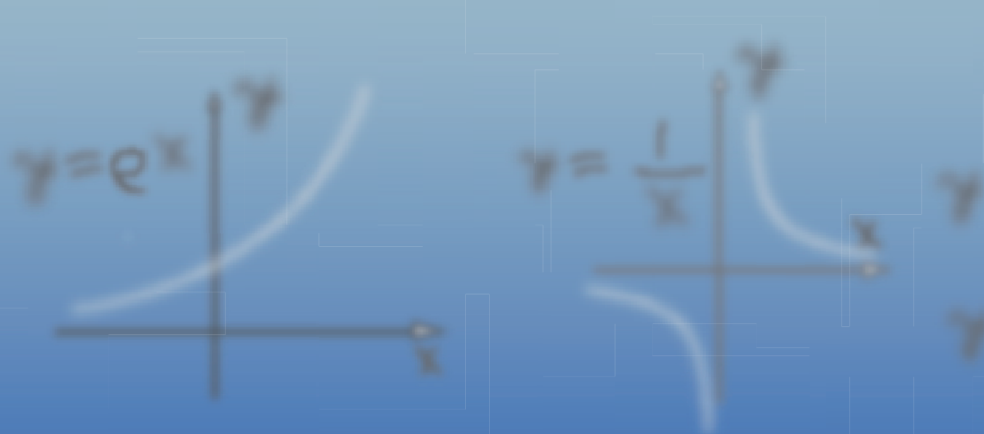


CHAPITRE 10

# NOMBRES COMPLEXES

## Résoudre des problèmes en utilisant les nombres complexes.

**Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont :**

- L'exécution des opérations sur les nombres complexes sous forme rectangulaire.
- L'expression d'un nombre complexe sous forme rectangulaire, trigonométrique, polaire ou exponentielle.
- L'utilisation de la forme la plus appropriée pour effectuer des opérations sur les nombres complexes.



## OBJECTIFS

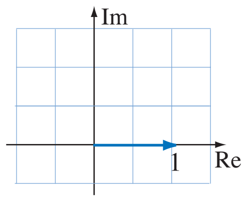
**10.1** Effectuer les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire de nombres complexes.

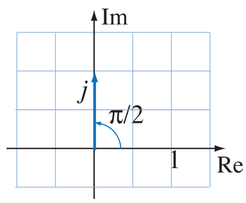
**10.2** Déterminer le module et l'argument d'un nombre complexe.

**10.3** Élever un nombre complexe à une puissance entière et extraire la racine $n^e$ d'un nombre complexe.

# 10.1 Nombres complexes

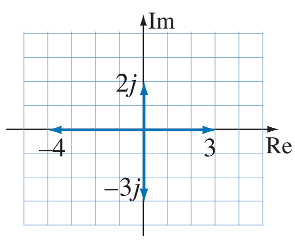
## Introduction



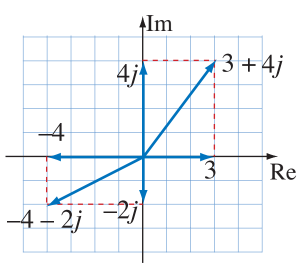

Chaque nombre réel peut être représenté sur un axe horizontal en associant à ce nombre un segment de droite ou un point sur l'axe et, réciproquement, on peut associer un nombre réel à tout segment ou tout point de l'axe horizontal. On peut considérer chacun de ces segments de droite comme un vecteur dont la direction est l'axe horizontal et dont le sens est donné par le signe. Considérons maintenant un opérateur qui a pour effet de faire subjr une rotation de 90° (ou π/2 radian) de sens antihoraire. Cet opérateur sera représenté par la lettre *j*. Ainsi, le produit $j \times 1$, ou simplement *j*, est un vecteur unitaire obtenu par une rotation de 90° de sens antihoraire du vecteur unitaire dont l'origine coïncide avec l'origine du système d'axes et dont le sens est défini par la direction positive de l'axe vertical. On note :

$$j = 1\angle 90° = 1\angle \pi/2.$$

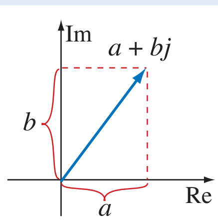



De la même façon, chaque point sur l'axe vertical peut être considéré comme l'extrémité d'un vecteur de l'axe horizontal ayant subj l'effet de l'opérateur *j*. C'est donc dire que, à chaque point sur l'axe vertical, on peut associer un vecteur de la forme *bj*, où *b* est un nombre réel. Autrement dit, à chaque nombre *bj*, on associe un nombre réel ayant subj une rotation antihoraire de 90°. L'expression *bj* véhicule donc deux éléments d'information : la distance dirigée à l'origine représentée par le nombre *b* et la direction verticale représentée par la lettre *j*. Le nombre *bj* est appelé **nombre imaginaire**, et *j* est l'**unité imaginaire**. On note :

$$bj = b\angle 90° = -b\angle(-90°).$$




Par addition vectorielle, on peut associer à chaque vecteur du plan un nombre de la forme $a + bj$ que l'on appelle **nombre complexe**. Dans un nombre complexe $z = a + bj$, *a* est la **partie réelle**, notée Re($z$), et *b* la **partie imaginaire**, notée Im($z$). La forme $a + bj$ est appelée **forme cartésienne** (ou **forme rectangulaire**) du nombre complexe.




**Nombre complexe**

On appelle **nombre complexe** toute expression de la forme $a + bj$, où *a* et *b* sont des nombres réels et *i* un opérateur dont l'effet est une rotation de 90° de sens antihoraire. Un nombre complexe $a + bj$ est représenté graphiquement par un vecteur dont les composantes sont *a* et *b*. Dans cette représentation graphique, l'axe horizontal est appelé **axe des réels** et l'axe vertical **axe des imaginaires**. On notera indifféremment *bj* ou *jb*.

L'ensemble des nombres complexes est représenté par la lettre $\mathbb{C}$. On remarquera que l'ensemble des réels est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. En effet, lorsque $b = 0$, le nombre $a + 0i$ est le nombre réel *a*. On peut désigner un nombre complexe par une seule lettre, $z$ ou $u$.

Un des premiers problèmes qui vient à l'esprit lorsqu'on définit de nouveaux objets mathématiques, c'est celui de l'égalité. Dans la situation actuelle, la question est : à quelles conditions deux nombres complexes seront-ils égaux ? Pour assurer la cohérence avec la représentation graphique, on doit poser que des nombres complexes sont égaux lorsqu'ils sont représentés par le même vecteur. Ils doivent donc avoir des composantes égales. Cela permet de poser la définition suivante.

### Égalité de nombres complexes

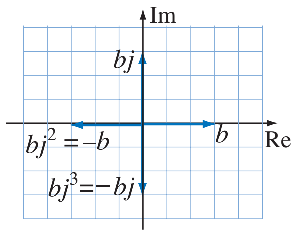
Soit $z_1 = a_1 + b_1 j$ et $z_2 = a_2 + b_2 j$, deux nombres complexes sous forme rectangulaire. On dit que ces nombres sont **égaux** si et seulement si :

$$a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2$$

**REMARQUE**
Cette définition signifie que deux nombres complexes sous forme rectangulaire sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales.

#### L'opérateur *i*

L'effet de cet opérateur est une rotation de 90° dans le sens antihoraire. Un nombre réel $b > 0$ est représenté sur la droite réelle par un vecteur de longueur $b$. Le produit de ce nombre par l'opérateur $j$ donne le nombre $bj$ représenté par un vecteur de longueur $b$ sur l'axe des imaginaires. En multipliant à nouveau par $j$, on obtient $j(jb)$. Graphiquement, le vecteur $b$ a subj deux rotations successives de 90°. Il est à nouveau sur l'axe des réels, mais son sens est vers la gauche. Il coïncide avec le nombre réel $–b$, on a




$$j(jb) = j^2 b = –b.$$

Ce raisonnement est valide pour tout nombre réel $b$ et, en particulier, pour $b = 1$. Par conséquent :

$$j(j1) = j^2 1 = –1.$$

La définition de $i$ comme opérateur dont l'effet est une rotation de 90° dans le sens antihoraire implique donc que $j^2 = –1$. C'est pourquoi on écrit parfois $j = \sqrt{-1}$.

**REMARQUE**
Il est à noter que :

$$(–j)^2 = (–1)^2\, j^2 = –1,$$

mais on n'écrit pas $–j = \sqrt{-1}$.

**EXEMPLE 10.1.1**

Déterminer les racines de l'équation quadratique $x^2 – 2x + 5 = 0$.

