L'INVERSION de MATRICES

5

Exercices de synthèse 5.6

1. a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (2\times -4)-(3\times 1) = -11$. Le déterminant est -11. Une matrice est inversible si son déterminant est non-nul, celle-ci est donc inversible..

b) La matrice n'est pas carrée, ce n'est donc pas une matrice inversible.

c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} C_1+3C_3 \\ C_2-2C_3 \\ C_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 11 & -7 & 3 \\ 19 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 11 & -7 \\ 19 & -12 \end{vmatrix} = (11\times -12)-(19\times -7) = 1.$

Le déterminant est différent de 0, la matrice est inversible.

d) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} L_1-2L_2 \\ L_2 \\ L_3+L_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -13 \\ 2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & -13 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = (0\times 10)-(5\times -13) = 65.$

Le déterminant est différent de 0, la matrice est inversible.

e) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{matrix} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-3L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -13 \\ -1 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 14 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 14 \end{vmatrix} = -1\big[(-1\times 14)-(-2\times 7)\big] = 0.$

Le déterminant est égal à 0, la matrice n'est pas inversible.

f) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}5\times\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 5\big[(3\times 0)-(4\times 1)\big] = -20.$

Le déterminant est différent de 0, la matrice est inversible.

g) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} L_1-2L_2 \\ L_2 \\ L_3-3L_2 \\ L_4-2L_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 7 & -6 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 8 & -14 \\ 0 & -2 & 2 & -12 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\times 1\times\begin{vmatrix} -7 & 7 & -6 \\ -8 & 8 & -14 \\ -2 & 2 & -12 \end{vmatrix}$

$$= -1\times\begin{vmatrix} -7 & 7 & -6 \\ -8 & 8 & -14 \\ -2 & 2 & -12 \end{vmatrix} = \begin{matrix} C_1 \\ C_2+C_1 \\ C_3 \end{matrix} \; -1\times\begin{vmatrix} -7 & 0 & -6 \\ -8 & 0 & -14 \\ -2 & 0 & -12 \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant est égal à 0, la matrice n'est pas inversible.

h) $$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} L_1-3L_3 \\ L_2-3L_3 \\ L_3 \\ L_4+2L_3 \end{array} \begin{vmatrix} -6 & 0 & -3 & -4 \\ -7 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}\times 1\times \begin{vmatrix} -6 & -3 & -4 \\ -7 & -2 & -2 \\ 8 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1\times -2\times \begin{vmatrix} -6 & -3 & 2 \\ -7 & -2 & 1 \\ 8 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} L_1-2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} 2\times \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 8 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(-1)^{2+3}\times \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -2\left[(4\times 5)-(8\times 1)\right] = -64.$$

Le déterminant est différent de 0, la matrice est inversible.

i) $$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} L_1+L_4 \\ L_2-2L_4 \\ L_3-L_4 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 8 & 4 & 5 & 0 \\ -6 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4}\times 1\times \begin{vmatrix} 8 & 4 & 5 \\ -6 & 1 & -4 \\ -6 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_2 \end{array} \begin{vmatrix} 8 & 4 & 5 \\ -6 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}\times 1\times \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -1\left[(8\times -4)-(-6\times 5)\right] = 2.$$

Le déterminant est différent de 0, la matrice est inversible.

j) $$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 2 & -1/2 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 4/3 & -4/3 & 4/3 & 4/3 \\ 4/5 & 4/5 & 6/5 & -4/5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{5} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} C_1 \\ C_2+C_1 \\ C_3-C_1 \\ C_4-C_1 \end{array} \frac{4}{15} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1}\times 1\times\frac{4}{15}\times \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{4}{15}\times \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \\ C_3+C_1 \end{array} \frac{4}{15}\times \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}\times 5\times\frac{4}{15}\times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1\times\frac{4}{3}\left[(3\times 1)-(4\times 2)\right] = \frac{20}{3}.$$

2. a) On calcule d'abord le déterminant, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (2\times 2)-(4\times -3) = 4+12 = 16 \neq 0.$$

Le déterminant est non nul, la matrice est inversible. On écrit la matrice augmentée de l'identité et on applique la méthode de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-2L_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 1 \end{array}\right] \approx \begin{array}{l} 8L_1+3L_2 \\ L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 16 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/16 \\ L_2/8 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/8 & 3/16 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/8 \end{array}\right].$$

La matrice inverse est $\begin{bmatrix} 1/8 & 3/16 \\ -1/4 & 1/8 \end{bmatrix}$.

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-2\times -5)-(-6\times -1) = 10-6 = 4 \neq 0.$$

Le déterminant est non nul, la matrice est inversible. On écrit la matrice augmentée de l'identité et on applique la méthode de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} 2L_1+3L_2 \\ L_2 \\ L_3-3L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} 2L_1+L_3 \\ L_2-2L_3 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/4 \\ L_2/(-4) \\ L_3/(-2) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -5/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

La matrice inverse est $\begin{bmatrix} -5/4 & 3/4 & 1/4 \\ 7/4 & -5/4 & 1/4 \\ -3/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} L_1 \\ L_2-3L_1 \\ L_3+2L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 10 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-7 \times 2) - (10 \times -2) = -14 + 20 = 6 \neq 0.$

Le déterminant est non nul, la matrice est inversible. On écrit la matrice augmentée de l'identité et on applique la méthode de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \begin{matrix} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3+2L_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-7} & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{matrix} 7L_1-3L_2 \\ L_2 \\ 7L_3+10L_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 7 & 0 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & -16 & 10 & 7 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{matrix} 3L_1+4L_3 \\ 3L_2-L_3 \\ L_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 21 & 0 & 0 & -70 & 49 & 28 \\ 0 & -21 & 0 & 7 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -16 & 10 & 7 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{matrix} L_1/21 \\ L_2/(-21) \\ L_3/(-6) \end{matrix} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -10/3 & 7/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 8/3 & -5/3 & -7/6 \end{array}\right]$$

La matrice inverse est $\begin{bmatrix} -10/3 & 7/3 & 4/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 8/3 & -5/3 & -7/6 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{vmatrix} \boxed{1} & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & 13 \end{vmatrix} = \begin{matrix} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3-5L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 18 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 18 & -2 \end{vmatrix}$

$= (9 \times -2) - (18 \times -1) = -18 + 18 = 0.$

Le déterminant est égal à 0, la matrice n'est pas inversible.

e) $\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{matrix} L_1 \\ L_2-3L_1 \\ L_3-2L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -8 & 17 \\ 0 & -8 & 16 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -8 & 17 \\ -8 & 16 \end{vmatrix}$

$= (-8 \times 16) - (-8 \times 17) = -128 + 136 = 8.$

Le déterminant est non nul, la matrice est inversible. On écrit la matrice augmentée de l'identité et on applique la méthode de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-3L_1 \\ L_3-2L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 17 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} 4L_1+L_2 \\ L_2 \\ L_3-L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 17 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1+L_3 \\ L_2+17L_3 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 14 & -16 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/4 \\ L_2/(-8) \\ L_3/(-1) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -7/4 & 2 & -17/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

La matrice inverse est $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ -7/4 & 2 & -17/8 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (-3\times 3)-(5\times -1) = -9+5 = -4 \neq 0.$

