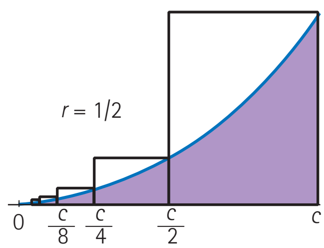
SÉRIES, LA SUITE

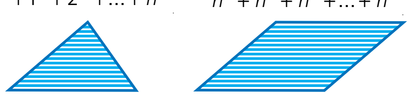
Les noms de Brook Taylor (NH Taylor) et de Colin Maclaurin (NH Maclaurin) sont restés attachés aux développements en série. Ce ne sont cependant pas les seuls mathématiciens à avoir travaillé avec des développements en série pour calculer l'aire sous une courbe. En ayant recours à une partition dont les largeurs des intervalles formaient une progression géométrique, Pierre de Fermat avait déjà calculé la valeur exacte de l'aire sous des courbes de la forme $f(x) = x^n$ (NH Fermat04).



John Wallis (NH Wallis01), en associant des valeurs numériques aux indivisibles de Cavalieri (NH Cavalieri02), avait lui aussi obtenu la somme de développements en série en assignant des valeurs numériques aux indivisibles d'un triangle et du parallélogramme associé. Par cette association aux fondements nébuleux et par une induction incomplète, il avait déterminé la valeur exacte de l'aire sous la courbe des fonctions puissance entière (NH Wallis02).

Somme des cubes des indivisibles

$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ $\qquad$ $n^3 + n^3 + n^3 + \ldots + n^3$



Rapport des sommes

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^3 + n^3 + n^3 + \ldots + n^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$$

La mathématicien écossais James Gregory (NH Gregory) a réussi des avancées majeures. Il avait découvert le développement en série du binôme et le développement en série des fonctions $\tan x$ et $\sec x$. En 1670, il utilise une démarche équivalente à des différentiations successives et découvre le développement en série de Taylor, quarante ans avant que celui-ci ne les publie. La méthode de Gregory a été partiellement décrite par Henry Briggs en 1624. Gregory est mort trop jeune, à 38 ans, pour que ses travaux aient une grande influence. La seule série de Maclaurin qui porte encore le nom de Gregory est celle de l'arctangente,

$$c_0 = f(a),\ c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{f''(a)}{2!},\ c_3 = \frac{f'''(a)}{3!},$$

Un pas important est franchi lorsque Newton fait connaître la méthode qu'il a découverte pour développer par récurrence une expression binomiale en série de puissances (NH Newton03). Il a développé cette méthode par tâtonnements, en s'inspirant des méthodes de Wallis, et sans jamais parvenir à en donner une démonstration. Newton a cependant vérifié que, pour les développements déjà connus et obtenus par des méthodes disparates, sa méthode donnait les mêmes développements. Dans les cas traités par Fermat et Wallis, il était possible de déterminer la valeur exacte de la série.

Développement en série du binôme par Newton

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \ldots,$$

où $A.B,C\ldots$. représentent le terme précédent du développement.

La méthode de Newton ne donnait pas toujours des séries dont on pouvait facilement déterminer la somme. Ces développements permettaient cependant de calculer une valeur approchée avec la précision souhaitée en additionnant un nombre suffisant de termes.

Leonhard Euler a lui aussi réalisé des travaux sur les séries. Il a déterminé le développement en série de l'exponentielle et utilisé ce développement avec des nombres complexes (NH Euler04), ce qui lui a permis d'établir la relation entre la représentation exponentielle des nombres complexes et la formule de De Moivre. Il s'est également intéressé aux séries divergentes en étudiant la différence entre la série harmonique et le logarithme naturel, ce qui a donné la constante γ d'Euler (NH Euler05), il a de plus déterminé une façon de transformer la série harmonique et la série des carrés des inverses en produits (NH Euler06).

Nous sommes redevables à Taylor d'avoir précisé les conditions pour qu'une fonction soit développable en série et ce faisant, d'avoir déterminé une procédure pour développer une fonction en série. Maclaurin présente dans *Treatise of fluxions* un développement en série autour de 0 qui est un cas particulier de développement de Taylor. Maclaurin indique que ce résultat a été présenté par Taylor dans *Methodus Incrementorum*, mais l'ouvrage de Maclaurin a permis de diffuser largement ce type de développement.

Joseph Fourier a lui aussi déterminé une représentation de fonctions en séries des cosinus et de sinus, appelées *séries de Fourier.* Il a déterminé ces développements dans l'étude de la chaleur.