Rappels

LES RELATIONS *et les* FONCTIONS

par

ANDRÉ ROSS

Distinguer correctement les notions de relation et de fonction.

Identifier correctement le domaine et le codomaine d'une règle de correspondance.

Déterminer correctement la relation inverse d'une règle de correspondance.

OBJECTIFS

- Déterminer le domaine et le codomaine d'une relation ou d'une fonction.
- Déterminer la relation inverse d'une correspondance et indiquer si elle est une fonction.

VIDÉOS

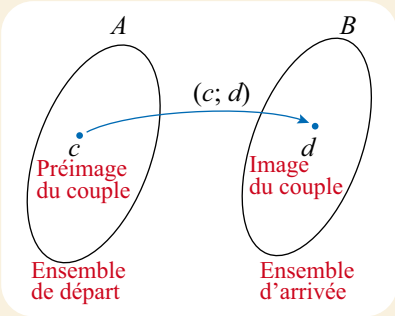
Les vidéos qui accompagnent ce texte sont disponibles à l'adresse : prodafor.com

1.11 Les relations et les fonctions

Nous présentons dans cette section les notions de relation et de fonction et quelques définitions associées comme le domaine, le codomaine et la relation inverse.

Relations01

Relations



Relation

On appelle **relation** de A dans B tout ensemble de couples $(c; d)$ tel que $c \in A$ et $d \in B$.

L'ensemble A est appelé **ensemble de départ** et B, **ensemble d'arrivée** de la relation.

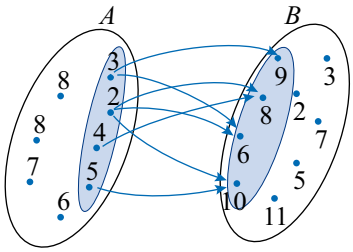
Le premier élément d'un couple $(c; d)$ de la relation est appelé **préimage** de d par la relation et le deuxième élément du couple est appelé **image** de c par la relation.

Relations02

Domaine et codomaine d'une relation

On appelle **domaine d'une relation** l'ensemble des valeurs qui sont préimage dans au moins un couple de la relation.

On appelle **codomaine d'une relation** l'ensemble des valeurs qui sont image dans au moins un couple de la relation.



$x \neq y$ et x divise y

Considérons les ensembles A et B ci-contre et la règle de correspondance $x \neq y$ et x divise y. Cette règle de correspondance entre A et B définit la relation

$$R = \{(3; 9); (2; 8); (4; 8); (2; 6); (3; 6); (2; 10); (5; 10)\}.$$

Le sous-ensemble de l'ensemble de départ contenant les éléments $\{3; 2; 4; 5\}$ est le domaine de la relation R et son codomaine est le sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée contenant les éléments $\{9; 8; 6; 10\}$.

Il est à noter que le domaine n'est pas le seul sous-ensemble possible de l'ensemble A et le codomaine n'est pas le seul sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée.

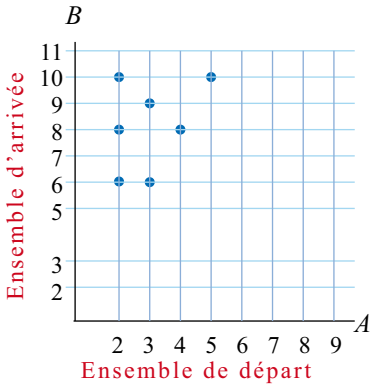
Représentations en extension

La représentation d'une relation sous la forme d'un tableau ou d'une liste de couples est une représentation en **extension**. Ainsi, la représentation en extension de cette relation est :

$$R = \{(3; 9); (2; 8); (4; 8); (2; 6); (3; 6); (2; 10); (5; 10)\}.$$

La description en **compréhension** d'une relation consiste en l'énoncé d'une **règle de correspondance**. Ainsi, la relation R se définit en compréhension par :

$$R = \{(x; y) \in A \times B \mid x \neq y \text{ et } x \text{ divise } y\}.$$



En plus de la représentation graphique de la page précédente, on peut représenter une relation par deux axes perpendiculaire dont l'axe horizontal représente l'ensemble de départ et l'axe vertical représente l'ensemble d'arrivée. Sur ces axes, on représente les éléments. En chacun de ces éléments, on trace une perpendiculaire à l'axe. En associant à chaque couple de la relation un point dans ce système d'axes, on obtient un ensemble de points qui forment la **représentation graphique** de la relation. L'ensemble des points de ce quadrillage forme $A \times B$, appelé **produit cartésien** de A par B.

