Le mathématicien français Adrien-Marie Legendre a participé aux travaux visant à réformer le systèmes de mesures. Il a publié Éléments de géométrie, une présentation simplifiée et actualisée des Éléments d'Euclide qui fut réédité 12 fois, de 1794 à 1823. La dernière édition fut traduite en anglais, en allemand et en arabe. La version anglaise a connu du succès aux États-Unis durant tout le XIXe siècle.

Adrien-Marie Legendre
1752-1833

Adrien-Marie Legendre

Théorème des nombres premiers

Pour un réel x, le nombre $\pi(x)$ de nombres premiers inférieurs ou égaux à x est équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, au quotient de x par son logarithme népérien. Soit

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \to +\infty),$$

que l'on exprime plutôt sous la forme

$$\lim_{x\to+\infty} \pi(x)\frac{\ln x}{x} = 1.$$

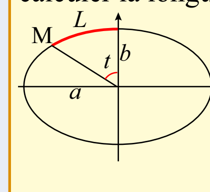
Adrien-Marie Legendre est issu d'une famille aisée, ce qui lui permet de consacrer son temps à sa passion, les mathématiques. Conscient de l'importance d'une bonne éducation pour la promotion sociale, ses parents l'inscrivent au collège Mazarin, l'une des meilleures écoles de l'époque. Un de ses professeurs remarque ses aptitudes pour les mathématiques et s'applique à stimuler son talent. Le 25 juillet 1770, à l'âge de dix-huit ans, Legendre soutient sa thèse de doctorat, commençant ainsi son parcours de mathématicien. Pendant les années qui suivent, il poursuit sa formation en fréquentant assidûment la bibliothèque de son ancien collège et, en 1775, il est nommé professeur de mathématiques de l'école militaire de Paris, sur recommandation de Jean Le Rond d'Alembert(1717-1783).

Pendant les cinq années suivantes, il enseigne les éléments mathématiques de la balistique. Il poursuit parallèlement des recherches dans ce domaine et remporte le premier prix de l'Académie de Berlin pour le sujet *Déterminer la courbe décrite par des projectiles et des bombes en tenant compte de la résistance de l'air, et formuler des règles permettant de connaître les trajectoires en fonction de différentes vitesses initiales et de différents angles de projection.*

À l'école militaire, Legendre côtoie Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) qui le met en contact avec Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Au début de 1783, Legendre complète un manuscrit sur l'attraction des sphéroïdes qui lui permet d'être admis dans le cercle de l'Académie de Paris.
En 1787, Legendre est nommé commissaire chargé des opérations géodésiques aux côtés de Pierre Méchain et Jean-Baptiste Delambre.
À la Révolution française, toutes les Académies sont supprimées et Legendre se retrouve sans salaire. Il se plonge alors dans la révolution système des poids et mesures de l'époque et devient membre de la Commission internationale chargée de vérifier tout le travail préparatoire à l'adoption du système métrique. Nommé, Delambre et Méchain, sur la commission chargée de prendre les mesures géodésiques du méridien de Dunkerque à Barcelone, il sollicite l'autorisation de rester à paris pour faire des recherches sur les procédés et les calculs qu'il faudra faire sur les mesures effectuées.
Durant les cinq années où il a enseigné la balistique à l'École militaire, Legendre a réalisé des travaux sur la trajectoire des projectiles, il en tire ses méthodes pour l'étude des comètes (1805). C'est à l'occasion de ces calculs de mécanique céleste qu'il publie la méthode des moindres carrés. Il utilise cette méthode calculer la longueur d'un degré de méridien à l'aide des mesures Dans ses calculs, Legendre applique aussi son théorème de trigonométrie sphérique (voir encadré sur ce sujet.. La mesure du mètre est présentée le 22 juin 1799.

Les intégrales elliptiques

À l'origine, les intégrales elliptiques sont apparues dans les tentatives pour calculer la longueur d'un arc d'ellipse.



$$\begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$$L(t) = a\int_0^t \sqrt{1-k^2\sin^2 u}\ du$$

où $k^2 = 1 - b^2/a^2$,
$t \in [0; \pi/2]$.