***Solution***

Les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ sont $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, d'où

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

En considérant le radical comme un produit de radicaux, on a $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4j$. Cela permet d'écrire :

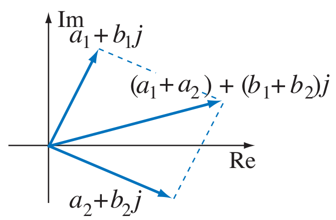
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4j}{2} = \frac{2(1 \pm 2j)}{2} = 1 \pm 2j.$$

L'équation $x^2 – 2x + 5 = 0$ a deux racines dans l'ensemble des nombres complexes, $x = 1 + 2j$ et $x = 1 – 2j$.

**REMARQUE**
Toutes les équations quadratiques ont deux racines dans l'ensemble des nombres complexes.

## Opérations sur les nombres complexes

Les nombres complexes étant semblables aux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on pourra définir les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire de façon analogue aux opérations sur les vecteurs.

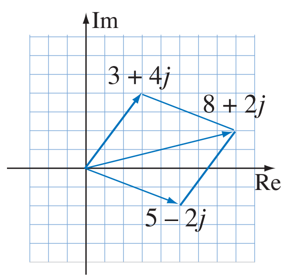



### Addition de nombres complexes

Soit $z_1 = a_1 + b_1 j$ et $z_2 = a_2 + b_2 j$, deux nombres complexes sous forme rectangulaire. L'addition de ces nombres, notée $z_1 + z_2$, est définie par l'égalité suivante :

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j.$$

La somme de deux nombres complexes est donc obtenue en additionnant les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles.




**EXEMPLE 10.1.2**

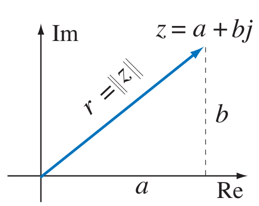
Additionner les nombres complexes $5 - 2j$ et $3 + 4j$, et représenter graphiquement.

■ ***Solution***

Il faut additionner entre elles les parties réelles et les parties imaginaires, ce qui donne :

$$(5 - 2j) + (3 + 4j) = (5 + 3) + (-2 + 4)j = 8 + 2j.$$

La représentation graphique est donnée ci-contre.

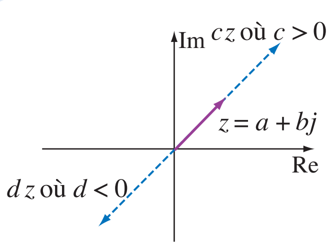



#### Multiplication par un scalaire

Un nombre complexe $z = a + bj$ étant représenté par un vecteur, il a donc un **module**, noté $\|z\|$ ou $r$, qui est défini par :

$$r = \| z \| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La multiplication par un scalaire a pour effet de multiplier le module de ce vecteur en conservant la direction. Le sens du vecteur résultant dépend du signe du scalaire.




### Multiplication d'un nombre complexe par un scalaire

Soit $z = a + bj$, un nombre complexe sous forme rectangulaire; la multiplication de $z$ par le scalaire $c$ donne un nombre complexe, noté $cz$, défini par l'égalité suivante $cz = ca + cbj$.

- le vecteur représentant le nombre complexe $cz$ a la même direction que celui représentant le nombre complexe $z$;
- le module de $cz$ est égal au produit de la valeur absolue de $c$ par le module de $z$, soit :

$$\|cz\| = |c|\|z\|.$$

- le sens de $cz$ est le même que celui de $z$ si $c > 0$, et le sens est contraire si $c < 0$.

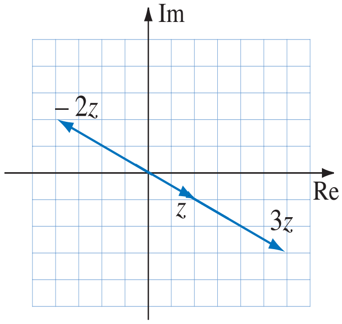
## EXEMPLE 10.1.3

Soit le nombre complexe $z = 2 - j$.

a) Représenter graphiquement ce nombre complexe.

b) Trouver et représenter graphiquement le nombre $3z$.

c) Trouver et représenter graphiquement le nombre $-2z$.




***Solution***

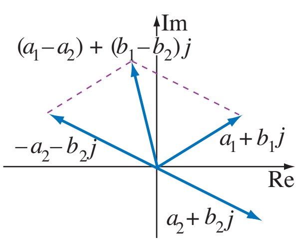
a) Le vecteur a une composante horizontale de 2 et une composante verticale de –1. Graphiquement, on a la représentation ci-contre.

b) Le nombre $3z$ est défini par $3z = 3\ (2 - j) = 6 - 3j$. Graphiquement, c'est un vecteur ayant même direction et même sens que $z$, mais son module est le triple du module de $z$.

c) Le nombre $-2z$ est défini par $-2z = -2\ (2 - j) = -4 + 2j$. Graphiquement, c'est un vecteur dont le module est le double de celui de $z$; sa direction est la même que $z$, mais il est de sens contraire à $z$, puisque le scalaire est négatif.

On peut interpréter la différence de deux nombres complexes à partir de la multiplication par un scalaire. On peut considérer que le nombre à soustraire est multiplié par –1, ce qui a pour effet de changer son sens tout en conservant son module et sa direction. Il suffit alors d'effectuer une addition pour trouver le nombre complexe résultant. Ainsi, la différence de deux nombres complexes $z_1 = a_1 + b_1 j$ et $z_2 = a_2 + b_2 j$ est :

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a_1 + b_1 j) - (a_2 + b_2 j) \\ &= (a_1 + b_1 j) + (-a_2 - b_2 j) \\ &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) j \end{aligned}$$




La représentation graphique est donnée ci-contre.

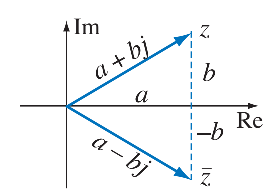
### Nombre conjugué

Lorsqu'une équation quadratique à coefficients réels a des zéros complexes, ceux-ci ne diffèrent que par le signe de la partie imaginaire. De tels nombres sont dits **conjugués**. Graphiquement, ce sont des vecteurs symétriques par rapport à l'axe des réels.

#### Nombre complexe conjugué

Soit $z = a + bj$, un nombre complexe sous forme rectangulaire. On appelle **nombre complexe conjugué** de $z$, noté $\overline{z}$ , le nombre complexe défini par :

$$\overline{z} = a - bj.$$




On obtient le nombre conjugué en changeant le signe de la partie imaginaire du nombre complexe. Ainsi, le conjugué de $z = 3 + 4j$ est $\overline{z} = 3 - 4j$, alors que le conjugué de $u = 5 - 2j$ est $\overline{u} = 5 + 2j$.

### Produit de nombres complexes

Pour multiplier deux nombres complexes, on procède comme pour le produit de deux bjnômes, puis on utilise le fait que $j^2 = -1$. Ainsi, pour effectuer le produit des nombres complexes $z_1 = 2 - 3j$ et $z_2 = 5 + 2j$, on procède comme suit :

$$\begin{aligned}(2-3j)(5+2j) &= 10 + 4j - 15j - 6j^2, \text{ par distributivité;}\\ &= 10 + 4j - 15j + 6, \text{ puisque } j^2 = -1;\\ &= 16 - 11j.\end{aligned}$$

**PROCÉDURE**

**Multiplication de nombres complexes sous forme rectangulaire**

1. Multiplier les nombres comme s'ils étaient deux bjnômes.
2. Utiliser le fait que $j^2 = -1$ pour simplifier l'expression obtenue en regroupant les parties réelles et les parties imaginaires.

**EXEMPLE 10.1.4**

Effectuer les multiplications suivantes :

a) $(-5 + 7j)(6 - 12j)$ b) $j(2 + 3j)$

c) $3j(-5 + 2j)(6 - 3j)$

***Solution***

a) $$\begin{aligned}(-5+7j)(6-12j) &= -30 + 60j + 42j - 84j^2, \text{ par distributivité;}\\ &= -30 + 102j + 84, \text{ puisque } j^2 = -1;\\ &= 54 + 102j.\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}j(2+3j) &= 2j + 3j^2, \text{ par distributivité;}\\ &= -3 + 2j, \text{ puisque } j^2 = -1.\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}3j(-5+2j)(6-3j) &= (-15j + 6j^2)(6-3j), \text{ par distributivité;}\\ &= (-6 - 15j)(6 - 3j), \text{ puisque } j^2 = -1;\\ &= -36 + 18j - 90j + 45j^2, \text{ par distributivité;}\\ &= -81 - 72j, \text{ puisque } j^2 = -1.\end{aligned}$$

Considérons $z = a + bj$, un nombre complexe quelconque. Alors, le conjugué de $z$ est $\overline{z} = a - bj$. Le produit de $z$ par son conjugué est alors :

$$\begin{aligned}z\overline{z} &= (a + bj)(a - bj)\\ &= a^2 - abj + abj - b^2j^2, \text{ par distributivité;}\\ &= a^2 + b^2, \text{ puisque } j^2 = -1.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{z} = a^2 + b^2$.