Le déterminant est différent de 0, la matrice est inversible. On construit la matrice des cofacteurs :

$$\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

on la transpose pour obtenir la matrice adjointe.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matrice inverse est obtenue en multipliant la matrice adjointe par l'inverse multiplicatif du déterminant, soit –1/4. On obtient :

$$\frac{-1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 5/4 & -3/4 \end{bmatrix}.$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} L_1-L_3 \\ L_2-4L_3 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 0 & -7 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\times \begin{vmatrix} -7 & 7 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$

$= (-7\times 6)-(-7\times 7) = -42+49 = 7 \neq 0.$

Le déterminant est différent de 0, la matrice est inversible. On construit la matrice des cofacteurs:

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 7 & -7 & -7 \\ -13 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

on la transpose pour obtenir la matrice adjointe.

$$\begin{bmatrix} -4 & 7 & -13 \\ 6 & -7 & 16 \\ 7 & -7 & 14 \end{bmatrix}$$

La matrice inverse est obtenue en multipliant la matrice adjointe par l'inverse multiplicatif du déterminant, soit 1/7. On obtient :

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -4 & 7 & -13 \\ 6 & -7 & 16 \\ 7 & -7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/7 & 1 & -13/7 \\ 6/7 & -1 & 16/7 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 2\times 2\times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 4\times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{matrix} C_1 \\ C_2 + C_1 \\ C_3 - C_1 \end{matrix} \; 4\times \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 4\times \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

En appliquant les propriétés, on obtient un déterminant qui a deux lignes proportionnelles, il est donc nul et la matrice n'est pas inversible.

d) $$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ \boxed{1} & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} L_1 - 3L_2 \\ L_2 \\ L_3 + 2L_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 11 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} -7 & 11 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -1\times\left[(-7\times -2) - (1\times 11)\right] = -1\times[14 - 11] = -3 \neq 0.$$

Le déterminant est différent de 0, la matrice est inversible. On construit la matrice des cofacteurs

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 16 & 11 \\ -1 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

on la transpose pour obtenir la matrice adjointe.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 16 & 11 \\ 1 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

La matrice inverse est obtenue en multipliant la matrice adjointe par l'inverse multiplicatif du déterminant, soit –1/3. On obtient :

$$\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 16 & 11 \\ 1 & 11 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -16/3 & -11/3 \\ -1/3 & -11/3 & -7/3 \end{bmatrix}$$

4. Si votre réponse a du sens par rapport à l'énoncé, elle est bonne.

5. a) Pour trouver le point invariant, on doit résoudre le système d'équations $\begin{cases} (a-1)t_1 + ct_2 = 0 \\ bt_1 + (d-1)t_2 = 0 \end{cases}$.

Puisque $a + b = 1$ et $c + d = 1$, on a $\begin{cases} -bt_1 + ct_2 = 0 \\ bt_1 - ct_2 = 0 \end{cases}$.

On peut éliminer une de ces équations. De plus, on doit avoir $t_1 + t_2 = 1$.

On a donc le système $\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 \\ bt_1 - ct_2 = 0 \end{cases}$.

b) Par la méthode de Cramer, on trouve $t_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & -c \end{vmatrix}} = \dfrac{-c}{-c-b} = \dfrac{c}{b+c}$ et $t_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & -c \end{vmatrix}} = \dfrac{-b}{-c-b} = \dfrac{b}{b+c}$.

Le point invariant est donc $\begin{bmatrix} \dfrac{c}{b+c} & \dfrac{b}{b+c} \end{bmatrix}$.

c) La matrice inverse est $M^{-1} = \dfrac{-1}{b+c}\begin{bmatrix} -c & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{c}{b+c} & \dfrac{1}{b+c} \\ \dfrac{b}{b+c} & \dfrac{-1}{b+c} \end{bmatrix}$.

Le point invariant est donné par les éléments de la première colonne de la matrice inverse.

6. $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{12} & a_{22} - 1 & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - 1 \end{bmatrix}$.

a) La somme des cofacteurs de la première ligne donne le déterminant de la matrice puisque les éléments de la première ligne sont des 1.

b) La somme des cofacteurs de la deuxième ligne est

$-[(a_{33} - 1) - a_{23}] + [(a_{33} - 1) - a_{13}] - [a_{23} - a_{13}] = -a_{33} + 1 + a_{23} + a_{33} - 1 - a_{13} - a_{23} + a_{13} = 0.$

c) La somme des cofacteurs de la troisième ligne est

$[(a_{32} - (a_{22} - 1)] - [(a_{32} - a_{12}] + [(a_{22} - 1) - a_{12}] = a_{32} - a_{22} + 1 - a_{32} + a_{12} + a_{22} - 1 - a_{12} = 0.$

7. a) $\det A = 8$

b) $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 3/3 \end{bmatrix}$. La matrice inverse est symétrique.

8. a) $\det B = ac - b^2$.

b) Soit $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, une matrice symétrique inversible. Alors, $\det B \neq 0$. On a donc $ac - b^2 \neq 0$ et $ac \neq b^2$. Par conséquent, b n'est pas un moyen proportionnel entre a et c.

Réciproquement, soit $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, une matrice symétrique telle que b n'est pas un moyen proportionnel entre a et c. Alors, $ac - b^2 \neq 0$ et $\det B \neq 0$. La matrice est donc inversible.

c) $B^{-1} = \dfrac{1}{ac - b^2}\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$. La matrice inverse est symétrique.

9. a) $$\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} d & e \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & d \\ c & e \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ c & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ c & e \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ b & e \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} df - e^2 & -(bf - ce) & be - cd \\ -(bf - ce) & af - c^2 & -(ae - bc) \\ be - cd & -(ae - bc) & ad - b^2 \end{bmatrix}.$$

La matrice des cofacteurs est une matrice symétrique.

b) Oui. En effet, $\operatorname{adj}(A) = (\operatorname{cof}A)^t = \operatorname{cof}A$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)$.

10. Soit A une matrice symétrique inversible d'ordre n. Alors :

$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, propriété de la matrice inverse;

$= (A)^{-1}$, puisque A est symétrique par hypothèse.

L'inverse d'une matrice symétrique est donc également une matrice symétrique, car elle est égale à sa transposée.

11. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$, une matrice antisymétrique d'ordre 2 telle que A est inversible.

Puisque A est inversible par hypothèse, son déterminant est non nul. On a donc $\det A = a^2 \neq 0$ et $a \neq 0$.

Réciproquement, soit $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$, une matrice antisymétrique telle que $a \neq 0$.

On a alors $\det A = a^2 \neq 0$ et la matrice est inversible.

12. $\det A = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0 - a(0 + bc) + b(ac - 0) = -abc + abc = 0.$

Par conséquent, une matrice antisymétrique d'ordre 3 n'est jamais inversible.

13. $\det A = a^2f^2 + 2adcf - 2aebf + b^2e^2 - 2becd + c^2d^2$. Il existe des valeurs a, b, c, d, e et f pour lesquelles le déterminant est non nul. Par conséquent, une matrice antisymétrique d'ordre 4 peut être inversible.

