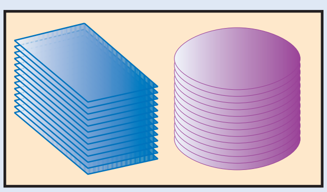
Bonaventura Cavalieri
1598–1647

En appliquant sa méthode des indivisibles, Cavalieri a calculé la volume de la sphère. Sa démarche dans cette démonstration ressemble à celle d'Archimède. Ce dernier était conscient que la méthode utilisée pouvait donner lieu à un résultat erroné et prenait soin de confirmer ce résultat par une démonstration en utilisant la méthode d'exhaustion.

Bonaventura Cavalieri
Calcul de volumes

Cavalieri a utilisé la méthode des indivisibles pour calculer le volume de différents solides. Le principe des indivisibles pour un volume s'énonce alors comme suit :

Si deux solides sont compris entre deux plans parallèles et si toutes les intersections de ces solides avec un plan parallèle aux deux premiers ont même aire, alors les solides ont même volume.



On peut illustrer la signification de ce théorème à l'aide d'un parallélépipède rectangle et d'un cylindre circulaire droit. Le parallélépipède rectangle peut être conçu comme une pile de cartes rectangulaires alors que le cylindre peut être conçu comme une pile de cartes rondes. Si les piles ont même hauteur, (ou même nombre de cartes de même épaisseur), et si les cartes rondes ont la même aire que les cartes rectangulaires, les deux piles occupent des volumes égaux.

Or, le volume d'un parallélépipède rectangle est le produit de ses trois dimensions ou encore le produit de l'aire de sa base par sa hauteur, soit :

$$V = Bh$$

Par sa méthode des indivisibles, Cavalieri conclut alors que le volume du cylindre est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur. L'aire de cette base étant

$$A = \pi r^2$$

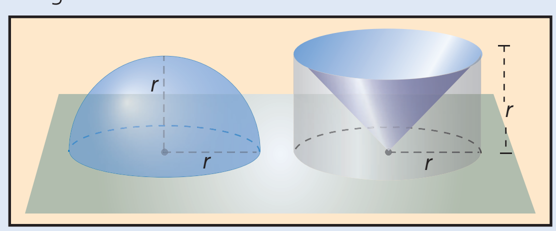
où r est le rayon de la base du cylindre. Le volume du cylindre est donc :

$$V = \pi r^2 h$$

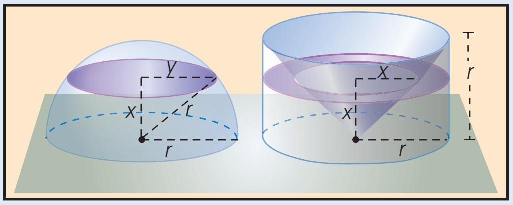
Volume de la sphère

Cavalieri a utilisé ce même principe pour calculer le volume d'une sphère et sa façon de procéder n'est pas sans rappeler celle d'Archimède.

Il a considéré une demi-sphère et un cylindre de rayon r et tel que la hauteur du cylindre soit égale au rayon r. Il a de plus imaginé que le cylindre était creusé en forme de cône inversé tel qu'illustré par la figure suivante.



Dans cette figure, les deux solides sont compris entre deux plans parallèles puisque la hauteur du cylindre est égale au rayon de la sphère. Imaginons maintenant un plan parallèle au plan π, coupant les deux solides, et dont la distance au plan P est égale à h. L'intersection de ce plan avec la demi-sphère donne un cercle et l'intersection avec l'autre solide donne un anneau.



Comparons l'aire du cercle et l'aire de l'anneau. Le rayon du cercle est un côté de l'angle droit du triangle rectangle dont un des côtés est *h* et l'hypoténuse est *r*. Le rayon du cercle est donc :

$$R = \sqrt{r^2 - h^2}$$

et son aire est :

$$A = \pi\,(r^2 - h^2).$$

L'aire de l'anneau est obtenue en faisant la différence de l'aire du cercle extérieur et du cercle intérieur. Le cercle extérieur a même rayon que le cylindre et son aire est :

$$A_1 = \pi r^2.$$

Le rayon du cercle intérieur de l'anneau est *h* puisque le rayon et la hauteur du cône sont égaux. L'aire du cercle intérieur est donc :

$$A_2 = \pi h^2$$

et l'aire de l'anneau est :

$$A = A_1 - A_2 = \pi r^2 - \pi h^2 = \pi(r^2 - h^2).$$

Quel que soit le plan sécant, son intersection avec la demi-sphère aura toujours même aire que son intersection avec le cylindre de creux conique.
Cavalieri en conclut donc que le volume de la demi-sphère est égal à la différence des volumes du cylindre et du cône.

Or, le volume d'un cylindre de rayon *r* et de hauteur *r* est

$$V_{\text{cylindre}} = \pi r^3$$

et le volume d'un cône est le tiers du volume du cylindre de même rayon et de même hauteur. Le volume de la demi-sphère est donc :

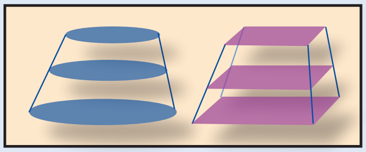
$$V_{s/2} = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

et le volume de la sphère est :

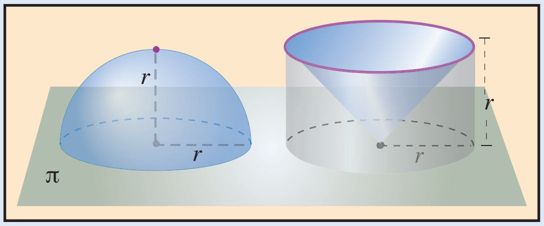
$$V_s = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Dans cet exemple, les sections ont la même aire, mais la méthode peut également être utilisée lorsque les aires sont dans un même rapport. C'est ce qu'indique la proposition suivante, connue sous le nom de *Théorème de Cavalieri* et utilisée en stéréométrie, domaine de la géométrie qui a pour objet la mesure des solides naturels.

Si deux solides ont même hauteur et si des sections qui sont obtenues par des plans parallèles aux bases et à égale distance de celles-ci sont toujours dans un rapport donné, alors les volumes des deux solides sont aussi dans le même rapport.



Galilée utilise cette démarche de Cavalieri pour présenter un de ses paradoxes concernant l'infini ou plus spécifiquement sur la limite d'un processus. C'est par la bouche d'un des protagonistes de *Dialogues sur deux systèmes du monde* dans lequel il fait l'éloge du système héliocentrique copernicien, qu'il présente ce paradoxe. Salvati fait remarquer qu'à la limite, le cercle devient un point et l'anneau circulaire devient un cercle. Le rayon de la sphère étant arbitraire, on peut conclure que tous les cercles, quel que soit leur rayon, ont une circonférence égale et que chacune de ces circonférences est égale à un point. En réalité, ce ne sont pas les figures qui sont égales, mais la mesure de leur aire et la mesure de l'aire du point est nulle tout comme celle de la circonférence.



La méthode des indivisibles permet indéniablement d'obtenir des résultats qui sont conformes à la réalité dans certaines situations même si elle manque de rigueur.