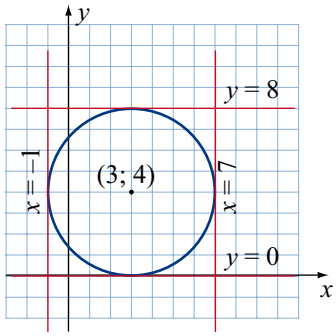
On note que la représentation graphique permet de détecter rapidement le domaine. Si la droite verticale tracée à partir d'une valeur de l'ensemble de départ rencontre un des points du graphique, cette valeur fait partie du domaine de la relation. Dans ce cas, on trouve dans ce cas $\{2; 3; 4; 5\}$. De la même façon, si on trace une horizontale à partir d'un point de l'ensemble d'arrivée et que celle-ci rencontre un des points du graphique, cette valeur fait partie du codomaine. On trouve ici $\{6; 8; 9; 10\}$.

Il est à noter que si l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée est l'ensemble de réels $\mathbb{R}$, on note le produit cartésien $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLE 1.11.1

Déterminer le domaine et le codomaine de la relation définie par

$$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0\}.$$



Solution

En complétant le carré, on obtient que la règle de correspondance est celle d'un cercle de rayon 4 centrée en (3; 4). Par conséquent, le domaine de cette relation est

$$\{(x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 7\}$$

et le codomaine est

$$\{(y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 8\}.$$

Relations03

Graphique et symétries

Pour faciliter la représentation graphique d'une relation ou d'une fonction, on peut déterminer si la règle de correspondance présente une symétrie par rapport à l'origine, par rapport à l'axe des x ou par rapport à l'axe des y. Pour ce faire, on a trois critères.

Si la règle de correspondance reste inchangée lorsqu'on substitue $-x$ à x et $-y$ à y, alors le graphique de la correspondance est symétrique par rapport à l'origine.

Si la règle de correspondance reste inchangée lorsqu'on substitue $-x$ à x alors le graphique de la correspondance est symétrique par rapport à l'axe des y.

Si la règle de correspondance reste inchangée lorsqu'on substitue $-y$ à y alors le graphique de la correspondance est symétrique par rapport à l'axe des x.

EXEMPLE 1.11.2

Isoler la variable y dans les règles de correspondance suivantes. À partir de l'expression obtenue, déterminer son domaine et son codomaine. Donner les zéros et l'ordonnée à l'origine de cette règle de correspondance. Indiquer s'il s'agit d'une relation ou d'une fonction.

Relations04

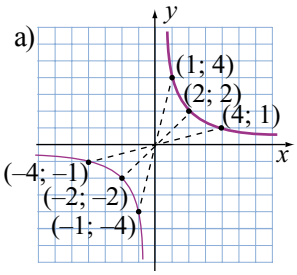
a) $xy - 4 = 0$

b) $x^2 - y - 4 = 0$

c) $x + y^2 - 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4 = 0$

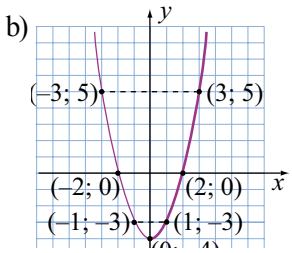
Solution

a)


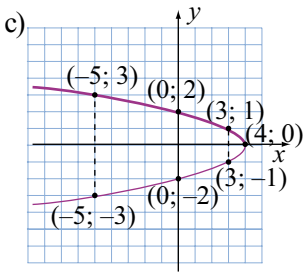
En substituant $-x$ à x et $-y$ à y dans la règle de correspondance, on obtient :

$$(-x) \times (-y) - 4 = 0, \text{ d'où } xy - 4 = 0.$$

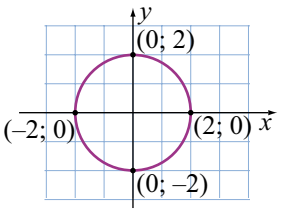
Cette substitution laisse la règle de correspondance inchangée, le graphique est donc symétrique par rapport à l'origine. Il suffit donc de calculer les correspondances pour les valeurs positives de x et de les reproduire symétriquement par rapport à l'origine.

