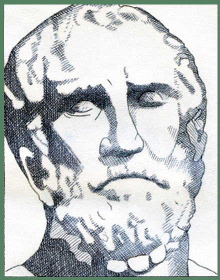


Zénon
vers ~495

Achille et la tortue, la flèche et le stade sont trois autres paradoxes de Zénon qui font ressortir l'impossibilité d'avoir recours à des convictions intuitives fondées sur le fini lorsqu'on traite de l'infini.

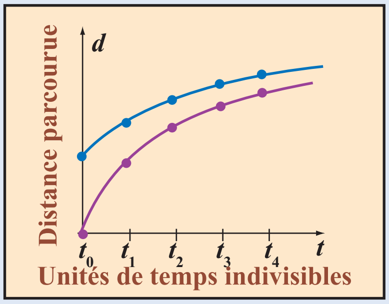
Zénon d'Élée
Autres paradoxes

Achille et la tortue

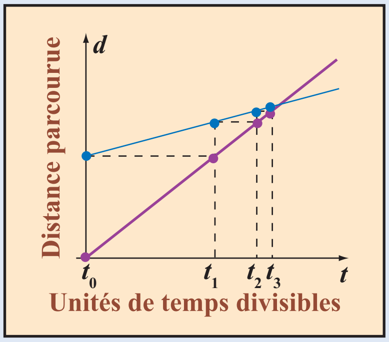
Le deuxième paradoxe de Zénon portant sur la divisibilité infinie est connu comme le paradoxe d'Achille et la tortue.

Si Achille fait une course avec une tortue à qui on a donné une longueur d'avance, lorsqu'Achille atteint le point de départ de la tortue, celle-ci a, pendant ce temps, parcouru une distance. Pendant qu'Achille va parcourir la distance qui le sépare encore de la tortue, celle-ci s'éloigne à nouveau et elle est encore à une certaine distance d'Achille. Achille aura toujours une distance à parcourir pour rejoindre la tortue, le mouvement est donc impossible.

Dans ce paradoxe, Zénon considère que la longueur est infiniment divisible alors que le temps ne l'est pas. Il considère que pour parcourir une distance, il faut une unité indivisible de temps, peu importe cette distance. Grâce à la géométrie analytique on peut visualiser le raisonnement de Zénon. Si on représente graphiquement la distance parcourue par Achille et la tortue à partir du point de départ d'Achille en considérant des unités de temps indivisibles, on obtient deux courbes asymptotiques l'une à l'autre et Achille ne peut rattraper la tortue et le mouvement est impossible.



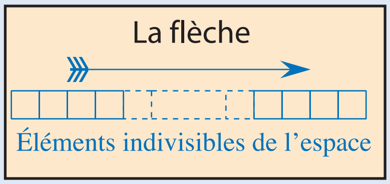
Cependant, si on considère que le temps est lui aussi infiniment divisible, on obtient deux droites concourantes et Achille rattrape la tortue.



La flèche

Les deux premiers paradoxes sont construits en considérant que le temps est constitué d'instants indivisibles et que l'espace est infiniment divisible. Les deux paradoxes suivants sont formulés en prenant comme hypothèse que le temps et l'espace sont constitués d'éléments indivisibles, conformément aux enseignements des Pythagoriciens. Le paradoxe de la flèche s'énonce comme suit :

Si le temps est fait d'instants indivisibles, alors une flèche en mouvement est toujours arrêtée, car à tout instant la flèche est en une position donnée et occupe un espace égal à elle-même. Puisque cela est vrai en tout instant, il s'ensuit que la flèche ne se déplace jamais parce qu'un corps qui occupe toujours le même espace ne se déplace pas.



Dans la formulation de ce paradoxe, Zénon considère que pour que le mouvement soit possible, il faudrait que la flèche soit en une position au début d'un instant et dans une autre position à la fin du même instant. Pour que cela soit possible, il faudrait que les instants soient divisibles, ce qui n'est pas le cas.

Pour bien en saisir le sens, supposons une puce atomique, c'est-à-dire de la grosseur d'un atome. Pour se déplacer, la puce doit passer d'un atome à un autre, mais si le temps est constitué de grains indivisibles, la puce ne peut être que sur un seul atome en un instant donné. Il ne peut être ailleurs. Zénon en conclut que le mouvement est impossible. En fait, il considère que si l'espace est dicontinu, le mouvement doit l'être lui aussi.

Le stade

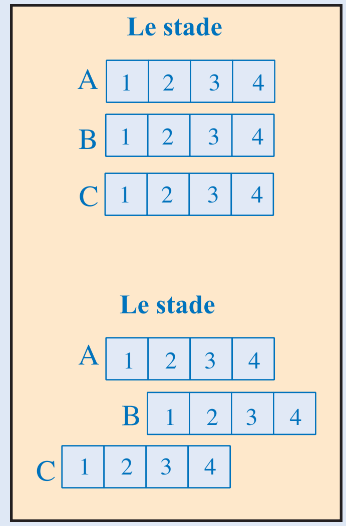
Le quatrième paradoxe est un peu plus long à décrire que les trois premiers.

Supposons que le temps et l'espace sont constitués d'éléments indivisibles. Considérons trois corps A, B et C constitués du même nombre de particules indivisibles. Considérons de plus que A est stationnaire, alors que B se déplace vers la droite et que C se déplace vers la gauche. Puisque le temps et l'espace sont constitués d'éléments indivisibles, la plus petite vitesse de déplacement est d'une unité d'espace par unité de temps.

Supposons que les trois corps sont à un instant donné dans la position du haut dans l'illustration ci-contre.

Après une unité de temps, les corps seront alors dans la position du bas.

On constate que l'élément indivisible B_1 se sera déplacé de deux unités de C. Par conséquent, l'instant considéré ne peut être la plus petite unité de temps. En effet, on peut alors considérer une plus petite unité, soit le temps pour que l'élément indivisible B_1 se déplace d'une unité de C. Si le temps et l'espace sont constitués d'éléments indivisibles, le mouvement est donc impossible.



Le paradoxe est fondé sur la relativité de la vitesse d'un objet au point d'observation. La vitesse relative de C par rapport à B est différente de la vitesse relative de C par rapport à A. Cependant, en considérant que le temps et l'espace sont constitués d'infimes parties indivisibles, il faut admettre que ces deux vitesses sont égales pour les parties indivisibles. Le mouvement est donc impossible, à moins de rejeter l'hypothèse qui entraîne cette contradiction. Or, la seule hypothèse considérée est la supposition que le temps et l'espace sont constitués d'éléments indivisibles.

À cause de ces paradoxes, les mathématiciens et les philosophes grecs ont évité systématiquement l'usage de l'infini à cause des pièges que constitue le recours à des convictions intuitives fondées sur le fini, lorsqu'on traite de l'infini. Il n'était plus possible d'utiliser l'infini dans un raisonnement sans le rendre suspect. Ainsi, Euclide ne considère pas qu'il y a un nombre infini de nombres premiers, il considère qu'il y en a plus que tout nombre prédéterminé. La formulation de divers paradoxes fut, pour plusieurs siècles, la seule utilisation de l'infini dans les raisonnements.