14. Soit A, une matrice inversible. Pour démontrer que la matrice inverse de kA est $\frac{1}{k}A^{-1}$, il faut montrer que le produit de ces matrices donne l'identité, même en les permutant par rapport au symbole d'opération. On a alors :

$$\begin{aligned}(kA)\bullet\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) &= k\times\frac{1}{k}\left(A\bullet A^{-1}\right), \text{ associativité des opérations;}\\ &= 1\ (I), \text{ puisque } A^{-1} \text{ est la matrice inverse de } A;\\ &= I, \text{ puisque 1 est neutre pour la multiplication d'une matrice par un scalaire.}\end{aligned}$$

En les permutant par rapport au symbole d'opération,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)\bullet(kA) &= \frac{1}{k}\times k\left(A^{-1}\bullet A\right), \text{ associativité des opérations;}\\ &= 1\ (I), \text{ puisque } A^{-1} \text{ est la matrice inverse de } A;\\ &= I, \text{ puisque 1 est neutre pour la multiplication d'une matrice par un scalaire.}\end{aligned}$$

On peut donc conclure que la matrice inverse de kA est la matrice $\frac{1}{k}A^{-1}$.

26. a) Les équations sont obtenues en substituant à x et à y dans l'équation les valeurs de couples $(x; y)$ donnés :

$D + 3E + F = -10$
$3D + 4E + F = -25$
$2D + 6E + F = -40$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -10\\ 3 & 4 & 1 & -25\\ 2 & 6 & 1 & -40\end{array}\right] \approx \begin{array}{l} L_1\\ L_2-3L_1\\ L_3-2L_1\end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -10\\ 0 & -5 & -2 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -20\end{array}\right] \approx \begin{array}{l} 5L_1+3L_2\\ L_2\\ L_3\end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & -35\\ 0 & -5 & -2 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -20\end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1-L_3\\ L_2-2L_3\\ L_3\end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & -15\\ 0 & -5 & 0 & 45\\ 0 & 0 & -1 & -20\end{array}\right] \approx \begin{array}{l} L_1/5\\ L_2/(-5)\\ L_3/(-1)\end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -9\\ 0 & 0 & 1 & 20\end{array}\right]$$

L'équation cherchée est donc $x^2 + y^2 - 3x - 9y + 20 = 0$.

La matrice des coefficients est $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 2 & 6 & 1\end{bmatrix}$.

On a alors $\det A = 5$, $\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 10\\ 3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -5\end{bmatrix}$, $\operatorname{adj}(A) = (\operatorname{cof} A)^t = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 2\\ 10 & 0 & -5\end{bmatrix}$.

La matrice inverse est $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A) = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 2\\ 10 & 0 & -5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 & 3/5 & -1/5\\ -1/5 & -1/5 & 2/5\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

En calculant le produit matriciel, on obtient :

$$A^{-1}\bullet\begin{bmatrix}-10\\-25\\-40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2/5 & 3/5 & -1/5\\-1/5 & -1/5 & 2/5\\2 & 0 & -1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}-10\\-25\\-40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-9\\20\end{bmatrix}.$$

Ce qui confirme la validité du résultat obtenu par la méthode de Gauss-Jordan.

b) Les équations sont :

$2D + 4E + F = -20$

$4D - 1E + F = -17$

$4D + 8E + F = -80$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{2} & 4 & 1 & -20\\4 & -1 & 1 & -17\\4 & 8 & 1 & -80\end{array}\right]\approx\begin{array}{l}L_1\\L_2-2L_1\\L_3-2L_1\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & 1 & -20\\0 & \boxed{-9} & -1 & 23\\0 & 0 & -1 & -40\end{array}\right]\approx\begin{array}{l}9L_1+4L_2\\L_2\\L_3\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}18 & 0 & 5 & -88\\0 & -9 & -1 & 23\\0 & 0 & \boxed{-1} & -40\end{array}\right]$$

$$\approx\begin{array}{l}L_1+5L_3\\L_2-L_3\\L_3\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}18 & 0 & 0 & -288\\0 & -9 & 0 & 63\\0 & 0 & -1 & -40\end{array}\right]\approx\begin{array}{l}L_1/18\\L_2/(-9)\\L_3/(-1)\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -16\\0 & 1 & 0 & -7\\0 & 0 & 1 & 40\end{array}\right]$$

L'équation cherchée est donc $x^2 + y^2 - 16x - 7y + 40 = 0$.

La matrice des coefficients est $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\4 & -1 & 1\\4 & 8 & 1\end{bmatrix}$.

On a alors $\det A = 18$, $\operatorname{cof} A=\begin{bmatrix}-9 & 0 & 36\\4 & -2 & 0\\5 & 2 & -18\end{bmatrix}$, $\operatorname{adj}(A)=(\operatorname{cof} A)^t=\begin{bmatrix}-9 & 4 & 5\\0 & -2 & 2\\36 & 0 & -18\end{bmatrix}$.

La matrice inverse est $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)=\dfrac{1}{18}\begin{bmatrix}-9 & 4 & 5\\0 & -2 & 2\\36 & 0 & -18\end{bmatrix}$.

En calculant le produit matriciel, on obtient :

$$A^{-1}\bullet\begin{bmatrix}-20\\-17\\-90\end{bmatrix}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}-9 & 4 & 5\\0 & -2 & 2\\36 & 0 & -18\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}-20\\-17\\-90\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16\\-7\\40\end{bmatrix}.$$

Ce qui confirme la validité du résultat obtenu par la méthode de Gauss-Jordan.

16. a) En mettant les expressions du membre de droite au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{3x-16}{x^2+x-6}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{x^2+x-6}=\frac{(A+B)x+(-2A+3B)}{x^2+x-6}$$

Ce qui donne : $3x - 16 = (A + B)x + (-2A + 3B)$. Les polynômes sont égaux si les coefficients des termes de même degré sont égaux. On a donc un système de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$\begin{cases}A+B=3\\-2A+3B=-16\end{cases}$$

En résolvant, on obtient :

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&3\\-2&3&-16\end{array}\right] \approx \begin{array}{l}L_1\\L_2+2L_1\end{array}\left[\begin{array}{cc|c}1&1&3\\0&5&-10\end{array}\right] \approx \begin{array}{l}5L_1-L_2\\L_2\end{array}\left[\begin{array}{cc|c}5&0&25\\0&5&-10\end{array}\right] \approx \begin{array}{l}L_1/5\\L_2/5\end{array}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&5\\0&1&-2\end{array}\right]$$

Ce qui donne $A = 5$ et $B = -2$. On peut donc écrire que : $\dfrac{3x-16}{x^2+x-6} = \dfrac{5}{x+3} - \dfrac{2}{x-2}$.

La matrice des coefficients est $A = \begin{bmatrix}1&1\\-2&3\end{bmatrix}$.

On a alors $\det A = 4$, $\operatorname{cof} A = \begin{bmatrix}3&2\\-1&1\end{bmatrix}$, $\operatorname{adj}(A) = (\operatorname{cof} A)^t = \begin{bmatrix}3&-1\\2&1\end{bmatrix}$.

La matrice inverse est $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A) = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}3&-1\\2&1\end{bmatrix}$.

En calculant le produit matriciel, on obtient $A^{-1} \bullet \begin{bmatrix}3\\-16\end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix}3&-1\\2&1\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}3\\-16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$.