b)


On constate directement que la courbe n'est pas symétrique par rapport à l'origine puisqu'en substituant $-y$ à y, on change la règle de correspondance. Cependant, en substituant $-x$ à x, la règle de correspondance est inchangée puisque cette variable n'apparaît qu'à l'exposant 2 dans la règle de correspondance. Le graphique est donc symétrique par rapport à y. Il suffit donc de calculer les correspondances pour les valeurs positives de la variable x et de les reproduire par symétrie,

c)


On constate encore directement que la courbe n'est pas symétrique par rapport à l'origine puisqu'en substituant $-x$ à x, on change la règle de correspondance. Cependant, en substituant $-y$ à y, la règle de correspondance est inchangée puisque cette variable n'apparaît qu'à l'exposant 2 dans la règle de correspondance. Le graphique est donc symétrique par rapport à x. Il suffit donc de calculer les correspondances pour les valeurs positives de la variable y et de les reproduire par symétrie.

d)


On reconnaît que cette règle de correspondance définit un cercle de rayon 2 centré à l'origine. En appliquant les trois critères, on constate le graphique possède les trois symétries.

Fonction

Une **fonction** est une relation pour laquelle chaque élément du domaine a une et une seule image.

Relations05

Zéros et ordonnée à l'origine d'une fonction

Les **zéros** d'une fonction sont les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$. L'**ordonnée à l'origine** est l'image de 0 par la fonction.

Le fait d'isoler la variable y dans une équation à deux inconnues permet d'expliciter la relation entre les variables et de déterminer s'il s'agit d'une relation ou d'une fonction.

EXEMPLE 1.11.3

Isoler la variable y dans les règles de correspondance suivantes. À partir de l'expression obtenue, déterminer son domaine et son codomaine. Donner les zéros et l'ordonnée à l'origine de cette règle de correspondance. Indiquer s'il s'agit d'une relation ou d'une fonction.

a) $2x - 3y - 8 = 0$

b) $xy - 4 = 0$

c) $x^2 - y - 4 = 0$

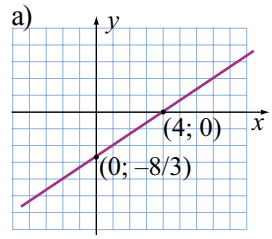
d) $x^2 + y^2 - 4 = 0$

Relations06

Solution

a) En isolant y, on obtient $y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$.

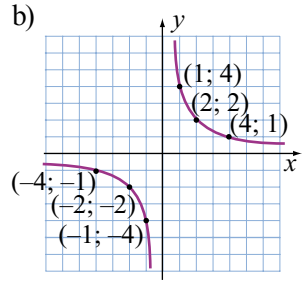
On reconnaît l'équation d'une droite dont la pente est 2/3. Elle est définie pour tout nombre réel, son domaine est donc l'ensemble des réels, tout comme son codomaine. Son zéro est la valeur de x correspondant à $y=0$, soit $x = 4$ et la valeur de y correspondant à $x=0$, soit $y=-8/3$. La droite coupe l'axe des y au point $(0; -8/3)$. Cette règle de correspondance définit une fonction puisqu'à chaque valeur x du domaine il n'y a qu'une seule valeur de y correspondante.



Relations07

b) En isolant y, on obtient $y = \frac{4}{x}$.

La règle de correspondance n'a pas de zéro ni d'ordonnée à l'origine. Le graphique ne coupe aucun des axes. La règle de correspondance n'est pas définie à $x = 0$, le domaine est donc $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. La règle de correspondance n'est pas définie à $y = 0$, le codomaine est donc $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Cette règle de correspondance définit une fonction puisqu'à chaque valeur x du domaine, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, il n'y a qu'une seule valeur de y correspondante.

