PROGRAMMATION LINÉAIRE

CHAPITRE 13

Résoudre des problèmes d'optimisation à l'aide d'un système d'inéquations linéaires

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- la description d'un ensemble de contraintes par un système d'inéquations linéaires;
- l'utilisation de la géométrie vectorielle pour déterminer la solution optimale;
- l'interprétation de la solution d'un système d'inéquations linéaires selon le contexte.

OBJECTIFS

13.1 Représenter graphiquement et résoudre un système d'inéquations linéaires à deux variables.

13.2 Déterminer l'ensemble des solutions applicables d'un problème de programmation linéaire.

13.3 Déterminer la solution optimale d'une fonction soumise à des contraintes linéaires.

13.1 NOTIONS FONDAMENTALES

Le présent chapitre constitue une initiation à la programmation linéaire; nous allons présenter la méthode de résolution graphique et l'appliquer à la résolution de problèmes simples, c'est-à-dire comportant peu de variables, car la difficulté croît avec le nombre de celles-ci.

La programmation linéaire est une des méthodes de la recherche opérationnelle, une branche des mathématiques appliquées et de la statistique qui conçoit des modèles mathématiques et les adapte à des phénomènes concrets.

La recherche opérationnelle repose non pas sur le raisonnement plus ou moins intuitif et empirique, mais sur le raisonnement mathématique qui permet d'étudier et de résoudre des problèmes dont la complexité est telle que l'intuition n'est d'aucun secours. En 1971, à l'aide de la méthode du simplexe, on a réussi à résoudre en 2 heures et demie un problème comportant 282 468 variables et 50 215 équations.

Trois classes de problèmes sont traités en recherche opérationnelle :

a) Des **problèmes combinatoires**: choix d'investissements les plus rentables; optimisation des activités, des affectations, des transports; ordonnancements.

b) Des **problèmes stochastiques** (où intervient le hasard): files d'attente, gestion des stocks, réparation et renouvellement des équipements.

c) Des **problèmes de concurrence** : concurrence économique entre deux sociétés, contraintes de mise en production; définition de politiques d'approvisionnement et de vente.

La recherche opérationnelle comporte deux aspects : celui de la production (le domaine des ingénieurs) et la direction (ou gestion); tous deux font faire intervenir l'arsenal complet des techniques de recherche opérationnelle.

Si on veut manufacturer des produits, on doit tenir compte de diverses contraintes: disponibilité des ressources, coût de production, temps de production, caractéristiques du produit désiré, coût du transport des marchandises, etc. Ils est souvent possible de décrire mathématiquement les contraintes par des inéquations linéaires. L'ensemble des contraintes forme alors un système d'inéquations linéaires dont la représentation graphique est un polygone (ou un polyèdre) convexe, appelé **polygone des contraintes**. Les points du polygone (ou du polyèdre) sont les solutions du problème, et la solution optimale est un de ces points. Les problèmes de cette nature relèvent de la programmation linéaire.

Mise en situation

La direction d'une usine de meubles a constaté qu'il y a trop de temps libre dans chacun des départements. Pour remédier à cette situation, elle décide de fabriquer deux nouveaux modèles de bureau, soit M_1 et M_2.

Les temps de fabrication de chacun de ces modèles, dans les ateliers de sciage, d'assemblage et de sablage ainsi que les temps libres dans chacun de ces ateliers sont donnés ci-contre sous forme de tableau.

Atelier	Modèle		Temps libre
	M_1	M_2	
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

Identification des variables et des contraintes

Soit x, le nombre de bureaux du modèle M_1, et y, le nombre de bureaux du modèle M_2. Le temps libre dans chaque atelier impose des contraintes dont il faut tenir compte. La contrainte imposée par le temps libre à l'atelier de sciage est :

$$x + 2y \leq 20;$$

à l'atelier d'assemblage, la contrainte est

$$2x + y \leq 22;$$

à l'atelier de sablage, la contrainte est

$$x + y \leq 12.$$

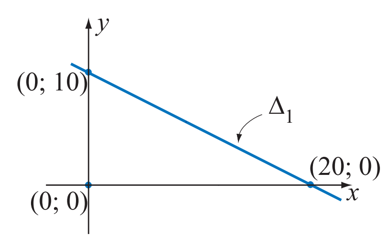
Il existe de plus des contraintes de non-négativité puisque le nombre de bureaux ne peut être négatif; ce sont

