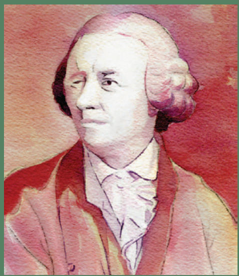


Leonhard Euler
1707-1783

Le nom d'Euler est resté attaché à plusieurs notions. La constante d'Euler est la limite lorsque n tend vers l'infini, de la différence entre la somme partielle de rang n de la série harmonique et du logarithme en base e de n.

Constante d'Euler

Dans *Introductio in analysin infinitorum* (1748), Euler a défini la célèbre constante, notée γ (gamma), qui porte aujourd'hui son nom et est définie par :

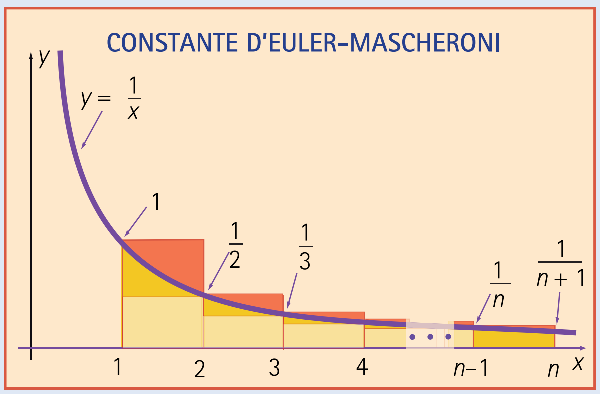
$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

Sous forme condensée, cette définition s'écrit

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right).$$

Dans la figure suivante, la somme des aires des rectangles dans l'intervalle [1; n] est :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$$



Par ailleurs, l'aire sous la courbe de la fonction définie par $f(x) = 1/x$ dans l'intervalle [1; n] est donnée par

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\,]_1^n = \ln|n| - \ln 1 = \ln n.$$

La limite lorsque n tend vers l'infini de chacune des ces expressions est l'infini, cependant leur différence est finie. En effet, l'aire sous la courbe est plus grande que la somme des aires des rectangles dont les hauteurs sont les images par la fonction des frontières de droite des rectangles et plus petite la somme des aires des rectangles dont les hauteurs sont les images par la fonction des frontières de gauche, soit :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < \ln n < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}$$

En notant S_n la somme partielle des n premier termes, soit

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},$$

on a

$$S_n - 1 < \ln n < S_n - \frac{1}{n}.$$

En soustrayant S_n à chaque membre de ces inégalités, on a

$$-1 < -S_n + \ln n < -\frac{1}{n}.$$

En multipliant chaque membre de la suite d'inégalités par –1, le sens des inégalités est changé et on obtient

$$\frac{1}{n} < S_n - \ln n < 1.$$

La suite dont le terme général est

$$u_n = S_n - \ln n$$

est donc une suite bornée, tous ses termes sont compris entre 0 et 1. Si elle est convergente, sa limite est comprise entre 0 et. Pour pouvoir conclure qu'elle est convergente, il montrer qu'elle est monotone.

Considérons la différence entre le terme de rang $n+1$ et le terme de rang n, soit

$$u_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)$$

et $$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n).$$

Leur différence est

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n).$$

Cette différence forme une suite de termes et on veut montrer qu'elle est strictement décroissante. Appliquons le test de la dérivée à la fonction dont les images des valeurs entières sont les termes de la différence. Cette fonction est

$$f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln(x+1)+\ln(x).$$

Notons d'abord que la fonction est toujours négative pour $x\geq 1$

En la dérivant, on obtient

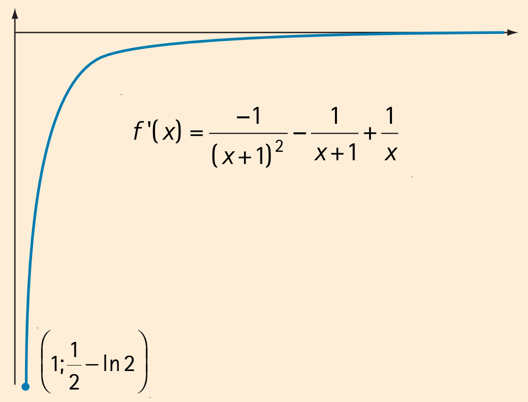
$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{-1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}\\&=\frac{-x-x(x+1)+(x+1)^2}{x(x+1)^2}\\&=\frac{-x-x^2-x+x^2+2x+1}{x(x+1)^2}\\&=\frac{1}{x(x+1)^2}.\end{aligned}$$

La dérivée est positive pour $x\geq 1$. Par conséquent, la fonction $f(x)$ est toujours croissante pour $x\geq 1$. De plus, la limite à l'infini de la fonction est

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}f(x)&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\ln(x+1)+\ln(x)\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\&=0-\ln(1)=0.\end{aligned}$$

Puisque la suite des différences des sommes partielles consécutives est monotone croissante et bornée supérieurement, elle converge.

La suite des différences de sommes partielles consécutives est négative et monotone croissante, par conséquent, la suite des sommes partielles est monotone décroissante et puisqu'elle est également bornée, elle converge.



La suite formée de la différence entre deux termes consécutifs de la suite des sommes partielles est monotone croissante et bornée supérieurement par 0. Elle est donc convergente.

Cette constante a été introduite par Euler sous la forme d'une série, soit

$$\gamma=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$$

La série harmonique et la série de terme général $\ln n$ sont toutes deux divergentes, mais les deux sont asymptotiques.

Cette constante a fait l'objet de plusieurs évaluations numériques depuis le XVIII^{e} siècle. En 1735, Euler en fait une première évaluation et parvient à γ=0,577 218. Dans sa seconde tentative, en 1781, et obtient

$$\gamma=0{,}577\,215\,664\,901\,532.$$

En 1790, Lorenzo Mascheroni[1] obtient un développement de 32 décimales dont 19 sont exactes. Il a fait connaître cette constante en publiant son résultat dans son ouvrage *Geometria del compasso* publié en 1791. Avec l'avènement des ordinateurs, Shigeru Kondo et Steve Pagliarulo sont parvenus à dix milliards de décimales. Cependant, on ne sait toujours pas si γ est un nombre rationnel ou irrationnel.

1. L'abbé Lorenzo Mascheroni (1750-1800) est un géomètre italien, député de la République cisalpine. En 1786 il esy nommé professeur d'algèbre et de géométrie à l'Université de Pavie, où il eut pour élève Alessandro Volta. Son nom est associé à la constante γ qui est aussi appelée constante d'Euler-Mascheroni.