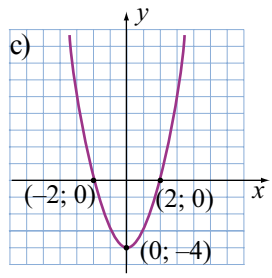


REMARQUE

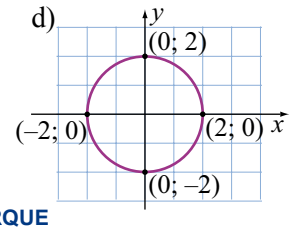
On note qu'en b), la relation n'est pas définie pour toutes les valeurs de x, car la division par zéro n'est pas définie.

c) La règle de correspondance obtenue en isolant y est $y = x^2 - 4$.

Elle est définie pour tout nombre réel, son domaine est donc l'ensemble des réels. La règle de correspondance n'est pas définie si $y < -4$, le domaine est donc $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -4\}$. En posant $y = 0$, on obtient $x^2 - 4 = 0$, d'où $x^2 = 4$ et $x = \pm 2$, ce sont les zéros. Le graphique coupe donc l'axe des x à $(-2; 0)$ et à $(2; 0)$. En posant $x = 0$, on obtient $y = -4$, c'est l'ordonnée à l'origine. Le graphique coupe l'axe des y au point $(0; -4)$. Cette règle de correspondance définit une fonction puisqu'à chaque valeur x du domaine il n'y a qu'une seule valeur de y correspondante.



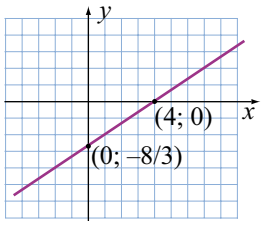
d)



REMARQUE
La relation n'est pas définie pour toutes les valeurs de x, car l'extraction de la racine carrée d'un nombre négatif n'est pas définie. Certaines valeurs du domaine ont deux images.

d) La règle de correspondance obtenue en isolant y est $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$. Elle n'est définie que pour les nombres réels compris entre –2 et 2. Son domaine est donc l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 2\}$. De même, le codomaine est l'ensemble des nombres réels entre –2 et 2. Son domaine est donc l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 2\}$. Les zéros sont $x = \pm 2$, les ordonnées à l'origine sont également ±2. Cette règle de correspondance définit une relation puisque certaines valeurs x du domaine ont deux valeurs de y correspondantes

Relation réciproque et fonction inverse



Relation réciproque et fonction inverse

Soit f une fonction. On appelle **relation réciproque** de f, la relation formée des couples réciproques de la fonction f. Lorsque la relation réciproque d'une fonction est elle-même une fonction, on l'appelle **fonction inverse** et on la note f^{-1}.

Puisque le couple réciproque d'un couple (c; d) est le couple (d; c), on obtient la règle de correspondance de la relation réciproque d'une fonction f en isolant la variable indépendante dans la règle de correspondance de f. Selon l'usage, en mathématiques, on emploie la lettre x pour désigner la variable indépendante. C'est pourquoi, après avoir isolé celle-ci, on intervertit x et y pour écrire la règle de correspondance de la relation réciproque.

On peut construire rapidement le graphique de la relation réciproque puisque, dans un système cartésien, les couples réciproques sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

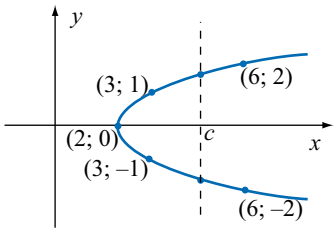
EXEMPLE 1.11.4

Déterminer la règle de correspondance de la relation réciproque de chacune des fonctions suivantes. Donner le domaine de la relation réciproque et esquisser son graphique et dire si c'est une fonction.