**THÉORÈME**

**Produit d'un nombre complexe et de son conjugué (rectangulaire)**

Soit $z = a + bj$, un nombre complexe sous forme rectangulaire. Alors, le produit de $z$ par son conjugué $\overline{z}$ est :

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 = \|z\|.$$

### Quotient de nombres complexes

Lorsqu'on effectue une opération sur des nombres complexes sous forme rectangulaire, on cherche un nombre complexe $a + bj$ qui est le résultat de l'opération. Le résultat de l'opération est connu lorsqu'on a obtenu la partie réelle et la partie imaginaire. Il en est de même pour la division de deux nombres complexes : on doit trouver la partie réelle et la partie imaginaire du quotient. Pour y parvenir, on utilise le fait que le produit d'un nombre complexe par son conjugué donne un nombre réel, puisque $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

Ainsi, pour effectuer la division

$$\frac{2-3j}{5+4j},$$

on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur. Cette transformation ne change pas la valeur, mais permet d'obtenir un nombre réel au dénominateur, et on peut alors calculer la valeur de $a$ et de $b$ du quotient des deux nombres. On obtient alors :

$$\frac{2-3j}{5+4j} = \frac{2-3j}{5+4j} \times \frac{5-4j}{5-4j} = \frac{10-15j-8i+12j^2}{25+16} = \frac{-2-23j}{41}, \text{ puisque } j^2 = -1.$$

Le quotient est alors exprimé sous la forme $a + bj$, puisque :

$$\frac{2-3j}{5+4j} = \frac{-2-23j}{41} = \frac{-2}{41} + \frac{23}{41}j.$$

**PROCÉDURE**

**Division de deux nombres complexes, forme rectangulaire**

1. Multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.
2. Simplifier et écrire le résultat sous la forme $a + bj$.

Dans certaines situations, il faudra effectuer les opérations au dénominateur avant d'appliquer cette procédure. Il est toujours important de bjen analyser la situation avant de commencer les manipulations algébriques.

**EXEMPLE 10.1.5**

Effectuer les divisions suivantes :

a) $\dfrac{5-2j}{-4+3j}$ b) $\dfrac{7+4j}{3j}$ c) $\dfrac{-2+7j}{(4-3j)(3+5j)}$

***Solution***

a) En multipliant le numérateur et le dénominateur par $-4-3j$,

$$\frac{5-2j}{-4+3j}=\frac{5-2j}{-4+3j}\times\frac{-4-3j}{-4-3j}=\frac{-20-15i+8j+6j^2}{16+9}=-\frac{26}{25}-\frac{7}{25}j.$$

b) Pour que le dénominateur soit un nombre réel, il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par $j$, ce qui donne :

$$\frac{7+4j}{3j}=\frac{7+4j}{3j}\times\frac{j}{j}=\frac{7j+4j^2}{3j^2}=\frac{-4+7j}{-3}=\frac{4}{3}-\frac{7}{3}j.$$

c) Dans cette situation, il est préférable d'effectuer d'abord le produit au dénominateur. On obtient :

$$\frac{-2+7j}{(4-3j)(3+5j)}=\frac{-2+7j}{27+11j}=\frac{-2+7j}{27+11j}\times\frac{27-11j}{27-11j}=\frac{23}{850}+\frac{211}{850}j.$$

**EXEMPLE 10.1.6**

Déterminer $z\in\mathbb{C}$ tel que :

a) $(2-3j)z=6+17j$ b) $z=\dfrac{3}{3-4j}+\dfrac{5+j}{3-j}$

***Solution***

a) On cherche $z=a+bj$ tel que $(2-3j)z=6+17j$. On a alors :

$$\mathrm{z}=\frac{6+17\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}=\frac{6+17\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}\times\frac{2+3\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=\frac{12+34\mathrm{i}+18\mathrm{i}+51\mathrm{i}^2}{13}=-3+4\mathrm{i}$$

On trouve donc $z=-3+4j$.

b) Pour additionner le fraction, il faut les mettre au même dénominateur. Le plus simple est de rationnaliser les fractions complexes d'abord. On obtient

$$z=\frac{3}{3-4j}+\frac{5+j}{3-j}=\frac{3}{3-4j}\times\frac{3+4j}{3+4j}+\frac{5+j}{3-j}\times\frac{3+j}{3+j}$$
$$=\frac{9+12j}{25}+\frac{14+8j}{10}.$$

Le plus petit commun multiple des dénominateurs est 50, c'est le dénominateur commun. On obtient

$$z=\frac{3}{3-4j}+\frac{5+j}{3-j}=\frac{9+12j}{25}+\frac{14+8j}{10}$$
$$=\frac{18+24j}{50}+\frac{70+40j}{50}=\frac{88}{50}+\frac{64}{50}j=\frac{44}{25}+\frac{32}{25}j.$$

Un peu *d'histoire*

## NOMBRES COMPLEXES

On est porté à penser que les nombres complexes sont apparus dans la résolution des équations quadratiques. En réalité, lorsque les mathématiciens rencontraient des racines de nombres négatifs en résolvant une équation quadratique, ils déclaraient le problème impossible. Dans un ouvrage intitulé *Les Métriques* (retrouvé en 1896), Héron d'Alexandrie (75-150) est confronté à l'extraction d'une racine négative dans la résolution d'un problème sur les pyramides. Vers la même époque, Diophante d'Alexandrie, en tentant de résoudre une équation qui en écriture moderne donne :

$$336x^2 - 172x + 24 = 0,$$

est confronté au même problème et considère lui aussi que le problème est insoluble car il ne peut concevoir un tel résultat. Épisodiquement, au cours de l'histoire, les mathématiciens ont rencontré des racines de nombres négatifs et ont déclaré que le problème était insoluble.

Dans son *Ars Magna*, Jérôme Cardan (1501-1576), pose le problème suivant (NH Cardan01) :

> Diviser 10 en deux parties telles que le produit des parties soit 40.

Il s'empresse d'ajouter, sans dire pourquoi, que le problème est manifestement impossible. Manifestant sa grande curiosité intellectuelle et son esprit frondeur, il ajoute cependant « sic tamen operabimur » (néanmoins, nous opérerons). L'équation obtenue est :

$$x(10 - x) = 40 \text{ ou } x^2 - 10x = -40.$$

Il applique alors la procédure de complétion du carré et obtient :

$$x^2 - 10x + 25 = 25 - 40, \text{ d'où } (x - 5)^2 = -15.$$

Il en tire $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$ et montre que la somme est 10 et que le produit est 40. Il indique alors que les expressions obtenues sont « réellement sophistiquées » et que poursuivre leur étude serait « aussi subtile qu'inutile ».

Cardan applique la méthode de résolution des équations cubiques développée par Tartaglia (NH Tartaglia01). En termes modernes, la démarche consiste, par un changement de variable, à ramener l'équation sous la forme $x^3+px=q$ et à exprimer une solution à l'aide de radicaux en termes de $p$ et de $q$. En appliquant cette démarche à

$$x^3 - 15x = 4,$$

il obtient $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$, ce qui semble être une impasse. Cependant, on vérifie facilement que l'équation admet 4 comme solution. De plus, par division des polynômes, on obtient que

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$$

et l'équation $x^3 - 15x = 4$ s'écrit $(x - 4)(x^2 + 4x + 1) = 0$.

Il est alors facile de compléter la solution en adoptant la méthode de complétion du carré de Al-Khawarizmi (NH Al-Khawarizmi02). On obtient

$$x^2 + 4x + 1 = x^2 + 4x + 4 - 3 = (x + 2)^2 - 3 = 0.$$

On en tire $(x + 2)^2 = 3$ et $x+2=\pm\sqrt{3}$, d'où $x=-2\pm\sqrt{3}$.

