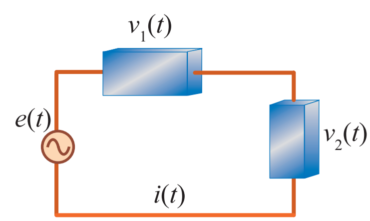
L'impédance est $Z = 5\angle\pi/6$.

a) Déterminer l'équation de la tension.

b) Déterminer l'angle de déphasage et le déphasage du circuit.

20. Dans le circuit illustré ci-dessous, le courant est décrit par

$$i(t) = 2{,}4 \sin (40\pi t) \text{ A.}$$

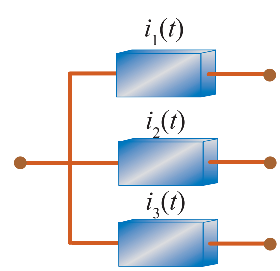


L'impédance est $Z = 3\angle\pi/3$.

a) Déterminer l'équation de la tension.

b) Déterminer l'angle de déphasage et le déphasage du circuit.

21. Déterminer le courant d'entrée $i(t)$ dans la partie de circuit illustrée ci-dessous.



Les courants dans les composantes sont

$$i_1(t) = 5 \times 10^{-2} \sin (157t + \pi/2) \text{ A}$$
$$i_2(t) = 3 \times 10^{-2} \sin (157t - \pi/2) \text{ A}$$
$$\text{et } i_3(t) = 4 \times 10^{-2} \sin (377t - \pi/4) \text{ A.}$$