a) $y = x^2 + 2$ b) $y = x^3 + 1$

Relations08

Solution



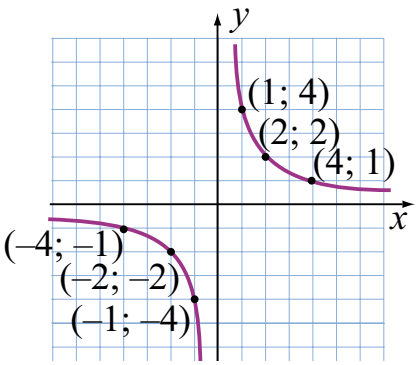
a) Pour déterminer la règle de correspondance de la relation réciproque, on isole la variable x dans l'équation $y = x^2 + 2$.
On obtient $x^2 = y - 2$ et $x = \pm\sqrt{y - 2}$. En intervertissant la désignation des variables, on a la règle de correspondance de la relation réciproque

$$y = \pm\sqrt{x - 2}.$$

Le domaine de cette relation est l'ensemble des valeurs de x telles que $x - 2 \geq 0$, soit l'intervalle $[2; \infty[$.

Pour esquisser le graphique, on pourrait calculer des correspondances, mais il est plus simple de représenter d'abord la fonction $f(x) = x^2 + 2$, puis de construire le graphique de la relation réciproque par symétrie par rapport à la droite $y = x$. Le graphique de la fonction f est une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe des y et dont le sommet est (0; 2). En se servant de la symétrie, on obtient le graphique représenté ci-contre.

La relation réciproque n'est pas une fonction, car certains des éléments du domaine ont deux images. C'est le cas, par exemple, de $x = 3$ qui est la préimage des couples (3; 1) et (3; –1).



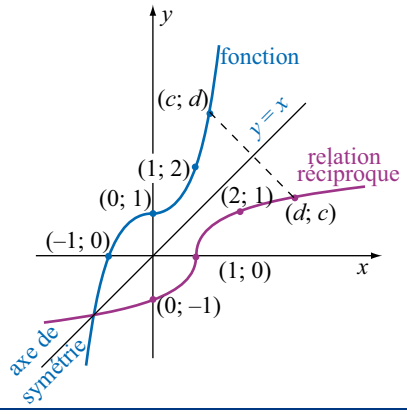
b) Pour déterminer la règle de correspondance de la relation réciproque, on isole la variable x dans l'équation $y = x^3 + 1$. On obtient $x^3 = y - 1$ et $x = \sqrt[3]{y-1}$. En intervertissant la désignation des variables, on obtient la règle de correspondance de la relation réciproque

$$y = \sqrt[3]{x-1}.$$

Puisqu'une racine impaire est définie pour tout nombre réel, le domaine de cette relation est l'ensemble des nombres réels.

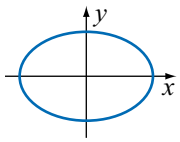
Pour esquisser le graphique, on trace d'abord le graphique de la fonction $f(x) = x^3 + 1$, puis on construit celui de la relation réciproque par symétrie par rapport à la droite $y = x$. On obtient ainsi le graphique représenté ci-contre.

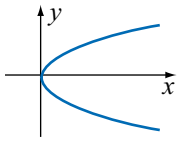
La relation réciproque est une fonction.

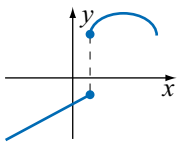


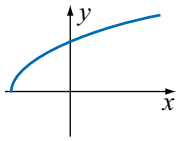
1.12 Exercices

1. Dire si les graphiques suivants représentent des fonctions ou de simples relations.

a)


c)


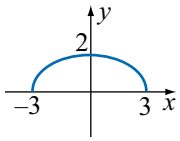
b)


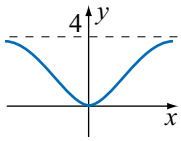
d)


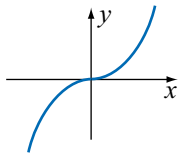
2. Déterminer si les équations suivantes définissent des fonctions.