L'équation $x^3 - 15x = 4$ admet donc trois racines réelles,

$$4, -2+\sqrt{3} \text{ et } -2-\sqrt{3}.$$

Laquelle de ces racines est obtenue par la méthode générale de résolution des équations cubiques ? En d'autres mots, laquelle est représentée par

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}\ ?$$

Vers 1560, l'italien Raffaële Bombelli fut le premier à énoncer les règles de manipulation des racines carrées de quantités négatives. Il s'est servi des expressions de la forme $a+b\sqrt{-1}$ en leur appliquant les règles de l'algèbre pour étudier l'expression obtenue par Cardan et ne rencontra aucune incohérence. Dans son *Algèbre*, publiée en 1572, il montre comment déterminer la racine réelle exacte en manipulant les deux expressions comportant la racine carrée des quantités négatives obtenues par Cardan. Il eut l'intuition que les radicaux pouvaient être reliés lorsque les quantités sous les radicaux sont reliées. Il a alors exprimé l'expression obtenue par Cardan sous la forme :

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}-\sqrt[3]{-2+11\sqrt{-1}}.$$

Puis, il cherche s'il est possible de déterminer des nombres $a$, $b$, $c$ et $b$ tels que :

$$\left(a+b\sqrt{-1}\right)^3=2+11\sqrt{-1} \text{ et } \left(c+d\sqrt{-1}\right)^3=-2+11\sqrt{-1}.$$

Sans dévoiler comment il y parvient, il trouve $a = -c = 2$ et $b = b = 1$, soit :

$$\left(2+1\sqrt{-1}\right)^3=2+11\sqrt{-1} \text{ et } \left(-2+1\sqrt{-1}\right)^3=-2+11\sqrt{-1}.$$

Il est donc possible d'extraire les racines cubiques,

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=\sqrt[3]{\left(2+1\sqrt{-1}\right)^3}=2+1\sqrt{-1},$$

$$\sqrt[3]{-2+11\sqrt{-1}}=\sqrt[3]{\left(-2+1\sqrt{-1}\right)^3}=-2+1\sqrt{-1}.$$

L'expression obtenue par Cardan donne alors,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} \\ &= \left(2+1\sqrt{-1}\right)-\left(-2+1\sqrt{-1}\right)=4. \end{aligned}$$

La manipulation des racines carrées de quantités négatives dans la résolution d'une équation cubique permet d'obtenir un nombre réel. Il n'est plus possible de simplement rejeter comme insoluble l'équation qui, en cours de solution, fait apparaître de telles racines. La reconnaissance de ces entités comme objets mathématiques devient incontournable avec les travaux de Bombelli.

## 10.2 Exercices

1. Indiquer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.
   a) $z = 5 - 2j$
   b) $z = 8j$
   c) $z = 5$
   d) $z = (-3 + 4j) + (2 - j)$
   e) $z = (2 - 4j)(1 - 3j)$
   f) $z = 2j(3 - 5j)$

2. Trouver les racines des équations suivantes.
   a) $x^2 + 4x + 5 = 0$ b) $2x^2 - 3x + 4 = 0$
   c) $3x^2 + 8x + 6 = 0$ d) $2x^2 + 4x + 5 = 0$

3. Donner le nombre conjugué des expressions suivantes.
   a) $z = 7 - 2j$ b) $z = -3 - 4j$
   c) $z = 2 - j$ d) $z = -7$
   e) $z = 2i(4 - 3j)$ f) $z = (3 + j)(2 - j)$

4. Effectuer les opérations suivantes et donner le résultat sous la forme $a + bj$.
   a) $(2 + j) - 5$ b) $4\,(2 + j)$
   c) $(3 + j) + (4 - 2j)$ d) $(2 + j)^2$
   e) $(1 - j)^3 + (1 - 2j)^2$ f) $(3 - 5j)(-2 - j)$
   g) $(2 + j)(4 - 2j)$ h) $\dfrac{2+j}{3-2\,i}$
   i) $\dfrac{1}{3-4j}+\dfrac{2}{1-j}$ j) $\dfrac{(5-3j)^2}{3-2j}$

5. Exprimer les nombres suivants sous la forme $a + bj$.
   a) $j^7 - j^8$ b) $(2 + j)^4$
   c) $(-j)^{33}$
   d) $j + j^2 + j^3 + j^4 + j^5 + j^6 + j^7 + j^8$

6. Soit $z = a + bj$ et $u = c + dj$, deux nombres complexes. Montrer que :
   a) $\overline{\overline{z}} = z$ b) $\overline{z+u}=\overline{z}+\overline{u}$
   c) $\overline{z-u}=\overline{z}-\overline{u}$ d) $\overline{zu}=\overline{z}\ \overline{u}$
   e) $\overline{\left(\dfrac{z}{u}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{u}}$ f) $\dfrac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}}=\dfrac{-a}{b}\,j$

7. Soit $z = a + bj$, un nombre complexe. Montrer que :
   a) $z+\overline{z}=2a=2\mathrm{Re}(z)$
   b) $z-\overline{z}=2bj=2\mathrm{Im}(z)\,j$
   c) $\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{a^2+2abj-b^2}{a^2+b^2}$, si $z \neq 0$
   d) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}\,j$, si $z \neq 0$

8. Soit $z = a + bj$ et $u = c + dj$, deux nombres complexes. Montrer que :
   a) $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abj$
   b) $zu = (ac - bd) + j(ad + bc)$
   c) $\dfrac{z}{u}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\,j$
   d) $z(1 + 0j) = z$

9. Déterminer $z$ et $u \in \mathbb{C}$ tels que :
   a) $(2 + 5j)z = 32 - 22j$
   b) $(7 + 5j)z = 11 + 23j$
   c) $(2 - j)z = 16 + 2j$
   d) $z^2 = 8j$
   e) $z^2 = 3 - 4j$
   f) $z^2 + 21 + 20j = 0$

10. Soit $z = a + bj$, un nombre complexe.
    a) Montrer que le module du vecteur représentant $z$ est $\| z \|=\sqrt{a^2+b^2}$.
    b) Montrer que la direction du vecteur représentant $z$ est $m = b/a$.

11. Soit $z = 3 + 2j$, un nombre complexe.
    a) Représenter $z$ dans un système d'axes.
    b) Effectuer le produit $jz$ et représenter graphiquement le nombre obtenu.
    c) Montrer que les vecteurs $z$ et $jz$ sont perpendiculaires (le produit des pentes est $-1$).

12. Soit $z = a + bj$, un nombre complexe.
    a) Montrer que la multiplication de $z$ par $j$ a pour effet une rotation de 90°.
    b) Soit $k$, un nombre réel quelconque. Montrer que le module de $kz$ est $\|kz\|=|k|\|z\|$.
    c) Montrer que le module de $jz$ est $\|jz\|=\|z\|$.
    d) Montrer que le vecteur $(kj)z$ est perpendiculaire à $z$ et que $\|kjz\|=|k|\|z\|$.

# 10.3 Forme polaire

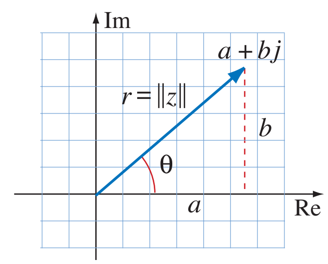
Les nombres complexes ont une particularité intéressante : on peut les exprimer sous diverses formes. À la section précédente, nous avons vu la forme rectangulaire (ou cartésienne) des nombres complexes, mais on peut également les représenter sous forme trigonométrique, polaire et exponentielle. Voyons maintenant ces formes plus en détail.

## Forme trigonométrique

### Argument d'un nombre complexe

Soit $z = a + bj$, un nombre complexe qui fait un angle $\theta$ avec la direction positive de l'axe des réels. L'**argument** de $z$, noté arg $z$ ou simplement $\theta$, est l'angle, orie nté à la manière trigonométrique, que le vecteur fait avec la direction positive de l'axe des réels. Il est défini par :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{et} \quad \theta = \begin{cases} \alpha & \text{si } a > 0 \\ \alpha \pm 180° & \text{si } a < 0 \\ 90° & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \\ -90° & \text{si } a = 0 \text{ et } b < 0 \end{cases}$$




On peut exprimer tout nombre complexe en fonction de son module et de son argument. En effet, dans le triangle rectangle formé, on a :

$$a = r \cos \theta \quad \text{et} \quad b = r \sin \theta.$$

En substituant ces expressions dans $z = a + bj$, on obtient :

$$z = a + jb = r \cos \theta + jr \sin \theta = r\,(\cos \theta + j \sin \theta).$$

Grâce à la définition de cos $\theta$ et de sin $\theta$ sur le cercle trigonométrique, ces formules sont valides pour tout angle $\theta$.

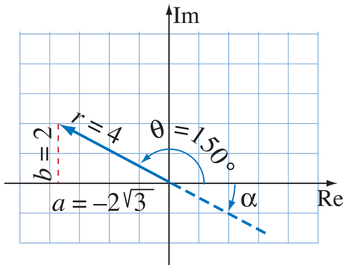
### Forme trigonométrique d'un nombre complexe

L'expression :

$$z = r\,(\cos \theta + j \sin \theta)$$

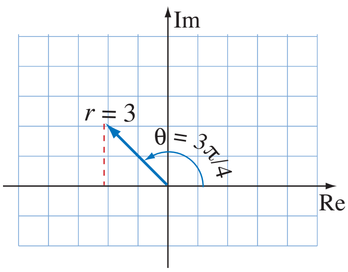
est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe. On constate que le nombre est décrit seulement par son module et son argument.

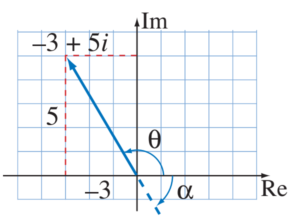
En représentant un nombre complexe par un vecteur, celui-ci forme un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le module du nombre complexe et dont les mesures des côtés de l'angle droit sont données par la partie réelle et la partie imaginaire. On peut donc exprimer le module et la tangente de l'angle formé avec l'axe des réels en fonction des coefficients du nombre. De la même façon, connaissant le module et l'angle formé, il est possjble de trouver les coefficients. Il suffit de résoudre un triangle rectangle en ayant recours aux définitions des fonctions trigonométriques.