Ce qui confirme la validité du résultat obtenu par la méthode de Gauss-Jordan.

b) En mettant les expressions du membre de droite au même dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{-11x+13}{x^3-4x^2+x+6} &= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2)}{x^3-4x^2+x+6}\\ &= \frac{A(x^2-5x+6)+B(x^2-2x-3)+C(x^2-x-2)}{x^3-4x^2+x+6}\\ &= \frac{(A+B+C)x^2+(-5A-2B-C)x+(6A-3B-2C)}{x^3-4x^2+x+6}.\end{aligned}$$

Les dénominateurs étant égaux, les polynômes du numérateur sont égaux si les coefficients des termes de même degré sont égaux. On a donc un système de trois équations linéaires à trois inconnues :

$$\begin{cases}A+B+C=0\\-5A-2B-C=-11\\6A-3B-2C=13\end{cases}$$

En résolvant, on obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\-5&-2&-1&-11\\6&-3&-2&13\end{array}\right] \approx \begin{array}{l}L_1\\L_2+5L_1\\L_3-6L_1\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&3&4&-11\\0&-9&-8&13\end{array}\right] \approx \begin{array}{l}3L_1-L_2\\L_2\\L_3+3L_2\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}3&0&-1&11\\0&3&4&-11\\0&0&4&-20\end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l}4L_1+L_3\\L_2-L_3\\L_3\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}12&0&0&24\\0&3&0&9\\0&0&4&-20\end{array}\right] \approx \begin{array}{l}L_1/12\\L_2/3\\L_3/4\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&-5\end{array}\right]$$

Ce qui donne $A = 2$, B = 3 et C = –5. On peut donc écrire que :

$$\frac{-11x+13}{x^3-4x^2+x+6}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}-\frac{5}{x-3}.$$

La matrice des coefficients est $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \end{bmatrix}$.

On a alors $\det A=12$, $\text{cof}\,A=\begin{bmatrix} 1 & -16 & 27 \\ -1 & -8 & 9 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, $\text{adj}(A)=(\text{cof}\,A)^t=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -16 & -8 & -4 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix}$.

La matrice inverse est $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\,\text{adj}(A)=\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -16 & -8 & -4 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix}$.

En calculant le produit matriciel, on obtient :

$$A^{-1}\bullet\begin{bmatrix} 0 \\ -11 \\ 13 \end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -16 & -8 & -4 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 0 \\ -11 \\ 13 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ce qui confirme la validité du résultat obtenu par la méthode de Gauss-Jordan.

c) En mettant les expressions du membre de droite au même dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{x^2-6x+4}{x^3-4x^2+5x-2}&=\frac{A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2}{x^3-4x^2+5x-2}\\ &=\frac{A(x^2-3x+2)+B(x-2)+C(x^2-2x+1)}{x^3-4x^2+5x-2}\\ &=\frac{(A+C)x^2+(-3A+B-2C)x+(2A-2B+C)}{x^3-4x^2+5x-2}.\end{aligned}$$

Les dénominateurs étant égaux, les polynômes du numérateur sont égaux si les coefficients des termes de même degré sont égaux. On a donc un système de trois équations linéaires à trois inconnues :

$$\begin{cases} A+C=1 \\ -3A+B-2C=-6 \\ 2A-2B+C=4 \end{cases}$$

En résolvant, on obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right] \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2+3L_1 \\ L_3-2L_1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3+2L_2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1-L_3 \\ L_2-L_3 \\ L_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right].$$

Ce qui donne $A = 5$, B = 1 et C = –4. On peut donc écrire que :

$$\frac{x^2-6x+4}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{5}{x+1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-2}.$$

La matrice des coefficients est $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -3 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$.

On a alors $\det A=1$, $\operatorname{cof} A=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 4\\ -2 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $\operatorname{adj}(A)=(\operatorname{cof} A)^t=\begin{bmatrix}-3 & -2 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

La matrice inverse est $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)=\dfrac{1}{1}\begin{bmatrix}-3 & -2 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

En calculant le produit matriciel, on obtient :

$$A^{-1}\bullet\begin{bmatrix}1\\ -6\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -2 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\ -6\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 1\\ -4\end{bmatrix}.$$

Ce qui confirme la validité du résultat obtenu par la méthode de Gauss-Jordan.

17. a) En écrivant le système d'équations sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -4\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 11\\ -2\end{bmatrix}.$$

Pour vérifier que $X_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$ est une solution du système, il faut effectuer le produit :

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -4\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix},$$

ce qui donne :

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -4\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 11\\ -2\end{bmatrix}.$$

Par conséquent, X_1 est une solution du système d'équations.

b) De la même façon, $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -4\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}10\\ -5\\ -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 11\\ -2\end{bmatrix}$ confirme que X_2 est une solution du système d'équations.

c) $X_3=X_1+3\left(X_2-X_1\right)=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}+3\left[\begin{bmatrix}10\\ -5\\ -4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}9\\ -6\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28\\ -17\\ -10\end{bmatrix}.$

Le produit $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 28 \\ -17 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}$ confirme que X_3 est une solution du système d'équations.

d) $X_r = X_1 + r(X_2 - X_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + r\left(\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

Le produit

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \bullet \left[(1-r)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}\right] = (1-r)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= (1-r)\begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix} = (1-r+r)\begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

confirme que X_r est une solution du système d'équations.

18. Soit $AX = B$ un système d'équations linéaires dont X_1 et X_2 sont des solutions. On a alors :

$AX_1 = B$ et $AX_2 = B$. Pour montrer que les expressions de la forme $X_r = X_1 + r(X_2 - X_1)$, où r est un nombre réel, sont également des solutions, il faut montrer que le produit AX_r donne la matrice B.

$AX_r = A[X_1 + r(X_2 - X_1)]$

$= A[X_1 + rX_2 - rX_1]$, par distributivité de la multiplication par un scalaire sur la somme des matrices;

$= AX_1 + ArX_2 - ArX_1$, par distributivité de la multiplication matricielle sur la somme des matrices;

$= AX_1 + rAX_2 - rAX_1$, par commutativité de la multiplication par un scalaire;

$= B + rB - rB$, puisque X_1 et X_2 sont des solutions.

$= B$

On en conclut que les expressions de la forme $X_r = X_1 + r(X_2 - X_1)$, où r est un nombre réel, sont également des solutions du système d'équations.

19. a) En écrivant le système d'équations sous forme matricielle, on obtient $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Pour vérifier que $X_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ est une solution du système, il faut effectuer le produit :

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$, ce qui donne $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Par conséquent, X_1 est une solution du système d'équations.

b) De la même façon, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -22 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ confirme que X_2 est une solution du système d'équations.

c) $X_{2;3} = 2X_1 + 3X_2 = 2\begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -22 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -44 \\ 16 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Le produit $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -44 \\ 16 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ confirme que $X_{2;3}$ est une solution du système d'équations.

d) En appliquant les propriétés des opérations, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix} \bullet \left(r\begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -22 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix} \bullet \left(\begin{bmatrix} 11r \\ -4r \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -22s \\ 8s \\ -2s \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 11r \\ -4r \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -22s \\ 8s \\ -2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

20 Soit $AX = 0$ un système d'équations linéaires homogène dont X_1 et X_2 sont des solutions. On a alors : $AX_1 = 0$ et $AX_2 = 0$. Pour montrer que les expressions de la forme $X_{r;s} = rX_1 + sX_2$, où r et s sont des nombres réels, sont également des solutions, il faut montrer que le produit $AX_{r;s}$ donne la matrice 0.