$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0.$$

Représentation graphique des droites frontières

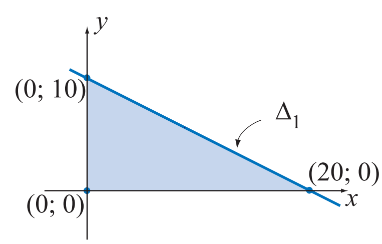
Pour représenter graphiquement la contrainte à l'atelier de sciage, on considère la droite frontière décrivant le cas où toutes les heures disponibles à l'atelier de sciage sont utilisées dans la solution. Cette situation se traduit par l'équation

$$x + 2y = 20.$$

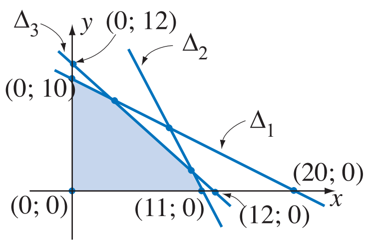


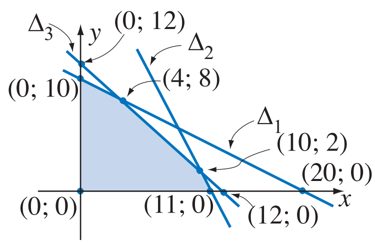
On détermine d'abord les points d'intersections de cette droite notée Δ_1 avec les axes : si $x = 0$, alors $y = 10$, de sorte que la droite coupe l'axe des y au point (0; 10); si $y = 0$, alors $x = 20$, ce qui signifie que la droite coupe l'axe des x au point (20; 0). La droite Δ_1 est appelée **droite frontière** de l'ensemble solution de l'inéquation :

$$x + 2y \leq 20.$$



Les points situés de l'un des côtés de la droite Δ_1 sont également des solutions de l'inéquation. Pour déterminer de quel côté se situent les solutions, il suffit de prendre un point quelconque d'un côté de la droite et de vérifier par substitution s'il fait partie de l'ensemble solution. Si on remplace x et y par 0, dans l'inéquation $x + 2y \leq 20$, on obtient $0 \leq 20$, ce qui est une inégalité vraie. Le point (0; 0) fait donc partie de l'ensemble solution et il en est de même de tous les points situés du même côté de la droite que l'origine. Compte tenu des contraintes de non-négativité, il faut cependant que $x \geq 0$ et que $y \geq 0$. L'ensemble des solutions satisfaisant à ces contraintes est représentée ci-contre par la partie ombrée du graphique.





En procédant de façon analogue, on obtient respectivement les droites frontières Δ_2 et Δ_3 pour les ateliers d'assemblage et de sablage :

$$\Delta_2 : 2x + y = 22$$

$$\Delta_3 : x + y = 12$$

Les **solutions admissibles** sont représentées ci-contre par les points du **polygone convexe**.

En représentant les droites frontières, on obtient les sommets suivants du polygone convexe : (0; 0), (11; 0) et (0; 10). Pour compléter la représentation graphique, on doit déterminer les autres sommets qui sont les points d'intersection des droites frontières. En résolvant le système d'équations

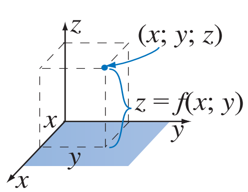
$$\begin{array}{l} \Delta_1 \\ \Delta_3 \end{array} \begin{cases} x + 2y = 20 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

On obtient $x = 4$ et $y = 8$. Par conséquent, (4; 8) est le point d'intersection des droites Δ_1 et Δ_3. En procédant de façon analogue, on obtient le point d'intersection de Δ_2 et Δ_3, soit (10; 2). On ne se soucie pas du point d'intersection des droites Δ_1 et Δ_2, car ce n'est pas un sommet du polygone des solutions admissibles.