**REMARQUE**

La représentation graphique aide à déterminer la valeur de l'argument, qui peut également s'exprimer en radians.




### EXEMPLE 10.3.1

Représenter graphiquement le nombre complexe donné et écrire celui-ci sous la forme demandée.

a) $z = -2\sqrt{3} + 2j$ sous forme trigonométrique

b) $z = 3(\cos 3\pi/4 + j\sin 3\pi/4)$ sous forme rectangulaire.

c) $z = -3 + 5j$ sous forme trigonométrique

**Solution**

a) Le module du nombre complexe est :

$$r = \|z\| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4.$$

De plus, $\alpha = \arctan\left(\dfrac{2}{-2\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -30°,$

et $\theta = \alpha + 180° = 150°$, car la représentation graphique permet de constater que $90° < \theta < 180°$. La forme trigonométrique est donc :

$$z = 4(\cos 150° + j\sin 150°) = 4 \text{ cis } 150°.$$

b) Pour représenter graphiquement le nombre $z$, on trace un vecteur de longueur 3 et d'argument $3\pi/4$ rad, ce qui donne la représentation ci-contre. Pour trouver la forme rectangulaire, il faut d'abord évaluer le cosinus et le sinus de l'argument de $z$; on obtient ainsi

$$z = 3(\cos 3\pi/4 + j \sin 3\pi/4) = 3\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-3\sqrt{2}}{2} + j\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

c) Pour représenter graphiquement le nombre $z$, on trace un vecteur dont l'origine est (0; 0) et dont l'extrémité est (–3; 5). Cela donne :

$$r = \|z\| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} = 5{,}38.$$

et
$$\alpha = \arctan\left(\frac{-3}{5}\right) = -1{,}03 \text{ rad.}$$

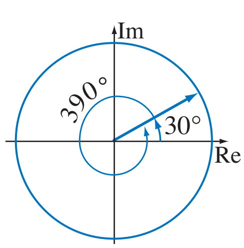
Puisque le vecteur est dans le deuxième quadrant,

$$\theta = -1{,}03 + \pi = 2{,}11 \text{ rad.}$$

La forme trigonométrique est :

$$z = 5{,}83(\cos 2{,}11 + j\sin 2{,}11).$$

## Égalité de nombres complexes (forme trigonométrique)




La représentation trigonométrique d'un nombre complexe n'est pas unique. En effet, si l'on représente graphiquement les nombres complexes :

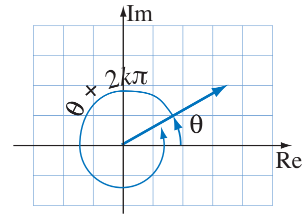
$$4(\cos 30° + j\sin 30°)$$
$$4(\cos 390° + j\sin 390°)$$

ou encore le nombre : $4[\cos(-330°) + j\sin(-330°)]$,

on obtient toujours le même nombre ou le même vecteur. De plus, si l'on veut trouver la forme cartésienne de ces nombres, on obtient chaque fois

$$4\left(\sqrt{3}/2 + j/2\right) = 2\sqrt{3} + 2j.$$

On doit nécessairement tenir compte de cette caractéristique lorsque deux nombres complexes sous forme trigonométrique sont égaux. Deux nombres complexes sous forme trigonométrique seront donc égaux s'ils ont le même module et si la différence de leurs arguments est égale à un multiple entier de 360° (ou 2π rad), puisque les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 360°.




**THÉORÈME**

**Égalité de nombres complexes (forme trigonométrique)**

Soit $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, deux nombres complexes sous for me trigonométrique. Alors, $z_1 = z_2$ si et seulement si :

$$r_1 = r_2 \text{ et } \theta_1 = \theta_2 + k\,360°, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

**Forme trigonométrique du conjugué**

Un nombre complexe $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ et son conjugué ont le même module $r$. De plus, si θ est l'argument du nombre $z$, l'argument de son conjugué est −θ. Donc, $\bar{z} = r\,[(\cos(-\theta) + j\ \sin(-\theta)]$.

De plus, puisque $\overline{a+bj} = a - bj$, on a $\bar{z} = r(\cos\ \theta - j\ \sin\ \theta)$.

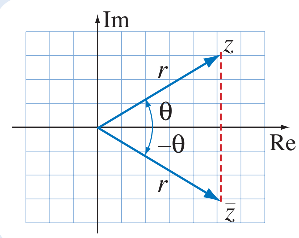
**Forme trigonométrique du conjugué**

Soit $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$, un nombre complexe sous forme trigonométrique. Le **conjugué** de $z$ est alors :

$$\bar{z} = r\ (\cos(-\theta) + j\ \sin(-\theta))$$

ou encore

$$\bar{z} = r\ (\cos\ \theta - j\ \sin\ \theta)$$




## Forme polaire

Dans la forme trigonométrique des nombres complexes, les seuls paramètres sont le module et l'argument; il est donc suffisant de donner la valeur de ces paramètres pour caractériser un nombre complexe. Un nombre complexe $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ peut être présenté sous forme polaire et s'écrit

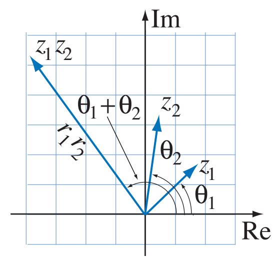
$$z = r\angle\theta.$$

Le nombre est représenté par un vecteur de longueur $r$ et d'argument θ.

La forme polaire véhicule deux éléments d'information : le module et l'argument du nombre complexe. Pour multiplier ou diviser des nombres complexes sous forme polaire, il est suffisant de savoir comment combjner les modules et les arguments. Dans les théorèmes qui suivent, nous utilisons la forme trigonométrique pour démontrer comment effectuer ces opérations.

Soit $z_1 = r_1\angle\theta_1$ et $z_2 = r_2\angle\theta_2$, deux nombres complexes sous forme polaire. Le produit donne alors :

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (r_1\angle\theta_1)(r_2\angle\theta_2) \\ &= [r_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)]\,[r_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)], \text{ forme trigonométrique;} \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + j^2\sin\theta_1\sin\theta_2) + j(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + j(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2)], \text{ identités trigonométriques;} \\ &= r_1r_2\angle(\theta_1 + \theta_2), \text{ en exprimant le résultat sous forme polaire.} \end{aligned}$$



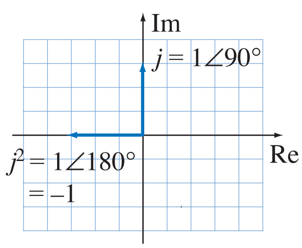

On obtient donc que le produit est $z_1z_2 = r_1r_2\angle(\theta_1 + \theta_2)$.

**THÉORÈME**

**Produit de nombres complexes sous forme polaire**

Soit $z_1 = r_1\angle\theta_1$ et $z_2 = r_2\angle\theta_2$, deux nombres complexes sous forme polaire. Le **produit** de ces nombres, noté $z_1z_2$, est donné par

$$z_1z_2 = r_1r_2\angle(\theta_1 + \theta_2).$$



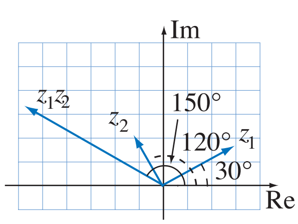

Pour calculer le produit de deux nombres complexes sous forme polaire, il suffit donc de multiplier les modules pour obtenir le module du produit et d'additionner les arguments pour obtenir l'argument du produit. Cela signifie que l'effet du produit est une rotation qui accompagne une dilatation ou une compression.

Ainsi, pour calculer $j^2$ selon cette procédure, on a :

$$\begin{aligned} j^2 &= jj = (1\angle 90°)(1\angle 90°) \\ &= 1\angle 180° = 1(\cos 180° + j\sin 180°) \\ &= -1 + j0 = -1 \end{aligned}$$

**EXEMPLE 10.3.2**

Soit $z_1 = 3\angle 30°$ et $z_2 = 2\angle 120°$, deux nombres complexes sous forme polaire. Calculer le produit de ces nombres et représenter ces nombres graphiquement, ainsi que leur produit.




***Solution***

Le produit se calcule en multipliant les modules et en additionnant les arguments. On obtient

$$z_1z_2 = (3\angle 30°)(2\angle 120°) = 6\angle(30° + 120°) = 6\angle(150°).$$

Le produit est donc représenté par un vecteur de longueur 6 dont l'argument est 150°.

Voyons maintenant comment diviser des nombres complexes sous forme polaire.