$AX_{r;s} = A(rX_1 + sX_2)$

$= A(rX_1) + A(sX_2)$, par distributivité de la multiplication matricielle sur la somme des matrices;

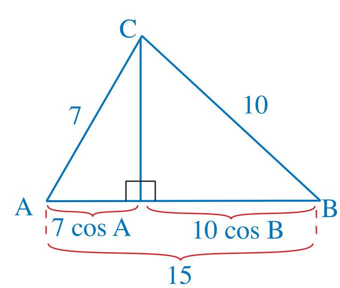
$= rAX_1 + sAX_2$, par commutativité de la multiplication par un scalaire;

$= r0 + s0$, puisque X_1 et X_2 sont des solutions.

$= 0$

Par conséquent, les expressions de la forme $X_{r;s} = rX_1 + sX_2$, où r et s sont des nombres réels, sont également des solutions du système d'équations.

21. a) Le système d'équations est $\begin{cases} 7 \cos A + 10 \cos B = 15 \\ 15 \cos B + 7 \cos C = 10 \\ 15 \cos A + 10 \cos C = 7 \end{cases}$



b) Les inconnues sont cos A, cos B et cos C. Le déterminant est

$$\begin{vmatrix} 7 & 10 & 0 \\ 0 & 15 & 7 \\ 15 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 2\,100 \neq 0.$$

En utilisant la méthode de l'adjointe, on obtient :

$$\operatorname{cof} M = \begin{bmatrix} 150 & 105 & -225 \\ -100 & 70 & 150 \\ 70 & -49 & 105 \end{bmatrix}, \operatorname{adj} M = \begin{bmatrix} 150 & -100 & 70 \\ 105 & 70 & -49 \\ -225 & 150 & 105 \end{bmatrix} \text{ et } M^{-1} = \frac{1}{2100}\begin{bmatrix} 150 & -100 & 70 \\ 105 & 70 & -49 \\ -225 & 150 & 105 \end{bmatrix}.$$

Le produit des matrices est alors :

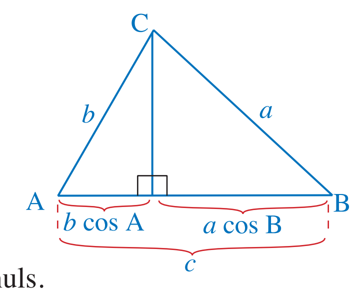
$$M^{-1}\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\ 100}\begin{bmatrix} 150 & -100 & 70 \\ 105 & 70 & -49 \\ -225 & 150 & 105 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\ 100}\begin{bmatrix} 1\ 740 \\ 1\ 932 \\ -1\ 140 \end{bmatrix}.$$

On trouve donc :

$$\cos \mathrm{A} = \frac{1\ 740}{2\ 100}, \cos \mathrm{B} = \frac{1\ 932}{2\ 100} \text{ et } \cos \mathrm{C} = \frac{-1\ 140}{2\ 100}.$$

c) $\mathrm{A} = \arccos\left(\frac{1\ 740}{2\ 100}\right) \approx 34{,}05°$, $\mathrm{B} = \arccos\left(\frac{1\ 932}{2\ 100}\right) \approx 23{,}07°$ et $\mathrm{C} = \arccos\left(\frac{-1\ 140}{2\ 100}\right) \approx 122{,}88°$.

22. a) Le système d'équations est : $\begin{cases} b \cos \mathrm{A} + a \cos \mathrm{B} = c \\ c \cos \mathrm{B} + b \cos \mathrm{C} = a \\ c \cos \mathrm{A} + a \cos \mathrm{C} = b \end{cases}$



b) Les inconnues sont cos A, cos B et cos C. Le déterminant est :

$$\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = b(ca-0) - a(0-bc) = 2abc \neq 0,$$ puisque a, b et c sont non nuls.

Le système a donc une solution unique. En utilisant la méthode de l'adjointe, on obtient :

$$\operatorname{cof} M = \begin{bmatrix} b & a & 0 \\ 0 & c & b \\ c & 0 & a \end{bmatrix}, \operatorname{adj} M = \begin{bmatrix} ac & bc & -c^2 \\ -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \end{bmatrix} \text{ et } M^{-1} = \frac{1}{2abc}\begin{bmatrix} ac & -a^2 & ab \\ bc & ab & -b^2 \\ -c^2 & ac & bc \end{bmatrix}.$$

Le produit des matrices est alors :

$$M^{-1}\begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{2abc}\begin{bmatrix} ac & -a^2 & ab \\ bc & ab & -b^2 \\ -c^2 & ac & bc \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{2abc}\begin{bmatrix} ac^2 - a^3 + ab^2 \\ bc^2 + a^2b - b^3 \\ -c^3 + a^2c + b^2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c^2 - a^2 + b^2)/2bc \\ (c^2 + a^2 - b^2)/2ac \\ (-c^2 + a^2 + b^2)/2ac \end{bmatrix}.$$

$$\cos \mathrm{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos \mathrm{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \text{ et } \cos \mathrm{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

c) $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, d'où l'on tire $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$,

$\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, d'où l'on tire $b^2 = a^2+c^2-2ac\cos B$,

$\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, d'où l'on tire $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$.

23. a) La matrice de transition est
$$\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{array}\right]\end{array}$$
, d'où $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$

b) On trouve $I - Q = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$ et $(I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2{,}333... & 1{,}666... \\ 2 & 1{,}666... & 2{,}333... \end{bmatrix}$

Si on place la souris dans le compartiment C_3, elle passera en moyenne 2 fois par le compartiment C_3, 1 fois par le compartiment C_4 et 1 fois par le compartiment C_5 avant de se retrouver prisonnière.

Si on place la souris dans le compartiment C_4, elle passera en moyenne 2 fois par le compartiment C_3, 2,333... fois par le compartiment C_4 et 1,666... fois par le compartiment C_5 avant de se retrouver prisonnière.

Si on place la souris dans le compartiment C_5, elle passera en moyenne 2 fois par le compartiment C_3, 1,666... fois par le compartiment C_4 et 2,333... fois par le compartiment C_5 avant de se retrouver prisonnière.

c) Le produit donne $(I-Q)^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2{,}333... & 1{,}666... \\ 2 & 1{,}666... & 2{,}333... \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Par conséquent, si on place la souris dans le compartiment C_3, il y aura en moyenne 4 changements de compartiment avant qu'elle se retrouve prisonnière. Si on place la souris dans le compartiment C_4, il y aura en moyenne 6 changements avant qu'elle se retrouve prisonnière, et si on place la souris dans le compartiment C_5, il y aura en moyenne 6 changements avant qu'elle se retrouve prisonnière.

d) On a le produit NR :

$$(I-Q)^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2{,}333... & 1{,}666... \\ 2 & 1{,}666... & 2{,}333... \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, quel que soit le compartiment de départ, il y a 50% de chances qu'elle se retrouve prisonnière dans le compartiment C_1 et 50% de chances qu'elle se retrouve prisonnière dans le compartiment C_2.