REMARQUE

Pour choisir une solution dans l'ensemble solution (ou le polygone convexe) des équations tirées des contraintes, il faut des critères. Pour ce faire, on associe des informations aux solutions. Par exemple, le temps nécessaire pour réaliser telle solution, le coût, le profit ou le nombre d'heures-techniciens. Autrement dit, on définit une fonction **économique**,

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$: (x; y) \to z \quad \text{où } z = f(x; y).$$



Évaluation de la fonction économique

La direction veut maximiser son profit, c'est-à-dire maximiser la fonction

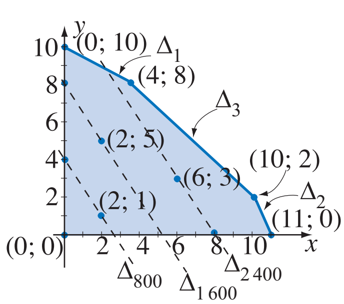
$$z = P(x; y) = 300x + 200y$$

appelée **fonction économique**.

Pour chacun des points du polygone convexe, la compagnie réalisera un profit. Pour illustrer, calculons ce profit pour quelques-uns des points du polygone convexe. Par exemple, si la compagnie fabrique deux exemplaires du modèle M_1 et un exemplaire du modèle M_2, elle réalise un profit

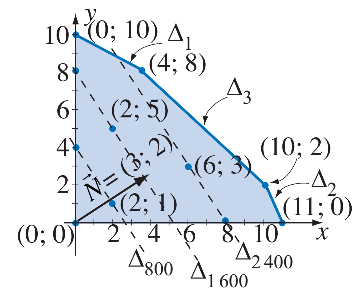
$$z = P(2; 1) = (300 \times 2) + (200 \times 1) = 800 \text{ \$}.$$

Il est clair que la compagnie ferait le même profit en ne fabriquant aucun exemplaire du premier modèle et quatre exemplaires du second modèle. Le tableau suivant donne le profit réalisé pour quelques points appartenant à l'ensemble des solutions admissibles.



FONCTION ÉCONOMIQUE

(x; y)	Profit	Ensemble de points donnant le même profit
(2; 1)	800 $	Tout point de la droite passant par (2; 1) et (0; 4); on note cette droite Δ_{800} : $300\,x + 200y = 800$.
(2; 5)	1 600 $	Tout point de la droite passant par (2; 5) et (0; 8); on note cette droite Δ_{1600} : $300\,x + 200y = 1\,600$.
(6; 3)	2 400$	Tout point de la droite passant par (6; 3) et (8; 0); on note cette droite Δ_{2400} : $300\,x + 200y = 2\,400$.



Il ne saurait être question de calculer le profit pour chacun des points du polygone convexe, mais on peut tirer les informations suivantes des valeurs calculées :

- $P(x; y) = 300x + 200y$ est un ensemble de droites parallèles ayant toutes comme vecteur normal $\vec{N} = (3; 2)$;
- plus une droite est éloignée de l'origine, plus le profit est grand;
- la solution optimale est un sommet du polygone convexe ou le segment de droite joignant deux sommets adjacents.

Il suffit donc d'évaluer la fonction économique en chacun des sommets du polygone convexe. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant.

Sommet	(0; 0)	(0; 10)	(4; 8)	(10; 2)	(11; 0)
Profit ($)	0	2 000	2 800	3 400	3 300

Pour maximiser le profit, il faut donc fabriquer dix bureaux du modèle M_1 et deux bureaux du modèle M_2. Le profit est alors de 3 400$.

On peut aussi déterminer le temps libre affecté à la production des bureaux. La matrice du temps de production est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et en la multipliant par le vecteur production, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{cases} 14 \text{ h à l'atelier de sciage,} \\ 22 \text{ h à l'atelier d'assemblage,} \\ 12 \text{ h à l'atelier de sablage.} \end{cases}$$

Le temps libre après le début de la production des bureaux est donné par

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 14 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{cases} 6 \text{ h à l'atelier de sciage,} \\ 0 \text{ h à l'atelier d'assemblage,} \\ 0 \text{ h à l'atelier de sablage.} \end{cases}$$

Il n'y a plus de temps libre dans les ateliers d'assemblage et de sablage, mais il reste 6 h de temps libre à l'atelier de sciage.