Soit $z_1 = r_1\angle\theta_1$ et $z_2 = r_2\angle\theta_2$, deux nombres complexes sous forme polaire. Le quotient de ces nombres est alors :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2}$$

$$= \frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2} \times \frac{1\angle(-\theta_2)}{1\angle(-\theta_2)},$$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par $1\angle(-\theta_2)$;

$$= \frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2} \times \frac{1\angle(-\theta_2)}{1\angle(-\theta_2)},$$ en multipliant les modules et en additionnant les arguments;

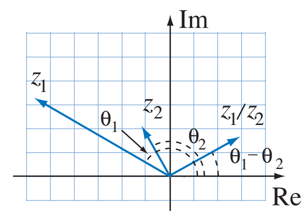
$$= \frac{r_1\angle(\theta_1 - \theta_2)}{r_2\angle 0}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2), \text{ car } r_2\angle 0 = r_2(\cos 0 + j\sin 0) = r_2(1 + 0j) = r_2.$$

On obtient donc que le quotient est $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2)$.

**REMARQUE**

La division des nombres complexes étant l'opération inverse de la multiplication, il est logique que le module du quotient soit le quotient des modules et que l'argument du quotient soit la différence des arguments.




**THÉORÈME**

**Quotient de nombres complexes sous forme polaire**

Soit $z_1 = r_1\angle\theta_1$ et $z_2 = r_2\angle\theta_2$, deux nombres complexes sous forme polaire. Le **quotient** de ces nombres, noté $z_1/z_2$, est donné par :

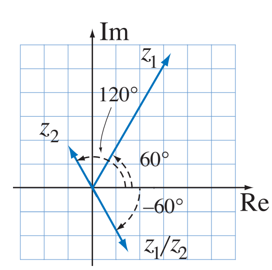
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2).$$

**REMARQUE**

La multiplication et la division des nombres complexes peuvent s'effectuer sous l'une ou l'autre forme; on obtient toujours le même nombre exprimé sous des formes différentes. Cependant, ces opérations sont plus simples à effectuer sous forme polaire.

## EXEMPLE 10.3.3

Soit $z_1 = 6\angle 60°$ et $z_2 = 2\angle 120°$, deux nombres complexes sous forme polaire. Calculer le quotient $z_1/z_2$. Représenter ces nombres graphiquement ainsi que le quotient.




***Solution***

On divise les modules et on soustrait les arguments, ce qui donne :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6\angle 60°}{2\angle 120°}$$

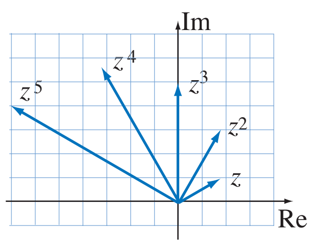
$$= \frac{6}{2}\angle(60° - 120°) = 3\angle(-60°)$$

### Puissance d'un nombre complexe

Pour élever un nombre complexe à une puissance entière $n$, revient à d'effectuer le processus de multiplication $n$ fois.

**EXEMPLE 10.3.4**

Soit $z = 1{,}4\angle 30°$, un nombre complexe sous forme polaire. Trouver $z^2$, $z^3$, $z^4$ et $z^5$ et représenter ces nombres graphiquement.




***Solution***

Pour élever au carré, on effectue la multiplication du nombre par lui-même, ce qui donne :

$$\begin{aligned} z^2 &= z \times z = (1{,}4\angle 30°) \times (1{,}4\angle 30°) \\ &= (1{,}4)^2\angle(30° + 30°) = (1{,}4)^2\angle 60° \end{aligned}$$

Pour élever au cube, on effectue la multiplication de $z$ par $z^2$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} z^3 &= z \times z^2 = (1{,}4\angle 30°) \times [(1{,}4)^2\angle 60°] \\ &= (1{,}4)^3\angle(30° + 60°) = (1{,}4)^3\angle 90° \end{aligned}$$

Pour élever à la puissance 4, on calcule le produit de $z$ par $z^3$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} z^4 &= z \times z^3 = (1{,}4\angle 30°) \times [(1{,}4)^3\angle 90°] \\ &= (1{,}4)^4\angle(30° + 90°) = (1{,}4)^4\angle 120° \end{aligned}$$

Pour élever à la puissance 5, on calcule le produit de $z$ par $z^4$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} z^5 &= z \times z^4 = (1{,}4\angle 30°) \times [(1{,}4)^4\angle 120°] \\ &= (1{,}4)^5\angle(30° + 120°) = (1{,}4)^5\angle 150° \end{aligned}$$

On remarque que $z^5 = (1{,}4\angle 30°)^5 = (1{,}4)^5\angle(5 \times 30°)$.

**THÉORÈME**

**Théorème de Moivre**

Soit $z = r\angle\theta$, un nombre complexe sous forme polaire. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = r^n\angle n\theta.$$

La démonstration du théorème de Moivre (voir la note historique, p. 236) se fait par récurrence, méthode de preuve que nous ne présenterons pas ici. Nous allons donc admettre ce théorème sans démonstration et nous contenter de l'utiliser.

**EXEMPLE 10.3.5**

Soit $z = 2\angle 30°$, un nombre complexe sous forme polaire.

a) Trouver $z^5$ et exprimer le résultat sous forme rectangulaire.

b) Trouver $z^{-3}$ et exprimer le résultat sous forme rectangulaire.

■ ***Solution***

a) Par le théorème de Moivre, on a $z^5 = 2^5\angle 150°$.

En exprimant le résultat sous forme rectangulaire, on obtient :

$$z^5 = 2^5\angle 150° = 2^5(\cos\ 150° + j\ \sin\ 150°) = 2^5\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right)$$

$$= -2^4\sqrt{3} + j\ 2^4 = -16\sqrt{3} + j\ 16.$$

b) Par le théorème de Moivre, on a $z^{-3} = 2^{-3}\angle(-90°)$.

En exprimant le résultat sous forme rectangulaire, on obtient :

$$z^{-3} = 2^{-3}\angle(-90°) = 2^{-3}[\cos(-90°) + j\ \sin(-90°)]$$

$$= \frac{1}{2^3}[0 + j\ (-1)] = -\frac{j}{8}.$$

### Racines d'un nombre complexe

Soit $u$, un nombre complexe. Par définition, un nombre complexe $z$ est une racine $n^e$ de $u$ si et seulement si $z^n = u$. On peut, en appliquant le théorème de Moivre et l'égalité des nombres complexes sous forme polaire (ou trigonométrique), calculer les racines $n^e$ d'un nombre complexe sous forme polaire. Pour illustrer ce propos, trouvons les racines cubjques de $u = 8j$.

Exprimons d'abord $u$ sous forme polaire; on obtient $u = 8j = 8\angle 90°$. On cherche un nombre $z = r\angle\theta$ tel que $z^3 = u$. Puisque $z^3 = r^3\angle 3\theta$, par le théorème de Moivre, on doit donc résoudre l'équation :

$$r^3\angle 3\theta = 8\angle 90°.$$

Par l'égalité des nombres complexes sous forme polaire, cela donne :

$$r^3 = 8 \text{ et } 3\theta = 90° + k\ 360°.$$

On obtient ainsi :

$$r = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ et } \theta = \frac{90° + k\ 360°}{3} = 30° + k\ 120°, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

En pratique, on aura seulement trois racines cubjques. Ces racines sont obtenues de la façon en assignant des valeurs à $k$ en débutant à 0

$$z_0 = 2\angle 30° = 2(\cos\ 30° + j\sin\ 30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\right) = \sqrt{3} + j.$$

$$z_1 = 2\angle 150° = 2(\cos\ 150° + j\sin\ 150°) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\right) = -\sqrt{3} + j.$$

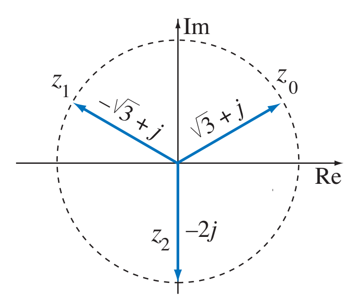
$$z_2 = 2\angle 270° = 2(\cos\ 270° + j\sin\ 270°) = 2(0 - 1j) = -2j.$$

$$z_3 = 2\angle(30° + 360°) = 2\angle 30° = \sqrt{3} + j.$$

On constate que $z_0 = z_3$. En donnant d'autres valeurs à $k$, on obtiendrait $z_1 = z_4$ et $z_{-1} = z_2 = z_5$, etc. Les valeurs se répètent périodiquement si l'on substitue d'autres valeurs à $k$. Il est donc suffisant d'assigner à $k$ les valeurs 0, 1 et 2.

**REMARQUE**

Si l'on représente graphiquement les racines cubiques de $8j$, on constate qu'elles sont disposées symétriquement avec des angles de $2\pi/3$ rad (ou 120°) entre elles.