24. On note C_0, la position de départ. Les positions auxquelles on peut avoir accès sont C_1, C_2, C_4, et C_6. En effet, si on arrive en C_3, on passe directement en C_4 et si on arrive en C_5, on passe directement en C_2. Il faut en tenir compte dans l'établissement des probabilités. La matrice de transition est la suivante :

$$\begin{array}{c} \\ C_6 \\ C_4 \\ C_2 \\ C_1 \\ C_0 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_6 & C_4 & C_2 & C_1 & C_0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

On a alors : $(I-Q)=\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$ et $(I-Q)^{-1}=\begin{bmatrix} 3/2 & 3/4 & 0 & 0 \\ 3/2 & 9/4 & 0 & 0 \\ 3/2 & 5/4 & 1 & 0 \\ 3/2 & 17/12 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$

Le nombre moyen de coups est donné par la matrice :

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 3/4 & 0 & 0 \\ 3/2 & 9/4 & 0 & 0 \\ 3/2 & 5/4 & 1 & 0 \\ 3/2 & 17/12 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/4 \\ 15/4 \\ 15/4 \\ 17/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}25 \\ 3{,}75 \\ 3{,}75 \\ 4{,}25 \end{bmatrix}.$$

Il faut en moyenne moyen est de 4,25 coups pour parvenir à la case 6.

25. a) La matrice du modèle fermé est la suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}65 & 0{,}65 & 0{,}40 \\ 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}35 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}15 \end{bmatrix}$$

b) Le coût des produits agricoles utilisés pour produire 1 \$ de biens industriels est de 0,35 \$.

c) On écrit la matrice $I - Q$:

$$I - Q = \begin{bmatrix} 0{,}50 & -0{,}65 & -0{,}65 & -0{,}40 \\ -0{,}15 & 0{,}85 & -0{,}10 & -0{,}35 \\ -0{,}10 & -0{,}05 & 0{,}80 & -0{,}10 \\ -0{,}25 & -0{,}15 & -0{,}05 & 0{,}85 \end{bmatrix}$$

En résolvant le système, on trouve :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0{,}50 & -0{,}65 & -0{,}65 & -0{,}40 & 0 \\ -0{,}15 & 0{,}85 & -0{,}10 & -0{,}35 & 0 \\ -0{,}10 & -0{,}05 & 0{,}80 & -0{,}10 & 0 \\ -0{,}25 & -0{,}15 & -0{,}05 & 0{,}85 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2{,}723 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}954 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}525 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

On en tire la matrice production : $\begin{bmatrix} 2{,}723t \\ 0{,}954t \\ 0{,}525t \\ t \end{bmatrix}$

d) Si la valeur des biens du secteur industriel est de 200 000 $, la valeur des biens du secteur S_0 est de 544 600 $, celle des produits du secteur S_1 est 190 800 $ et celle des produits du secteur S_2 est 105 000 $.

26. On note F_0, la position de départ, c'est-à-dire l'état avant le premier achat. Il y a alors 7 états numérotés de 0 à 6. Si le client possède r figurines, la probabilité d'avoir un double à l'achat suivant, donc de rester à l'état r, est $r/6$. La probabilité d'obtenir une nouvelle figurine, donc de passer à l'état $r + 1$, est $(1 - r/6)$. La matrice de transition est la suivante.

$$\begin{array}{c} \\ F_6 \\ F_5 \\ F_4 \\ F_3 \\ F_2 \\ F_1 \\ F_0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} F_6 & F_5 & F_4 & F_3 & F_2 & F_1 & F_0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/6 & 3/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 2/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/6 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

On a alors :

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2/6 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/6 & 3/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4/6 & 4/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5/6 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } (I-Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 1{,}5 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 1{,}5 & 1{,}2 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 1{,}5 & 1{,}2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où } \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 1{,}5 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 1{,}5 & 1{,}2 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 1{,}5 & 1{,}2 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \\ 12{,}5 \\ 13{,}7 \\ 14{,}7 \end{bmatrix}$$

Pour passer de l'état F_0 à l'état F_6, il faut donc en moyenne 14,7 achats.

27. a) Pour construire la matrice de consommation, il faut diviser chacune des entrées du tableau par la production totale de la colonne de cette entrée. On a alors :

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}055\,221 & 0{,}014\,767 & 0{,}018\,659 & 0{,}003\,698 \\ 0 & 0{,}088\,691 & 0{,}008\,716 & 0{,}003\,250 \\ 0{,}000\,954 & 0{,}019\,719 & 0{,}198\,859 & 0{,}310\,912 \\ 0{,}000\,239 & 0{,}003\,544 & 0{,}006\,200 & 0{,}082\,668 \end{bmatrix}$$

b) $(I-Q)^{-1}=\begin{bmatrix} 1{,}058\ 477 & 0{,}017\ 741 & 0{,}024\ 944 & 0{,}012\ 784 \\ 0{,}000\ 014 & 1{,}097\ 614 & 0{,}012\ 003 & 0{,}007\ 957 \\ 0{,}001\ 371 & 0{,}028\ 760 & 1{,}251\ 849 & 0{,}424\ 397 \\ 0{,}000\ 285 & 0{,}004\ 440 & 0{,}008\ 514 & 1{,}093\ 020 \end{bmatrix}$

c) La demande externe est donnée par :

$$D=(I-Q)\bullet P=\begin{bmatrix} 0{,}944\ 779 & -0{,}014\ 767 & -0{,}018\ 659 & -0{,}003\ 698 \\ 0{,}000\ 000 & 0{,}911\ 309 & -0{,}008\ 716 & -0{,}003\ 250 \\ -0{,}000\ 954 & -0{,}019\ 719 & 0{,}801\ 141 & -0{,}310\ 912 \\ -0{,}000\ 239 & -0{,}003\ 544 & -0{,}006\ 200 & 0{,}917\ 332 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 3\ 353{,}8 \\ 2\ 200{,}9 \\ 6\ 677{,}6 \\ 4\ 245{,}9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\ 995{,}8 \\ 1\ 933{,}7 \\ 3\ 983{,}0 \\ 3\ 844{,}9 \end{bmatrix}$$

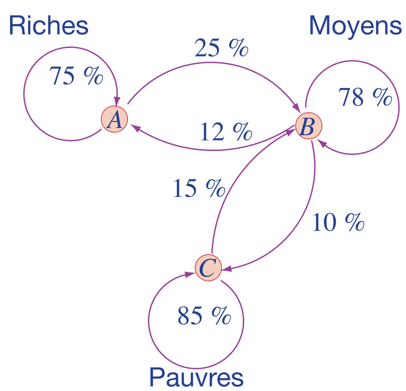
d) Si l'activité économique connaît un accroissement de 12 %, la demande externe sera :

$$D_1=1{,}12\times\begin{bmatrix} 2\ 995{,}8 \\ 1\ 933{,}7 \\ 3\ 983{,}0 \\ 3\ 844{,}9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\ 355{,}3 \\ 2\ 165{,}7 \\ 4\ 461{,}0 \\ 4\ 306{,}3 \end{bmatrix}$$

e) Si l'activité économique connaît un accroissement de 12 %, la matrice production sera :

$$P=(I-Q)^{-1}\bullet D_1=\begin{bmatrix} 1{,}058\ 477 & 0{,}017\ 741 & 0{,}024\ 944 & 0{,}012\ 784 \\ 0{,}000\ 014 & 1{,}097\ 614 & 0{,}012\ 003 & 0{,}007\ 957 \\ 0{,}001\ 371 & 0{,}028\ 760 & 1{,}251\ 849 & 0{,}424\ 397 \\ 0{,}000\ 285 & 0{,}004\ 440 & 0{,}008\ 514 & 1{,}093\ 020 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 3\ 355{,}3 \\ 2\ 165{,}7 \\ 4\ 461{,}0 \\ 4\ 306{,}3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\ 756{,}3 \\ 2\ 465{,}0 \\ 7\ 479{,}0 \\ 4\ 755{,}4 \end{bmatrix}.$$