Discussion des solutions

La solution du problème dépend des contraintes (le polygone des solutions admissibles) mais également de la fonction décrivant le profit. Si le profit est de 200 $ pour le modèle M_1 et de 300 $ pour le modèle M_2, alors le profit total est :

$$z = P_2(x; y) = 200x + 300y\ .$$

Dans ce cas, le vecteur normal de l'ensemble des droites parallèles est $\vec{N} = (2; 3)$ et la droite la plus éloignée de l'origine est celle qui passe par le sommet (4; 8). Comme le confirme les données du tableau suivant :

Sommet	(0; 0)	(0; 10)	(4; 8)	(10; 2)	(11; 0)
$P_2(x; y)$ ($)	0	3 000	3 200	2 600	2 200

Dans ce cas, le temps récupéré est donné par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{cases} \text{20 h à l'atelier de sciage,} \\ \text{16 h à l'atelier d'assemblage,} \\ \text{12 h à l'atelier de sablage.} \end{cases}$$

Le temps libre résiduel est donc la différence

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{cases} \text{0 h à l'atelier de sciage,} \\ \text{6 h à l'atelier d'assemblage,} \\ \text{0 h à l'atelier de sablage.} \end{cases}$$

La solution d'un problème de programmation linéaire n'est pas toujours unique. Ainsi, si le profit est le même pour chaque modèle, soit 300 $, le profit total est :

$$z = P_3(x; y) = 300x + 300y.$$

Dans ce cas, le vecteur normal de l'ensemble des droites parallèles est $\vec{N} = (1; 1)$ et, en évaluant la fonction économique en chacun des sommets, on obtient les valeurs regroupées dans le tableau suivant.

Sommet	(0; 0)	(0; 10)	(4; 8)	(10; 2)	(11; 0)
$P_3(x; y)$ ($)	0	3 000	3 600	3 600	3 300

Le profit maximal est de 3 600 $, mais il y a plus d'une solution admissible parce que les droites représentant les différentes valeurs du profit sont parallèles à l'une des droites frontières. En effet, le vecteur $\vec{N} = (1; 1)$ est normal à la droite frontière Δ_3 et tous les points à coordonnées entières du segment de droite joignant les sommets (4; 8) et (10; 2) correspondant à un profit de 3 600 $.

L'ensemble solution est alors :

$$\{(x; y) \mid 300x + 300y = 3\,600\} \text{ où } 4 \leq x \leq 10 \text{ et } x \text{ et } y \text{ sont des entiers}\}.$$

La compagnie peut donc choisir l'une des solutions données dans le tableau suivant.

Nombre d'unités produites		**Temp libre utilisé (h)**		
M_1 x	M_2 y	Sciage $x + 2y \leq 20$	Assemblage $2x + y \leq 22$	Sablage $x + y \leq 12$
4	8	20	16	12
5	7	19	17	12
6	6	18	18	12
7	5	17	19	12
8	4	16	20	12
9	3	15	21	12
10	2	14	22	12

Problème de programmation linéaire

L'exemple de la mise en situation illustre d'un point de vue géométrique une méthode de résolution d'un problème de programmation linéaire. Pour bien décrire cette technique, il faut préalablement d'abord définir quelques termes.

Demi-plan et demi-espace

L'ensemble solution d'une inéquation linéaire à deux variables de la forme

$$ax + by \leq c$$

est un **demi-plan fermé** et l'ensemble solution d'une inéquation définie par une inégalité stricte (< ou >) est un demi-plan **ouvert**.

L'ensemble solution d'une inéquation linéaire à trois variables de la forme

$$ax + by + cz \leq d$$

est un **demi-espace fermé** et l'ensemble solution d'une inéquation définie par une inégalité stricte (< ou >) est un demi-espace est **ouvert**.

