



Bernhard Riemann

1826-1866

Bernhard Riemann a apporté de nombreuses contributions à la topologie, l'analyse, la géométrie différentielle et le calcul intégral. Certains de ses contributions ont permis le développement de la relativité générale.

Bernhard Riemann

Bernhard Riemann est un mathématicien allemand né à Breselenz dans le Royaume de Hanovre. Sa mère, Charlotte Ebel meurt avant que ses enfants, deux garçons et quatre filles aient atteint l'âge adulte. Ce décès a des répercussions sur les enfants dont l'enfance est marquée par le manque de soins médicaux et de nourriture.

Son père, qui était pasteur luthérien leur donne l'éducation primaire. Bernard résout parfaitement tous les problèmes mathématiques que lui pose son père et il en invente lui-même de plus en plus complexes. Lorsque Bernard a dix ans, son père engage un professeur particulier pour lui enseigner la géométrie et l'arithmétique. En 1840, il est hébergé par sa grand-mère et entre au Lycée de Hanovre qu'il intègre en troisième année. Sa grand-mère décède en 1842 et il va compléter ses études secondaires à Lunebourg, au *Johanneum Gymnasium* (Lycée), où ses professeurs remarquant ses capacités à résoudre des problèmes mathématiques complexes l'initient aux mathématiques supérieures. Au printemps de 1846, il s'inscrit à l'université de Göttingen à la faculté de théologie, influencé par son père qui souhaite le voir devenir pasteur.

Ayant assisté à quelques conférences sur les mathématiques pour lesquelles, il retrouve l'intérêt qu'il portait à cette

discipline lors de ses études secondaires. Il demande à son père s'il peut s'inscrire plutôt en philosophie pour pouvoir suivre des cours de mathématiques. Il excelle à l'université de Göttingen, où il a comme professeurs Stern (Moritz, 1807-1894) et Gauss (Carl Friedrich, 1777-1855). Ce dernier donne des conférences à Riemann mais ce sont des cours élémentaires et il n'y a aucune preuve qu'à cette époque il a reconnu le génie de Riemann.

Riemann considère qu'à Göttingen, il y a peu d'enseignants compétents dans les différentes matières qu'il souhaite approfondir. Il entre donc à l'université de Berlin, en 1847, pour y étudier sous la direction de Steiner (Jakob, 1796-1863), Jacobi (Carl Gustav Jacob, 1804-1851), Dirichlet (Carl Gustav Lejeune, 1805-1859) et Eisenstein (Ferdinand Gotthold Max, 1823-1852). Cette période est importante pour Riemann. Il apprend beaucoup d'Eisenstein sur l'utilisation de variables complexes dans la théorie de la fonction elliptique. Cependant, il est surtout influencé par Dirichlet. Durant son séjour à Berlin, il élabore sa théorie générale des variables complexes qui constitue la base de certains de ses travaux les plus importants

En 1849, il retourne à Göttingen pour y préparer sa thèse de doctorat sous la direction de Gauss (Carl Friedrich, 1777-1855). Sa thèse porte sur les

variables complexes et les surfaces de Riemann. Il fait la présentation de sa thèse le 16 décembre 1851

Sur la recommandation de Gauss, il est autorisé à entreprendre les démarches pour devenir privadozent, c'est-à-dire professeur non rémunéré. C'était à l'époque la première étape à franchir pour enseigner dans une université allemande. Il passe trente mois à travailler sur son mémoire d'habilitation. Celui-ci porte sur la représentation des fonctions par des séries trigonométriques. Dans la première partie, il introduit alors la condition d'intégrabilité de Riemann. Dans la seconde partie de la thèse, il examine le problème suivant « si une fonction peut être représentée par une suite trigonométrique, que peut-on dire de son comportement? ».

Pour compléter son habilitation, il doit préparer un exposé en proposant trois sujet, il propose trois sujets à Gauss, deux sur l'électricité et un sur la géométrie. Gauss choisit celui sur les fondements de la géométrie, *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sur les hypothèses aux fondements de la géométrie). Cet exposé est présenté le 10 juin 1854 et constitue une révolution dans l'étude de la géométrie.

En 1855, Gauss décède et certains des collègues de Riemann proposent celui-ci pour occuper la chaire laissée vacante, mais c'est Dirichlet qui est nommé. Deux ans plus tard, Riemann devient professeur et publie *Théorie des fonctions abéliennes*, résultat de plusieurs années de travail. L'article est une suite à sa thèse de doctorat. Il développe l'idée des surfaces de Riemann et de leurs propriétés topologiques et examine les fonctions à valeurs multiples comme valeurs uniques sur une surface de Riemann spéciale.

Riemann est nommé à la chaire de mathématiques, après la mort

de Dirichlet 1859. Quelques jours plus tard, il est élu à l'Académie des sciences de Berlin. Un membre nouvellement élu de l'Académie des sciences de Berlin devait rendre compte de ses recherches les plus récentes et Riemann a envoyé un rapport sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée, un autre de ses grands chefs-d'œuvre qui devait changer la direction de la recherche mathématique de façon significative. Dans ce document, Riemann a examiné la fonction zêta, soit

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s} = \prod \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Dans cette expression, la somme porte sur tous les nombres naturels n alors que le produit porte sur tous les nombres premiers. Pour Riemann, cette fonction est différente de celle envisagée par Euler, car il considère que la fonction zêta est une fonction complexe plutôt que réelle.

Riemann dont la santé a toujours été fragile meurt de tuberculose à 39 ans, sa carrière n'a duré qu'une dizaine d'années.

Sommes de Riemann

La construction des sommes de Riemann consiste à approcher une courbe par une fonction constante par morceaux, avec des valeurs choisies pour approcher au mieux la fonction originelle, puis à additionner les aires des rectangles ainsi formés, et considérer la limite de la somme lorsqu'on réduit la largeur de ces rectangles. Cette limite est appelée «intégrale de Riemann», soit

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(t_i) = \int_a^b f(t) dt.$$

