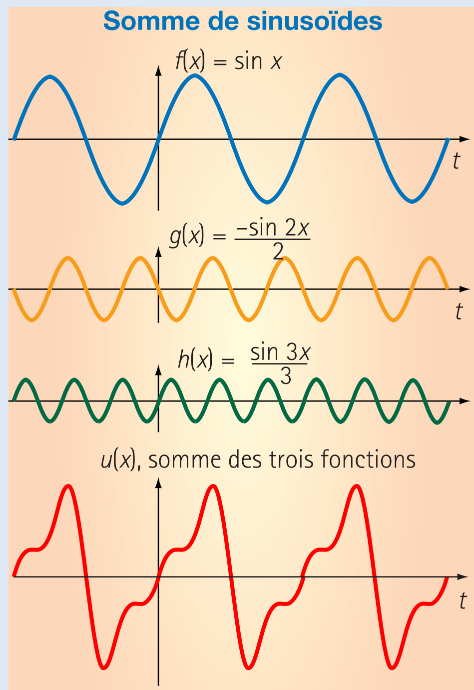
La somme d'un nombre infini de fonctions continues donne-t-elle toujours une fonction continue ? En fait, on peut obtenir des fonctions continues et dérivables partout, d'autres ayant des discontinuités en quantité dénombrable donc dérivables persque partout, mais on peut également définir des fonctions continues partout et nulle part dérivables.

Sommes infinies de fonctions

En additionnant un nombre fini de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on obtient une fonction continue. C'est le cas dans l'illustration à droite où on additionne trois sinusoïdes. Dans cet exemple, la fonction $u(x)$ est

$$u_3(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}$$

Son graphique est périodique et la période de la somme est 2π, soit la plus grande des périodes des fonctions additionnées.



La question qui se pose est :

La somme d'une infinité de fonctions sinusoïdales est-elle une fonction continue ?

NH Cauchy

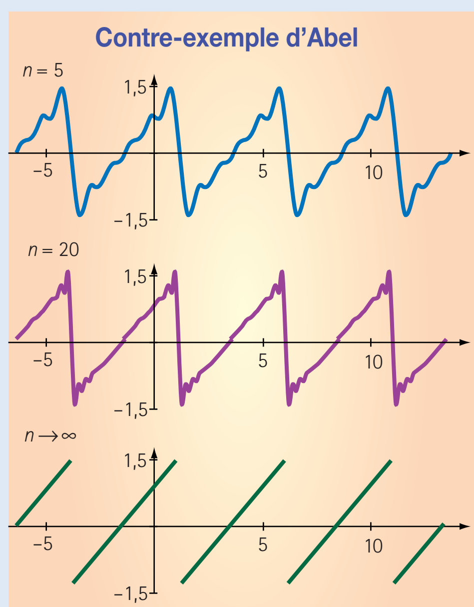
Cauchy était convaincu qu'une somme infinie de fonctions continues devait être continue. Cela semble être le cas, si on effectue la somme des cinq premiers termes

$$u_5(x) = u_5(x) = \sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^{k-1} \sin kx}{k}$$

$$= \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5}$$

ou des vingt premiers termes, par exemple.

$$u_{20}(x) = \sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k-1} \sin kx}{k}$$



NH Abel

Cependant, le mathématicien Niels Henrik Abel (1802-1829) a montré que la somme infinie donne une fonction ayant des discontinuités en quantité dénombrable.

Prodafor Inc

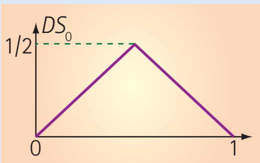
Fonction en dents de scie

Définissons la fonction

$$DS_0(x) = d(x)$$

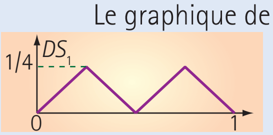
où $d(x)$ est la fonction décrivant la distance de x à l'entier le plus proche. Soit :

$$d(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0;1/2[\\ 1-x & \text{si } x \in [1/2;1] \end{cases}$$



Le graphique de la fonction est un segment de droite de pente 1 dans l'intervalle [0; 1/2[et un segment de droite de pente –1 dans l'intervalle [1/2; 1]. À $x = 1/2$, la fonction est continue mais non dérivable.