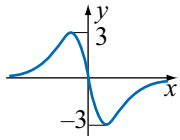
a) $3x + 4y - 5 = 0$
b) $x^2 + 4y + 4 = 0$
c) $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$
d) $xy + 4y - 2x = 0$

3. Déterminer le domaine et le codomaine des fonctions représentées par les graphiques suivants.

a)


c)


b)


d)


4. Trouver les zéros et l'ordonnée à l'origine des fonctions définies par les règles de correspondance suivantes.

a) $f(x) = 5x - 2$
b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$
c) $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{2x+5}$
d) $f(x) = \sqrt{x+5}$
e) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$
f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$
g) $f(x) = \sqrt{9-x}$
h) $f(x) = \dfrac{5}{x-2}$

5. Trouver la préimage de c par la fonction dont la règle de correspondance est donnée.

a) $c = 5$, $f(x) = x^2 + x - 7$
b) $c = 7$, $f(x) = 3x - 2$

6. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}.$$

a) Trouver la préimage de 4 par la fonction f.
b) Trouver la préimage de 2 par la fonction f.
c) Les valeurs 4 et 2 font-elles partie du codomaine de la fonction?
d) Trouver la préimage d'un élément y quelconque par la fonction f.
e) Dire à quelle condition un élément y fait partie de l'image de la fonction.

7. Déterminer le domaine et le codomaine des fonctions définies par :

a) $f(x) = \sqrt{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{x-9}{x-2}$

8. Trouver le domaine et le codomaine des fonctions définies par les règles de correspondance suivantes.

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

c) $f(x) = 2^x$

d) $f(x) = x^3$

e) $f(x) = x^2 - 3x$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

g) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

h) $f(x) = \sqrt{14 - 3x}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

j) $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x-5}$

9. Déterminer la règle de correspondance de la relation réciproque. Indiquer si cette règle de correspondance définit une relation ou une fonction.

a) $y = 4x - 2$

b) $y = x^2$

c) $y = \sqrt{4 - x^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

e) $y = \dfrac{x^2 - 2}{4}$

f) $y = \dfrac{4}{x-2}$

g) $y = \dfrac{27}{x^3}$

h) $y = \dfrac{4}{x^2}$

Réponses

1. a) Relation
   b) Relation
   c) Relation
   d) Fonction
2. a) Fonction
   b) Fonction
   c) Relation
   d) Fonction
3. a) $\text{dom}_f = [-3; 3]$, $\text{codom}_f = [0; 2]$
   b) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$, $\text{codom}_f = \mathbb{R}$
   c) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$, $\text{codom}_f = [0; 4[$
   d) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$, $\text{codom}_f = [-3; 3]$
4. a) (2/5; 0) et (0; –2)
   b) (–3/2; 0) et (0; 3)
   c) (–3; 0), (2; 0), (0; –6/5)
   d) (–5; 0), (2; 0) et $(0; \sqrt{5})$
   e) (±4; 0) et (0; 4)
   f) pas de zéro et (0; 1/3)
   g) (9; 0) et (0; 3)
   h) pas de zéro et (0; –5/2)
5. a) $x = 4$ et $x = -3$
   b) $x = 3$
6. a) –13/2
   b) pas de préimage
   c) 4 fait partie du codomaine, mais pas 2.
   d) $x = (1 + 3y)/(2 - y)$
   e) $\text{codom}_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$
7. a) $\text{dom}_f = [2; \infty[$ et $\text{codom}_f = [0; \infty[$
   b) $\text{dom}_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $\text{codom}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
8. a) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$ et $\text{codom}_f = \mathbb{R}$
   b) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$ et $\text{codom}_f = [0; \infty[$
   c) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$ et $\text{codom}_f =]0; \infty[$
   d) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$ et $\text{codom}_f = \mathbb{R}$
   e) $\text{dom}_f = \mathbb{R}$ et $\text{codom}_f = [-9/4; \infty[$
   f) $\text{dom}_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $\text{codom}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
   g) $\text{dom}_f = [-4; 4]$ et $\text{codom}_f = [0; 4]$
   h) $\text{dom}_f =]-\infty; 14/3]$ et $\text{codom}_f = [0; \infty[$
   i) $\text{dom}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\text{codom}_f =]0; \infty[$
   j) $\text{dom}_f = \mathbb{R}\setminus\{5/2\}$ et $\text{codom}_f = \mathbb{R}\setminus\{3/2\}$
9. a) $y = (x + 2)/4$, fonction réciproque,
   b) $y = \pm\sqrt{x}$, relation.
   c) $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, relation.
   d) $y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$, relation.
   e) $y = \pm\sqrt{4x + 2}$, relation.
   f) $y = \dfrac{4 + 2x}{x}$, relation.
   g) $y = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$, fonction.
   h) $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, relation.