Leibniz
1646-1716

Lorsque Leibniz rencontre Christiaan Huygens, lors de son voyage à Paris, il souhaite approfondir ses connaissances en mathématiques. Pour s'assurer des aptitudes de Leibniz, Huygens lui propose un défi, la somme d'une série infinie. Leibniz relève le défi avec brio.

Leibniz
La série de Huygens

À l'automne de 1676, Leibniz fait la connaissance de Christiaan Huygens (1629-1695), l'un des grands mathématiciens de l'époque. Celui-ci travaille alors à la construction d'un pendule qui pourrait être utilisé sur les bateaux pour en déterminer précisément la longitude. Intéressé par le travail du mathématicien, Leibniz lui demande de parfaire sa formation mathématique.

Pour s'assurer que Leibniz a des aptitudes pour cette discipline, Huygens lui propose le problème consistant à faire la somme des réciproques des nombres triangulaires 1, 3, 6. 10,..., soit la somme infinie :

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\ldots$$

Leibniz résout le problème de la façon suivante. Il procède d'abord à une mise en évidence :

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\ldots$$

$$=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots\right]$$

Il exprime alors chacun des termes de la somme comme différence de deux termes :

$$=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\right]$$

En éliminant les parenthèses, les termes s'annulent alors deux à deux :

$$=2\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right]=2\times1=2.$$

La démarche de Leibniz pour résoudre ce problème est basée sur des travaux réalisés dans la rédaction de son ouvrage *De arte combinatoria.* Cherchant à établir des relations entre le « tout » et les « parties », il combine des éléments pour en dégager diverses formules. Il étudie en particulier les suites de nombres naturels et effectue les différences de deux termes successifs. Il considère d'abord la suite des nombres naturels,

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ...

dont les premières différences sont :

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...

et dont les deuxièmes différences sont toutes nulles.

En considérant la somme des carrés, il constate que ce sont les troisièmes différences qui sont toutes nulles. En effet, la suite des carrés est :

0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 ...

Les premières différences sont :

1 3 5 7 9 11 13 15 17 ...

Les secondes différences sont :

2 2 2 2 2 2 2 2 ...

Les troisièmes différences sont toutes nulles. Dans la suite des cubes, les quatrièmes différences sont toutes nulles, ainsi de suite.

Par ailleurs, il remarque que la somme des premières différences des termes d'une suite est égale à la différence entre le premier et le dernier terme. Ainsi, en considérant la suite :

4 8 12 14 21 34 48 65 72

Les différences sont :

4 4 2 7 13 14 17 7

La somme de ces premières différences est :

72 – 4 = 68

De plus, lorsque le premier terme de la suite est 0, la somme des premières différences est le dernier terme de la suite. Il obtient également que si les termes d'une suite diminuent progressivement jusqu'à zéro, on peut utiliser ce calcul des différences pour effectuer la sommation de séries infinies. C'est ce qu'il fait avec la somme proposée par Huygens. Il a considéré que la somme des termes proposés par Huygens, soit :

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\dots$$

est une somme de premières différences des termes de la suite :

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8}$$

En effet, les premières différences de cette suite sont :

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{56} \dots$$

On remarque que cette suite est la deuxième ligne du triangle harmonique. Puisque les termes de la suite diminuent progressivement jusqu'à zéro, Leibniz en conclut que la somme est le premier terme, 1 et la somme de la suite proposée par Huygens est le double de celle-ci.

Symboliquement, Leibniz a constaté que les séries de différences peuvent être sommées facilement. Il reconnaît dans la série que lui soumet que les dénominateurs sont de la forme

$$\frac{r(r+1)}{2}$$

Il réécrit alors les termes de la série de Huygens sous forme de différences,

$$\begin{aligned}\frac{2}{r(r+1)} &= \frac{2\left[(r+1)-r\right]}{r(r+1)}\\ &= \frac{2(r+1)-2r}{r(r+1)}\\ &= \frac{2(r+1)}{r(r+1)}-\frac{2r}{r(r+1)}\\ &= \frac{2}{r}-\frac{2}{r+1}\end{aligned}$$

Par conséquent, la série de Huygens est une série de différences et la somme de celle-ci est la différence des deux termes extrêmes de la série associée. Symboliquement :

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{2}{r(r+1)} = 2-\frac{2}{n+1}$$

Lorsque le nombre de termes est infini, le terme $2/(n + 1)$ est égal à 0. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2}{r(r+1)} &= \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{n+1}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}(2)-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}\right)\\ &= 2-0=2\end{aligned}$$

Huygens suggère alors des lectures à Leibniz et l'incite à entreprendre sérieusement l'étude des mathématiques. En 1676, Leibniz retourne en Allemagne et occupe le poste de conseiller auprès du duc de Brunswick-Hanovre. Il sert trois ducs successifs comme bibliothécaire, historien et guide intellectuel de la famille des Brunswick. Pendant ces quarante années, il poursuit ses recherches et, en 1682, il fonde, avec Otto Mencke, la revue scientifique *Acta eruditorum* dans lequel il publie un bon nombre de ses travaux en mathématiques, dont les 26 articles qui constituent la « naissance du calcul différentiel ».