28. a)



b) $P=\begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}12 & 0{,}78 & 0{,}10 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}85 \end{bmatrix}$

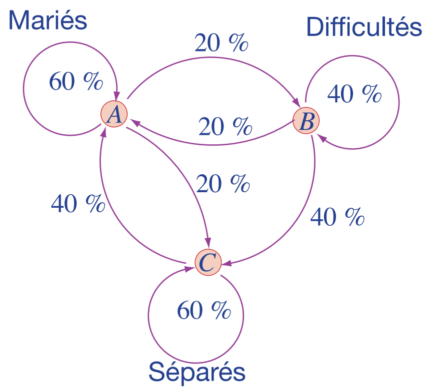
c) $P-I=\begin{bmatrix} -0{,}25 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}12 & -0{,}22 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}15 & -0{,}15 \end{bmatrix}$, $(P-I)^{t}=\begin{bmatrix} -0{,}25 & 0{,}12 & 0 \\ 0{,}25 & -0{,}22 & 0{,}15 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}15 \end{bmatrix}$

En déterminant la matrice inverse, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}25 & -0{,}22 & 0{,}15 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}15 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0{,}224 & 3{,}106 & 4{,}596 \\ 0{,}466 & -1{,}863 & 1{,}242 \\ 0{,}310 & -1{,}242 & -5{,}839 \end{bmatrix}$$

La répartition à long terme est donnée dans la première colonne. À long terme 22,4 % des ménages auront un revenu supérieur à 100 000 $, 46,6 % auront un revenu entre 30 000 $ et 100 000 $ et 31 % des ménages auront un revenu inférieur à 30 000 $.

. a)



b) $P=\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}0 & 0{,}6 \end{bmatrix}$

c) $P-I=\begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0 & -0{,}4 \end{bmatrix}$, $(P-I)^{\mathrm{t}}=\begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & -0{,}6 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix}$

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}2 & -0{,}6 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}462 & 1{,}538 & 1{,}154 \\ 0{,}154 & -1{,}154 & 0{,}385 \\ 0{,}385 & -0{,}385 & -1{,}538 \end{bmatrix}$$

À long terme, 46,2 % des personnes seront heureuses en ménage, 15,4 % éprouveront des difficultés dans leur couple et 38,5 % seront séparées.

30. a) $\begin{bmatrix} 6\,000 & 10\,000 & 3\,000 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\,400 & 8\,800 & 3\,800 \end{bmatrix}$

Dans un mois, 6 400 clients auront payé leur facture dès la réception, 8 800 l'auront payée entre 1 et 90 jours et 3 800 auront une mauvaise créance.

$$\begin{bmatrix} 6\,400 & 8\,800 & 3\,800 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\,080 & 8\,880 & 4\,040 \end{bmatrix}$$

Dans deux mois, 6 080 clients auront payé leur facture dès la réception, 8 880 l'auront payée entre 1 et 90 jours et 4 040 auront une mauvaise créance.

b) $P-I=\begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}4 & -0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}4 \end{bmatrix}$ et $(P-I)^{\mathrm{t}}=\begin{bmatrix} -0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}6 & -0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}6 & -0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}308 & 1{,}154 & 1{,}923 \\ 0{,}462 & -0{,}769 & 0{,}385 \\ 0{,}231 & -0{,}385 & -2{,}308 \end{bmatrix}$$

À long terme, environ 30,8% des clients (~5 852 clients) acquitteront leur facture sur réception, environ 46,2 % (~8 778 clients) l'acquitteront en moins de 90 jours et environ 23,1 % (~4 389 clients) prendront plus de 90 jours pour l'acquitter, s'ils l'acquittent.

31. a) Le coût des produits agricoles est de 0,60 $ par dollar de produits transformés.

b) Le coût est de 0,00 $ par dollar de produits transformés.

c) Le marché est en équilibre si la production totale est égale à la somme de la consommation interne et de la demande externe. L'équation est $P = Q \bullet P + D$, d'où $(I - Q) \bullet P = D$.

d) La matrice de consommation est $Q = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix}$, d'où $I - Q = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 & -0{,}6 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}8 \end{bmatrix}$

La matrice inverse de $I - Q$ est : $(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}538 & 1{,}202 & 1{,}154 \\ 0{,}000 & 1{,}250 & 0{,}000 \\ 0{,}385 & 0{,}769 & 1{,}538 \end{bmatrix}$

Par le produit matriciel, on obtient :

$$(I - Q)^{-1} \bullet D = \begin{bmatrix} 1{,}538 & 1{,}202 & 1{,}154 \\ 0{,}000 & 1{,}250 & 0{,}000 \\ 0{,}385 & 0{,}769 & 1{,}538 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 220 \\ 440 \\ 320 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,236{,}54 \\ 550{,}00 \\ 915{,}38 \end{bmatrix}$$

La production doit être de 1 236 540 $ dans le secteur agricole, de 550 000 $ dans le secteur de l'épicerie et de la restauration et de 915 380 $ dans le secteur de la transformation des aliments.

e) En considérant les autres activités comme un quatrième sous-secteur, le modèle d'économie fermée est décrit par la matrice :

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

f) Dans une économie fermée, il n'y a pas de demande externe, la condition est donc que la production totale soit égale à la consommation interne. L'équation est $P = Q \bullet P$, d'où $(I - Q) \bullet P = 0$. Il s'agit d'un système d'équations homogène.

g) $I - Q = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 & -0{,}6 & -0{,}2 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}6 & -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix}$

Le déterminant de la matrice $I - Q$ est égal à 0 puisque la somme des éléments dans chacune des colonnes est égale à zéro.

h) En appliquant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 & -0{,}6 & -0{,}2 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}6 & -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix} \approx \begin{matrix} 10L_3 \\ 10L_1 \\ 10L_2 \\ 10L_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \boxed{-2} & -3 & 8 & -2 \\ 8 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & -2 \\ -6 & -1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

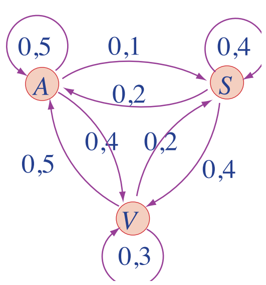
$$\approx \begin{matrix} L_1 \\ L_2+4L_1 \\ L_3 \\ L_4-3L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 8 & -2 \\ 0 & \boxed{-16} & 26 & -10 \\ 0 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & -26 & 12 \end{bmatrix} \approx \begin{matrix} 16L_1-3L_2 \\ L_2 \\ 2L_3+L_2 \\ 2L_4+L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} -32 & 0 & 50 & -2 \\ 0 & -16 & 26 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{26} & -14 \\ 0 & 0 & -26 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{matrix} 13L_1-25L_3 \\ L_2-L_3 \\ L_3 \\ L_4+L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -416 & 0 & 0 & 324 \\ 0 & -16 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 26 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{matrix} L_1/(-416) \\ L_2/(-16) \\ L_3/26 \\ L_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -81/104 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -7/13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La variable x_4 est libre, on pose $x_4 = t$ et on substitue dans les autres équations :
$\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) | \ x_1 = 81t/104, x_2 = t/4, \ x_3 = 7t/13, x_4 = t\}$.

i) Si $t = 208$, la transposée du vecteur P est $P^t = (162 \quad 52 \quad 112 \quad 208)$. La valeur des activités est de 162 000 $ dans le sous-secteur agricole, de 52 000 $ dans le sous-secteur de la consommation, de 112 000 $ dans le sous-secteur de la transformation et de 208 000 dans le sous-secteur complémentaire, emballage, transport, produits d'autre provenance, etc).