**REMARQUE**

Un nombre complexe a quatre racines quatrièmes faisant des angles de $\pi/2$ rad (ou 90°) entre elles. Un nombre complexe a cinq racines cinquièmes faisant des angles de $2\pi/5$ rad (ou 72°) entre elles, etc. La racine obtenue en posant $k = 0$ est appelée ***racine principale.***

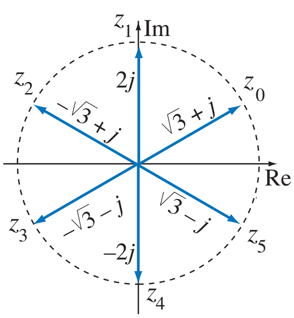
**PROCÉDURE**

**Extraction des racines $n^e$ d'un nombre complexe**

1. Écrire le nombre sous forme polaire : $u = s\angle\varphi$.
2. Considérer une racine $z = r\angle\theta$, telle que $z^n = r^n\angle n\theta = s\angle\varphi$.
3. Calculer le module des racines, $r^n = s$, d'où $r = \sqrt[n]{s}$.
4. Calculer la forme générale de l'argument
$\theta = \dfrac{\phi + 2k\pi}{n}$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
5. Écrire les racines $z_0$, $z_1$, $z_2$, ..., $z_{n-1}$ et représenter graphiquement si nécessaire.

**EXEMPLE 10.3.6**

Extraire les racines sixièmes de $u = -64$ et représenter graphiquement.




**Solution**

Exprimons d'abord $u$ sous forme polaire, ce qui donne :

$u = 64\angle\pi = 64\angle 180°$. On cherche $z = r\angle\theta$ tel que :

$$z^6 = r^6\angle 6\theta = 64\angle 180°$$

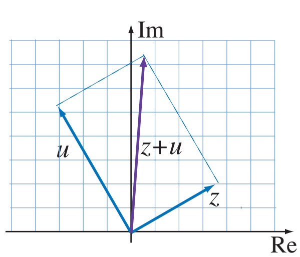
D'où $r^6 = 64$ et $r = 2$. De plus, $6\theta = 180° + k360°$, ce qui donne $\theta = 30° + k60°$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Les racines sont donc :

$$z_0 = 2\angle 30° = \sqrt{3} + j, \qquad z_1 = 2\angle 90° = 2j$$
$$z_2 = 2\angle 150° = -\sqrt{3} + j, \qquad z_3 = 2\angle 210° = -\sqrt{3} - j$$
$$z_4 = 2\angle 270° = -2j, \qquad z_5 = 2\angle 330° = \sqrt{3} - j$$

Il est assez simple de multiplier, de diviser, d'élever à une puissance ou d'extraire la racine $n^e$ d'un nombre complexe donné sous forme polaire. Cependant, pour additionner, il faut passer par la forme rectangulaire.

**EXEMPLE 10.3.7**

Représenter graphiquement et effectuer la somme des nombres complexes $z = 4\angle 30°$ et $u = 6\angle 120°$.




**Solution**

$$\begin{aligned} z + u &= (4\angle 30°) + (6\angle 120°) \\ &= 4(\cos 30° + j\sin 30°) + 6(\cos 120° + j\sin 120°) \\ &= (4\cos 30° + 6\cos 120°) + j(4\sin 30° + 6\sin 120°) \\ &= 0{,}464\ldots + j7{,}196\ldots = a + bj \end{aligned}$$

On a ainsi $r = \sqrt{a^2 + b^2} = 7{,}211\ \ldots$ et $\alpha = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) = 86{,}309\ \ldots°$.

On a donc $z + u = 7{,}211\angle 86{,}309°$.

## Forme exponentielle

On peut montrer que la fonction $f(\theta) = e^{j\theta}$ peut s'exprimer sous la forme :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + j\sin\theta,$$

que l'on appelle **identité d'Euler**. On déduit de cette égalité qu'un nombre complexe $z = r\angle\theta$ peut s'écrire :

$$z = re^{j\theta}.$$

C'est la **forme exponentielle** d'un nombre complexe. En écrivant –1 sous forme exponentielle, on obtient :

$$-1 = 1e^{j\pi}, \text{ d'où } e^{j\pi} + 1 = 0.$$

Cette égalité, dont Euler était très fier, met en relation cinq constantes fondamentales des mathématiques, soit 0, 1, $j$, $e$ et $\pi$.

On peut multiplier, diviser, élever à une puissance ou extraire les racines d'un nombre complexe sous forme exponentielle en adaptant les procédures à suivre sous forme polaire.

**THÉORÈME**

**Opérations sous forme exponentielle**

Soit $z = re^{j\theta}$ et $u = se^{j\phi}$, deux nombres complexes sous forme exponentielle.

Le produit de ces nombres est $zu = rse^{j(\theta+\phi)}$.

Le quotient est $\dfrac{z}{u} = \dfrac{r}{s}e^{j(\theta-\phi)}$.

La puissance $n^{e}$ de $z$ est $z^n = r^n e^{jn\theta}$.

La racine $n^{e}$ de $z$ est $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta+2k\pi)/n}$, pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

On peut également, en se servant de la forme exponentielle, définir le logarithme d'un nombre complexe. En effet :

$$\ln z = \ln(re^{j\theta}) = \ln r + \ln(e^{j\theta}) = \ln r + j\theta.$$

Ainsi, puisque $-1 = 1e^{j\pi}$, on a $\ln(-1) = j\pi$. Cependant, le logarithme d'un nombre négatif n'est pas unique. En effet, on a également :

$$-1 = 1e^{3j\pi}, \text{ d'où } \ln(-1) = 3j\pi$$

$$-1 = 1e^{5j\pi}, \text{ d'où } \ln(-1) = 5j\pi$$

Un peu *d'histoire*

## NOMBRES COMPLEXES, SUITE

Dans son ouvrage *Invention nouvelle en algèbre*, Albert Girard (1595-1632) en résolvant l'équation $x^4 = 4x - 3$ et donne quatre racines à l'équation, soit :

$$1,\ 1,\ \ -1-\sqrt{-2},\ \ -1+\sqrt{-2}.$$

Il est ainsi le premier scientifique à accepter explicitement l'existence des nombres complexes. Pour justifier l'acceptation des solutions comportant des racines carrées de quantités négatives, il indique qu'elles assurent la règle générale. Elles permettent de dire qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Girard eut l'intuition que les polynômes se comportent comme les nombres entiers. C'est-à-dire que tout facteur linéaire $x - a$ se comporte comme un nombre premier et que tout polynôme de degré $n$ peut se décomposer en un produit de $n$ facteurs linéaires. Cette intuition conduit inévitablement au théorème fondamental de l'algèbre à l'effet que le nombre de racines d'une équation est égal à son degré.

L'appellation *imaginaire* pour désigner la racine carrée d'une quantité négative est due à René Descartes (1595-1650) (NH Descartes01). Celui-ci classait les racines en trois groupes. Les racines positives étaient appelées *vraies racines*, les racines négatives étaient appelées *fausses racines*, les autres étant les *racines imaginaires.*

Plusieurs mathématiciens se sont intéressés aux nombres complexes par la suite, dont Abraham de Moivre (1667-1754) (NH De Moivre) qui établit que

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta.$$

Leonhard Euler (1707-1783) introduit la notation $i = \sqrt{-1}$ et la représntation exponentielel des nombres complexes. En factorisant l'identité $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, obtient

$$(\cos z + j\sin\ z)(\cos z - j\sin\ z) = 1.$$

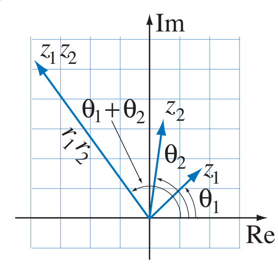
On lui doit également les formules suivantes :

$$e^{\pi} + 1 = 0, \quad j^{\,j} = e^{-\pi/2}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \ \text{ et } \ \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2}.$$

Son traité *Introductio in analysin Infinitorum*, écrit en 1745 et publié en 1748, qui contient les résultats qu'il a obtenus sur les nombres complexes, a permis de mettre de l'ordre dans les notations mathématiques. Les symboles sin, cos, $e$ et $\pi$ furent acceptés en raison de l'influence directe d'Euler. La lettre $e$, première lettre de son nom, fut choisie par lui pour désigner la base des logarithmes naturels.

Même si de grands mathématiciens se sont intéressés aux nombres complexes, l'existence de ces nombres n'était pas reconnue par tous pour autant. Cette reconnaissance est due en partie à leur représentation géométrique. Le premier mathématicien à faire une tentative en ce sens fut John Wallis (1616-1703), mais il fallut attendre l'arpenteur danois Caspar Wessel (1745-1818) pour avoir une représentation géométrique adéquate des nombres complexes. Malheureusement, son traité, écrit en danois, passa inaperçu jusqu'en 1897. Entre-temps, Jean Robert Argand (1768-1822) publia *Essai sur une manière de représenter les imaginaires dans les constructions géométriques* et récolta la gloire; son nom est resté attaché à la représentation géométrique des nombres complexes. Plusieurs mathématiciens étaient réticents à adopter la représentation géométrique des nombres complexes. En effet, en géométrie traditionnelle, le produit de deux lignes est interprété comme une surface mais dans la représentation graphique des nombres complexes, le produit de deux lignes est également une ligne ou un vecteur.




