René Descartes
1596-1650

Dans la Dioptrique, Descartes s'intéresse aux problèmes d'optique et rencontre des problèmes de réflexion sur les surfaces courbes. Dans un tel contexte, il faut rechercher la normale à la courbe, c'est la droite par rapport à laquelle on mesur l'angle d'incidence et l'angle de réflexion.

René Descartes

La normale et la tangente

Sous-titre annonçant la procédure pour déterminer la normale à une courbe dans la géométrie de Descartes.

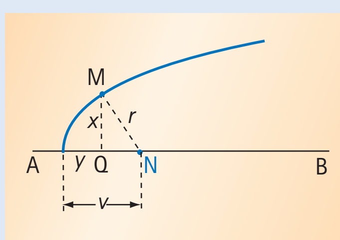
Façon générale pour trouver des lignes droites qui coupent les courbes données ou leurs contingentes à angles droits.

Extrait de La Géométrie

Dans la deuxième partie de *La Géométrie*, Descartes explique comment trouver une droite qui coupe une courbe à angles droits. En termes plus modernes, il explique comment déterminer la normale à une courbe. Il explique d'abord les grandes lignes de sa méthode et l'applique dans le cas d'une ellipse et dans le cas d'une parabole.

Après avoir déterminé la normale à la courbe en un point M, il est facile de déterminer la tangente puisque ces deux droites sont perpendiculaires. Voici, en langage moderne le raisonnement sur lequel il fonde sa démarche.

Descartes considère une courbe[1], un point M sur la courbe et une droite AB. Il veut déterminer l'intersection de la droite AB et de la normale à la courbe en M.



1. Il écrit : « J'ai quelque équation qui explique le rapport entre x et y ». En termes modernes, une courbe dont l'équation est connue.

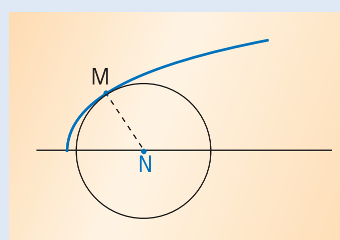
Il abaisse du point M la perpendiculaire à AB et pose les variables r et v. Ce qui lui permet d'établir l'équation :

$$x^2 + (v - y)^2 = r^2$$
$$x^2 + v^2 - 2vy + y^2 - r^2 = 0.$$

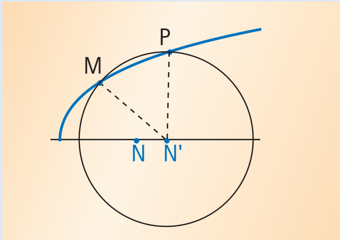
Il peut alors transformer cette équation pour qu'elle ne comporte qu'une seule inconnue en utilisant l'équation décrivant la relation entre x et y.

Analyse de sa méthode

Si N est le point de rencontre de la normale et de la droite AB, le cercle de centre N et de rayon NM est tangent à la courbe au point M.



Cependant si le point N ne coïncide pas exactement avec le pied de la normale, alors le cercle coupera la courbe en un second point P. Ce point P se rapprochera de M si le point N' se rapproche du point d'intersection de la normale et de l'axe des x.

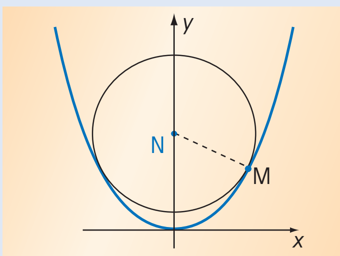


Application de la méthode

Appliquons sa démarche en la modernisant. Considérons la parabole d'équation

$$y = \frac{x^2}{4}$$

et trouvons le point d'intersection de la normale au point M(x; y) avec l'axe des y, c'est-à-dire le point (0; y_1).



L'équation du cercle de centre N et de rayon NM est :

$$x^2 + (y - y_1)^2 - r^2 = 0.$$

Les points de rencontre du cercle et de la parabole devant satisfaire les deux équations, on a :

$$4y + (y - y_1)^2 - r^2 = 0$$
$$4y + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 - r^2 = 0$$
$$y^2 - 2[y_1 - 2]y + (y_1^2 - r^2) = 0$$

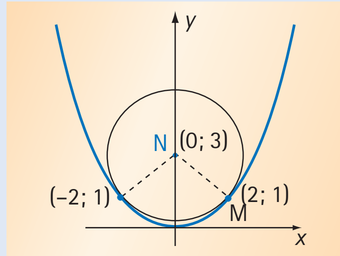
Les racines sont :

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{2(y_1 - 2) \pm \sqrt{4(y_1 - 2)^2 - 4(y_1^2 - r_1^2)}}{2}$$

Les points M et P coïncident si l'expression sous le radical s'annule, on a alors une racine double et le cercle est tangent à la parabole. Ce qui donne :

$$y = y_1 - 2$$

d'où : $y_1 = y + 2$



Ainsi, l'intersection de la normale au point (2; 1) et de l'axe des y est le point (0; y_1) tel que $y_1 = y + 2$. Sachant que l'ordonnée du point sur la courbe est $y = 1$, l'ordonnée du point de rencontre avec l'axe vertical est alors :

$$y_1 = 1 + 2 = 3.$$

On connaît maintenant deux points de la normale, (2; 1) et (0; 3). On peut donc calculer sa pente et on obtient :

$$m_N = \frac{1-3}{2-0} = -1$$

Puisque le produit des pentes de droites perpendiculaires est égal à –1, on en déduit que la pente de la tangente est égale à 1.

Ce résultat peut être généralisé à des paraboles d'équation

$$y = \frac{x^2}{2m}$$

ou à des paraboles d'équation

$$y^2 = 2mx.$$

On remarque que la méthode de Descartes ne fait pas appel au concept de limite. On remarque également qu'il est simple d'écrire l'équation

$$x^2 + v^2 - 2vy + y^2 - r^2 = 0$$

de telle sorte qu'elle ne comporte qu'une seule variable si l'équation décrivant la relation entre x et y est connue.

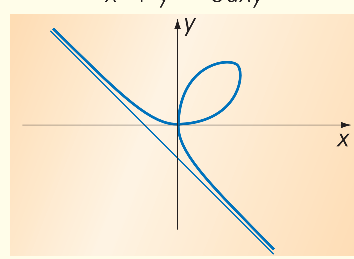
Pour pouvoir résoudre l'équation ainsi obtenue en appliquant la méthode générale de résolution des équations quadratiques, il faut que l'équation décrivant la relation entre x et y soit de degré 2. La courbe doit donc être une parabole, une ellipse ou une hyperbole.

Si la courbe est d'un autre degré, il faut appliquer des méthodes plus complexes.

Folium de Descartes

Descartes a également étudié la courbe cubique appelée *Folium de Descartes* dont l'équation est :

$$x^3 + y^3 = 3axy$$



Folium de Descartes

L'aire de la feuille vaut $3a^2/2$ tout comme l'aire entre la courbe et l'asymptote. L'équation de celle-ci est :

$$x + y + a = 0.$$