REMARQUE

Dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble-solution d'un système d'inéquations linéaires à deux variables forme toujours un polygone convexe.

Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble-solution d'un système d'inéquations linéaires à trois variables forme toujours un polyèdre convexe.

Polygone (polyèdre) convexe

L'intersection d'un nombre fini de demi-plans de $\mathbb{R}^2$ est appelée **polygone convexe.** L'intersection d'un nombre fini de demi-espaces de $\mathbb{R}^n$ est appelée **polyèdre convexe**.

Sommet d'un polygone ou d'un polyèdre

On dit qu'un point P est un **sommet** d'un polygone respectivement d'un polyèdre convexe si :

- P appartient au polygone (respectivement au polyèdre) convexe;
- P est l'intersection d'au moins deux côtés du polygone convexe (respectivement d'au moins trois faces du polyèdre convexe).

Certains systèmes d'équations ont plusieurs solutions admissibles. Celles-ci appartiennent toutes à un même côté du polygone ou à une même face du polyèdre convexe.

EXEMPLE 13.1.1

On désire créer un nouveau produit en mélangeant trois produits en vente sur le marché soit M_1, M_2 et M_3. Ceux-ci contiennent des substances A et B dans les proportions suivantes; M_1 contient 20% de A et 10% de B, M_2, 10% de A et 10% de B; M_3, 10% de A et 20% de B.

Les contenants prévus pour ce nouveau produit sont de 200 ml et doivent comporter au plus 15% de A et au moins 10 % de B. Déterminer les volumes respectifs de M_1, M_2 et M_3 qu'il faut mélanger pour respecter ces contraintes.

■ *Solution*

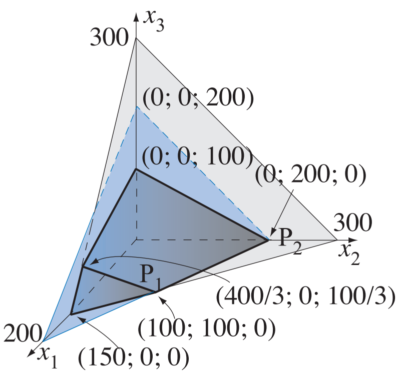
Définition des variables

Soit x_1, le volume de M_1 à utiliser (en millilitres);
x_2, le volume de M_2 à utiliser (en millilitres);
x_3, le volume de M_3 à utiliser (en millilitres).

Définition du système de contraintes

Les contraintes sont :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 200$$
$$0{,}20x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}10x_3 \leq 30, \text{ soit (15\% de 200 ml)}$$
$$0{,}10x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}20x_3 \leq 20, \text{ soit (10\% de 200 ml).}$$



En déterminant l'intersection des plans définissant les contraintes, on constate que les volumes qui pourraient être utilisés sont tous représentés par des points du segment de droite joignant les points $P_1(100; 100; 0)$ et $P_2(0; 200; 0)$. L'ensemble solution est donc :

$$\{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 100 - t, x_2 = 100 + t, x_3 = 0\}, \text{ où } t = 0 \ldots 100.$$

Dans le cas présent, rien n'indique qu'une solution est meilleure qu'une autre. Cependant, le coût des produits M_1 et M_2 sur le marché pourrait être déterminant.

THÉORÈME

Théorème fondamental de la programmation linéaire

Soit P une fonction linéaire définie sur un polygone (ou un polyèdre) convexe. Si P a une ou plusieurs valeurs optimales, celles-ci sont atteintes en au moins un des sommets du polygone (ou du polyèdre) convexe.

De ce théorème, que nous ne démontrerons pas, découle la marche à suivre décrite ci-dessous.

PROCÉDURE

Résolution d'un problème de programmation linéaire

1. Représenter les données sous la forme d'un tableau de contraintes, c'est-à-dire structurer les données.
2. Décrire mathématiquement le problème c'est-à-dire définir les variables et les inéquations de contrainte.
3. Représenter graphiquement les contraintes et tracer le polygone (ou le polyèdre) convexe.
4. Calculer les coordonnées des sommets.
5. Évaluer la fonction économique en chacun des sommets, s'il y a lieu.
6. Analyser les résultats en tenant compte du contexte.