Dans cette expression, k est l'*excentricité* de l'ellipse. En posant $z = \sin u$, on doit effectuer une intégrale indéfinie de la forme :

$$\int\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz.$$

C'est une intégrale elliptique de seconde espèce dans la classification de Legendre. Les trois espèces de cette classification sont :

1. $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}$,
2. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz$,
3. $\displaystyle\int \frac{dz}{(1+nt^2)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}$.

Abel a développé une nouvelle approche de résolution en considérant la fonction réciproque de celle à effectuer. Cette approche donne des fonctions du plan complexe, périodiques dans deux directions., elles sont appelées *fonctions elliptiques.* Abel est mort prématurément à 27 ans sans avoir pu compléter ses recherches. Carl Friedrich Gauss et Jacobi et Karl Weierstrass (1815-1897) ont poursuivi ses travaux.

Dans son ouvrage de théorie des nombres, Legendre énonce la *conjecture des nombres premiers*[1] en théorie analytique des nombres. Cette conjecture[2] porte sur la distribution asymptotique des nombres premiers. Cette conjecture fait partie d'une famille de résultats et de conjectures liés à l'espacement entre les nombres premiers.

Travaux en géométrie

Dans ses travaux en géométrie, Legendre utilise des raisonnements par l'absurde pour tenter de démontrer le cinquième postulat d'Euclide. Il n'envisage pas qu'il puisse y avoir des géométries dans lesquelles le cinquième postulat est faux. Cette hypothèse sera retenue quelques décennies plus tard par Janos Bolyai (1802-1860) et Nikolaï Lobachevski (1792-1856) qui développeront indépendamment des géométries non-Euclidiennes.

Travaux en analyse

Entre 1825 et 1827, Legendre publie *Traité des fonctions elliptiques et intégrales Eulériennes* qui est une compilation de ses recherches sur ces intégrales qui avaient débuté dès 1786. Pendant plus de 40 ans, Legendre est le seul mathématicien à s'intéresser aux intégrales elliptiques. En 1827, il reçoit une lettre du mathématicien allemand Carl Gustav Jacobi (1804-1851) qui s'intéresse aussi à ces intégrales. En 1828, Jacobi l'informe qu'un mathématicien norvégien Niels Endrik Abel (1802-1829) étudie aussi ces intégrales. C'est ce dernier qui réussira à résoudre complètement le problème en ayant recours aux inverses des fonctions.

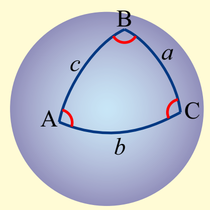
1. Gauss avait fait cette conjecture en 1792, mais ne l'a révélé qu'en 1849.
2. La conjecture a été démontrée indépendamment, en 1896, par Jacques Hadamard (1865-1963) et Charles-Jean de La Vallée Poussin (1866-1962), c'est donc maintenant un théorème.

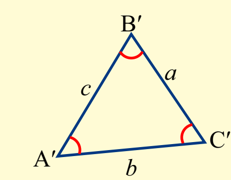
Conjecture de Legendre

La conjecture de Legendre énonce qu'il existe un nombre premier entre n^2 et $(n+1)^2$ pour tout entier $n \geq 1$.

**Théorème de Legendre
Trigonométrie sphérique**

Soit ABC un triangle sphérique sur la sphère unitaire avec de petits côtés a, b, c et A'B'C' le triangle planaire de mêmes côtés.





Alors, les angles du triangle sphérique dépassent les angles correspondants du triangle plan d'environ un tiers de l'excès sphérique qui est la quantité par laquelle la somme des trois angles dépasse π.
Dans un triangle sphérique la somme des angles d'un triangle est comprise entre 180° et 540° (ou entre π et 3π en radians) et l'*excès sphérique* E_s est :

$$E_s = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} - \pi.$$