**Le produit de deux nombres complexes est représenté par une ligne (vecteur).**

Le mathématicien Carl Friendrich Gauss (1777-1855) a lui aussi développé une représentation des nombres en associant à chaque nombre complexe un point du plan cartésien. En adoptant ouvertement une représentation graphique des nombres complexes Gauss, et Cauchy (1789-1857), ont contribué à son adoption par la communauté mathématique. Cette représentation géométrique a permis divers développements et applications de ces nombres et le développement de leur algèbre des nombres complexes. À la fin du XVIII$^e$ siècle, la théorie des nombres complexes était à peu près complétée et, au XIX$^e$ siècle, s'amorça l'étude des fonctions complexes qui ont fourni des outils très importants pour l'étude de la mécanique des fluides.

Vers 1890, l'ingénieur américain Steinmetz eut l'idée d'utiliser les nombres complexes dans l'étude du courant alternatif. Cette utilisation a permis une grande simplification de la théorie des circuits électriques, d'où l'essor prodigieux que l'électricité et l'électronique ont connu depuis. Les nombres complexes ont également des applications intéressantes en calcul, car ils permettent de traiter facilement des problèmes difficiles ou impossibles à résoudre avec les seuls nombres réels. Plusieurs problèmes de physique (électricité, hydrodynamique, astronomie) sont également traités à l'aide des nombres complexes.

## 10.4 Exercices

1. Exprimer les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique.
   a) $-2 + 2j$ b) $1 - j\sqrt{3}$
   c) $-3$ d) $2j$
   e) $-5j$ f) $4$
   g) $-3 - 3j$ h) $-\sqrt{3} + j\sqrt{21}$

2. Exprimer les nombres complexes suivants sous forme rectangulaire.
   a) $4(\cos \pi/6 + j\sin \pi/6)$
   b) $2(\cos 5\pi/6 + j\sin 5\pi/6)$
   c) $5(\cos 2\pi/3 + j\sin 2\pi/3)$
   d) $2(\cos \pi/4 + j\sin \pi/4)$

3. Utiliser les valeurs remarquables des fonctions trigonométriques pour trouver la forme polaire des nombres suivants.
   a) $2 - 2j$ b) $\sqrt{3} - j$
   c) $-3 + j3\sqrt{3}$ d) $-4 + 4j$
   e) $-5$ f) $3j$
   g) $-2j$ h) $3 - 3j$

4. Déterminer la forme rectangulaire des nombres complexes suivants.
   a) $2\angle\pi/6$ b) $5\angle\pi/3$
   c) $3\angle-\pi/4$ d) $3\angle3\pi/4$
   e) $1{,}5\angle5\pi/3$ f) $4\angle0$
   g) $22\angle\pi$ h) $3\angle3\pi/2$

5. Écrire les nombres suivants sous forme polaire, effectuer les opérations indiquées et donner le résultat sous forme rectangulaire.
   a) $(1 + j)^5$ b) $(1 + j\sqrt{3})^6$
   c) $(-2 + 2j)^7$ d) $(\sqrt{3} + j)^7$

6. Écrire les nombres suivants sous forme polaire et effectuer les opérations indiquées en donnant le résultat sous forme rectangulaire.
   a) $(1 + j\sqrt{3})^4$ b) $\dfrac{1 + j\sqrt{3}}{1 - j\sqrt{3}}$
   c) $\dfrac{(1 + j)^3}{(\sqrt{3} + j)^2}$ d) $\dfrac{(-\sqrt{3} + j)(1 + j)}{1 + j\sqrt{3}}$

7. Déterminer les racines demandées et représenter graphiquement.
   a) Racines cubiques de $27\angle\pi/2$
   *b*) Racines carrées de $4\angle\pi/3$
   c) Racines quatrièmes de $-16$
   d) Racines cinquièmes de $-32$
   e) Racines cubiques de $64j$
   f) Racines cubiques de $-27j$

8. Résoudre les équations suivantes pour $z \in \mathbb{C}$.
   a) $z^4 + 1 = 0$ b) $z^5 - 1 = 0$
   c) $z^3 + 8 = 0$ d) $z^4 - 16 = 0$
   e) $z^5 - 8z^2 = 0$ f) $z^3 + 64j = 0$

9. À l'aide de la calculatrice, déterminer la forme polaire des nombres suivants.
   a) $-12 + 16j$ b) $2 - 4j$
   *c*) $-59 - 25j$ d) $700 + 200j$
   e) $0{,}48 - 1{,}53j$ f) $1{,}71 + 2{,}47j$

10. Effectuer les opérations suivantes sous la forme la plus appropriée et donner chaque réponse sous forme polaire et sous forme rectangulaire.
    a) $(16\angle32°)\,(7\angle29°)$
    b) $(3\angle26°)^5$
    c) $(4\angle35°)\,(2{,}3\angle17°)$
    d) $\dfrac{3\angle38°}{2\angle18°}$
    e) $(3\angle35°) + (4\angle27°)$
    f) $(5{,}2\angle53°)(4{,}7\angle84°)$
    g) $(8\angle49°) - (4\angle19°)$

11. Utiliser la forme polaire pour montrer chacune des identités suivantes.

    a) $j(\sqrt{3}+j)(1-j\sqrt{3})=2+j2\sqrt{3}$

    b) $\dfrac{4j}{(2-2j)}=-1+j$

12. Utiliser la forme polaire pour calculer le module et l'argument de $z$ dans les expressions suivantes.

    a) $z=\dfrac{-4}{1+j\sqrt{3}}$

    b) $z=\dfrac{2j}{-4+4j}$

13. Utiliser le théorème de Moivre pour démontrer les égalités suivantes.

    a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

    b) $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$

    c) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3 \cos\theta \sin^2\theta$

    d) $\sin 3\theta = 3 \cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta$

# Exercices récapitulatifs

1. Effectuer les opérations demandées.

   a) $(3 + 2j) + (5 - 2j)$

   b) $(4 - 3j) - (2 - 5j)$

2. Calculer les produits en utilisant la forme rectangulaire.

   a) $(3 + 2j) \times (5 - 2j)$

   b) $(4 - 3j) \times (2 - 5j)$

   c) $(5 + 3j) \times (5 - 3j)$

   d) $(2 - 3j) \times (4 - 5j)$

   e) $(8 + j) \times (4 - 2j) \times (3 + j)$

3. Calculer les quotients en utilisant la forme rectangulaire, donner le résultat sous la forme $a + bj$.

   a) $\dfrac{2+3j}{2+4j}$ b) $\dfrac{5-2j}{4-5j}$

   c) $\dfrac{(1-7j)(4+j)}{3+2j}$ d) $\dfrac{3-2j}{(2-3j)(4+j)}$

4. En utilisant les rapports trigonométriques des angles remarquables, exprimer les nombres suivants sous forme polaire.

   a) $2 + 2j$ b) $3 - 3j$

   c) $-2+j2\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{3}-4j$

5. Exprimer les nombres suivants sous forme rectangulaire.

   a) $4(\cos\pi/6 + j\sin\pi/6)$

   b) $5\,(\cos\pi/2 + j\sin\pi/2)$

   c) $3\,(\cos 3\pi/2 + j\sin 3\pi/2)$

   d) $4\angle(-\pi/3)$ e) $8\angle 5\pi/6$

   f) $6e^{j\pi/3}$

6. Exprimer les nombres sous forme rectangulaire pour effectuer les opérations demandées et donner le résultat sous forme polaire.

   a) $4\angle\pi/6 + 4\angle\pi/3$ b) $2\angle\pi/2) + 4\angle(-\pi/3)$

   c) $3\angle(3\pi/2) + 4\angle(\pi/2)$ d) $5\angle(2\pi/3) + 7\angle(\pi/3)$

7. Exprimer les nombres sous forme polaire pour effectuer les opérations demandées et donner le résultat sous forme rectangulaire.

   a) $(3 + 3j) \times (2 - 2j)$

   b) $(4 - 4j) \times (3 + 4j)$

   c) $\dfrac{3+3j}{4+4j}$ d) $\dfrac{5-2j}{4-5j}$

   e) $(2 + j2)^4$ f) $\left(\sqrt{3}-j\right)^5$

   g) $\sqrt[3]{-8j}$ h) $\dfrac{\sqrt[2]{4j}}{(\sqrt{3}+j)^2}$

8. Résoudre les équations suivantes, donner les solutions sous forme rectangulaire.

   a) $z^3 + 27j = 0$

   b) $z^4 + 16 = 0$

   c) $z^4+8\sqrt{2}-8\sqrt{2}\,j=0$