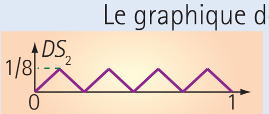
Le graphique de la fonction définie par



$$DS_1(x) = \frac{d(2x)}{2}$$

est un segment de droite de pente 1 dans l'intervalle [0; 1/4[, un segment de droite de pente –1 dans l'intervalle [1/4; 1/2[, un segment de droite de pente 1 dans l'intervalle]1/2; 3/4[et un segment de droite de pente –1 dans l'intervalle [3/4; 1]. À $x = 1/4$, $x = 1/2$ et $x = 3/4$, la fonction est continue mais non dérivable.

Le graphique de la fonction définie par



$$DS_2(x) = \frac{d(2^2 x)}{2^2}$$

a un comportement analogue, de même que la fonction définie par

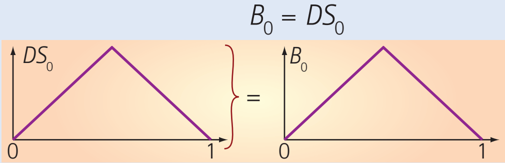
$$DS_k(x) = \frac{d(2^k x)}{2^k}.$$

Fonction Blanc-Manger

On peut définir une suite de fonctions en effectuant les sommes partielles des fonctions en dents de scie.

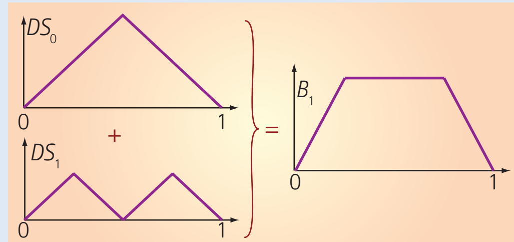
La première fonction de cette suite est

$$B_0 = DS_0$$



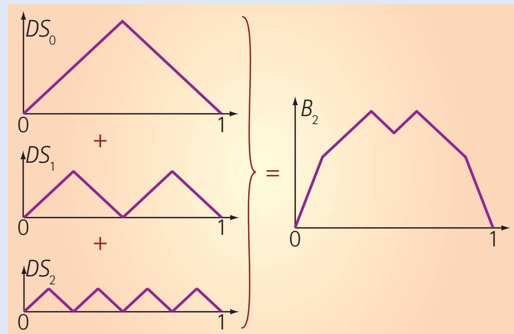
Le deuxième terme est la somme des deux premières fonctions en dents de scie, soit la fonction

$$B_1 = DS_0 + DS_1.$$



Le troisième terme est la somme des trois premières fonctions en dents de scie, soit la fonction

$$B_2 = DS_0 + DS_1 + DS_2.$$

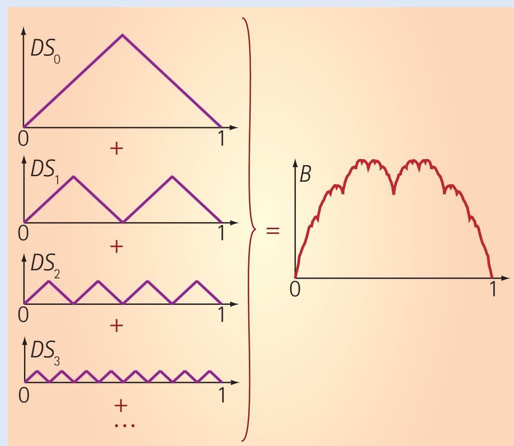


On poursuit ainsi en définissant les fonctions qui sont les sommes partielles de la suite des fonction DS_k, soit

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} DS_k.$$

La suite des sommes partielles converge vers une fonction définie par

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} DS_k.$$



La fonction B est la limite des B_n lorsque n tend à l'infini. On l'appelle *fonction Blanc-manger* (pour sa ressemblance avec le dessert).

Elle est continue partout sur l'intervalle [0; 1], mais elle comporte une infinité de sommets et n'est dérivable en aucun point.

Cette fonction a été étudiée par le mathématicien japonais Teiji Takagi (1875 - 1960) et par le mathématicien néerlandais Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996).

Cauchy avait donc tort, la somme d'une infinité de fonctions continues n'est pas nécessairement continue, elle peut même être nulle part dérivable.