32. a) On note A le site de l'aéroport, S celui de Sainte-Foy et V, celui du Vieux-port. On obtient le diagramme de transition suivant :



b) $P = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 80 & 50 & 60 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 40 & 70 \end{bmatrix}$

d) $P - I = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & -0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & -0{,}7 \end{bmatrix}$

$$(P-I)^{t} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & -0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & -0{,}7 \end{bmatrix}$$

En inversant la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}1 & -0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & -0{,}7 \end{bmatrix}$

on obtient : $M^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}44 & 1{,}43 & 1{,}04 \\ 0{,}19 & -1{,}43 & -0{,}13 \\ 0{,}36 & 0{,}00 & -0{,}91 \end{bmatrix}$

La solution est dans la première colonne. À long terme, 44 % des automobiles se retrouveront à l'aéroport, 19 % à Sainte-Foy et 36 % au Vieux-Port.

e) La compagnie devrait garder 132 automobiles à l'aéroport, 57 à Sainte-Foy et 108 au Vieux-Port.

33. Soit A une matrice inversible d'ordre n. Pour montrer que la matrice inverse est unique, on pose comme hypothèse qu'il y a deux matrices inverses B et C et on montre que les deux sont égales ($B = C$).

Soit B une matrice inverse de A, on a donc $B \bullet A = A \bullet B = I$

et C une autre matrice inverse de A, on a donc $C \bullet A = A \bullet C = I$. On a alors

$B = B \bullet I$, puisque I est l'élément neutre du produit des matrices;

$= B \bullet (A \bullet C)$, puisque C est une matrice inverse de A;

$= (B \bullet A) \bullet C$, puisque la multiplication des matrices est associative;

$= I \bullet C$, puisque B est une matrice inverse de A;

$= C$, puisque I est l'élément neutre du produit des matrices.

34. a) La matrice associée augmentée est $\left[\begin{array}{cc|c} 16 & -6 & -5 \\ -6 & 8 & 10 \end{array}\right]$ et la matrice inverse est $A^{-1} = \dfrac{1}{46}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$.

b) $A^{-1} \bullet \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{46}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/23 \\ 65/46 \end{bmatrix}$. On trouve donc $I_1 = 0{,}217$ A et $I_2 = 1{,}413$ A.

c) En inversant les sources de tension, on a : $A^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{46}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/23 \\ -65/46 \end{bmatrix}$.

On trouve donc $I_1 = -0{,}217$ A et $I_2 = -1{,}413$ A et les courants de maille sont simplement inversés.

d) $A \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Il faudrait que la somme algébrique des sources de tension de la première maille soit de 30 V et que la source algébrique des sources de tension de la seconde maille soit de 6 V.

35. a) La matrice associée augmentée est $\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -4 & 0 & 8 \\ -4 & 9 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 9 \end{array}\right]$ .la matrice inverse est $A^{-1} = \dfrac{1}{172}\begin{bmatrix} 36 & 20 & 12 \\ 20 & 35 & 21 \\ 12 & 21 & 47 \end{bmatrix}$

b) $A^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{172}\begin{bmatrix} 36 & 20 & 12 \\ 20 & 35 & 21 \\ 12 & 21 & 47 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 476/172 \\ 489/172 \\ 603/172 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2{,}77 \\ 2{,}84 \\ 3{,}51 \end{bmatrix}.$

On trouve donc $I_1 = 2{,}77$ A, $I_2 = 2{,}84$ A et $I_3 = 3{,}51$A.

c) $A \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$

Il faudrait que la somme algébrique des sources de tension de la première maille soit de 9 V, celle de la seconde de 6 V et celle de la troisième de 6 V.

d) i) $A^{-1} \bullet \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{172}\begin{bmatrix} 36 & 20 & 12 \\ 20 & 35 & 21 \\ 12 & 21 & 47 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -476/172 \\ -489/172 \\ -603/172 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2{,}77 \\ -2{,}84 \\ -3{,}51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}.$

ii) $A^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ -9 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{172}\begin{bmatrix} 36 & 20 & 12 \\ 20 & 35 & 21 \\ 12 & 21 & 47 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 584/172 \\ 506/172 \\ -6/172 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3{,}40 \\ 2{,}94 \\ -0{,}03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}.$

iii) $A^{-1} \bullet \begin{bmatrix} -12 \\ 25 \\ -9 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{172}\begin{bmatrix} 36 & 20 & 12 \\ 20 & 35 & 21 \\ 12 & 21 & 47 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -12 \\ 25 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40/172 \\ 446/172 \\ -42/172 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0{,}23 \\ 2{,}59 \\ -0{,}24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}.$

36. La matrice associée augmentée est $\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & -2 & -9 \\ -2 & 9 & -3 & 12 \\ -2 & -3 & 8 & 20 \end{array}\right].$

a) La matrice inverse est $A^{-1} = \dfrac{1}{286}\begin{bmatrix} 63 & 22 & 24 \\ 22 & 44 & 22 \\ 24 & 22 & 50 \end{bmatrix}.$

b) $A^{-1} \bullet \begin{bmatrix} -9 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{286}\begin{bmatrix} 63 & 22 & 24 \\ 22 & 44 & 22 \\ 24 & 22 & 50 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -9 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 177/286 \\ 770/286 \\ 1048/286 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}62 \\ 2{,}69 \\ 3{,}66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}.$

c) $A\bullet\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-2&-2\\-2&9&-3\\-2&-3&8\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\12\\9\end{bmatrix}$.

Il faudrait que la somme algébrique des sources de tension de la première maille soit de 6 V, celle de la seconde de 12 V et celle de la troisième de 9 V.

d) i) $A^{-1}\bullet\begin{bmatrix}9\\-12\\-20\end{bmatrix}=\frac{1}{286}\begin{bmatrix}63&22&24\\22&44&22\\24&22&50\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}9\\-12\\-20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-177/286\\-770/286\\-1048/286\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}-0,62\\-2,69\\-3,66\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}$.

ii) $A^{-1}\bullet\begin{bmatrix}-11\\-12\\20\end{bmatrix}=\frac{1}{286}\begin{bmatrix}63&22&24\\22&44&22\\24&22&50\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}-11\\-12\\20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-477/286\\-330/286\\472/286\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}-1,67\\-1,15\\1,65\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}$.

iii) $A^{-1}\bullet\begin{bmatrix}-11\\0\\32\end{bmatrix}=\frac{1}{286}\begin{bmatrix}63&22&24\\22&44&22\\24&22&50\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}-11\\0\\32\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}75/286\\462/286\\1336/286\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0,26\\1,62\\4,67\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{bmatrix}$.