EXEMPLE 13.1.2

Un industriel désire ajouter deux nouveaux produits (des bibliothèques et des tables de nuit) à sa production afin d'utiliser les surplus hebdomadaires de ressources. Ces meubles seraient faits de contreplaqué et d'acrylique. La fabrication d'une table de nuit nécessite une heure de travail, un panneau de contreplaqué de 1 m^2 et trois panneaux d'acrylique de 1 m^2; la fabrication d'une bibliothèque nécessite 1 heure de travail, 4 m^2 de contreplaqué et 1 m^2 d'acrylique. Les ressources hebdomadaires sont de 24 m^2 de contreplaqué, de 21 m^2 d'acrylique et de 9 heures de temps de travail. On prévoit un profit de 24 \$ par table de nuit et de 60 \$ par bibliothèque. Calculer le nombre d'articles à produire par semaine pour maximiser le profit.

Solution

Représentation des données dans un tableau

Structurons l'information dans un tableau, cela donne :

	Produit		Disponibilité
	Table de nuit	Bibliothèque	
Contreplaqué (m^2)	1	4	24
Acrylique (m^2)	3	1	21
Temps (h)	1	1	9
Profit (\$)	24	60	

Description mathématique du problème

Il y a trois contraintes: une pour le contreplaqué, une pour l'acrylique et une pour le temps de fabrication.

Si on désigne par T le nombre de tables de nuit produites et par B le nombre de bibliothèques produites, le problème s'énonce comme suit :

Maximiser la fonction $z = 24T + 60B$ en respectant les contraintes :

$$T + 4B \leq 24$$

$$3T + B \leq 21$$

$$T + B \leq 9$$

$$T \geq 0$$

$$B \geq 0$$

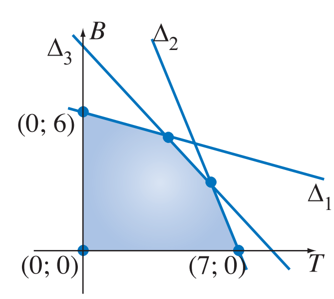
Construction du polygone convexe

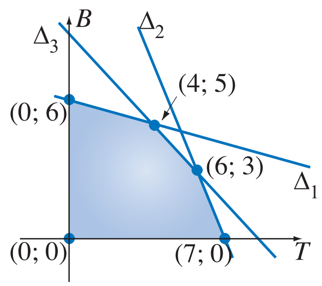
Pour construire le polygone convexe, il faut tracer chacune des droites frontières en déterminant les points d'intersection avec les axes. Ces droites frontières sont :

Δ_1 : $T + 4B = 24$

Δ_2 : $3T + B = 21$

Δ_3 : $T + B = 9$





Les points d'intersection avec les axes sont :

(0; 6) et (24; 0) pour la droite Δ_1;

(0; 21) et (7; 0) pour la droite Δ_2;

(0; 9) et (9; 0) pour la droite Δ_3.

Calcul des coordonnées des sommets

On a obtenu trois sommets en construisant graphiquement le polygone convexe, soit (0; 0), (0; 6) et (7; 0). Les autres sommets sont les points d'intersection des droites de contraintes. L'intersection des droites Δ_1 et Δ_3 s'obtient en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} T+4B=24 \\ T+B=9 \end{cases}$$

ce qui donne le sommet (4; 5).

L'intersection des droites Δ_2 et Δ_3 s'obtient en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} 3T+B=21 \\ T+B=9 \end{cases}$$

ce qui donne le sommet (6; 3).

Évaluation de la fonction économique

L'évaluation de la fonction économique $z = 24T + 60B$ en chacun des sommets.

$(T; B)$	(0; 0)	(0; 6)	(4; 5)	(6; 3)	(7; 0)
z	0	360	396	324	168

Analyse des résultats en tenant compte du contexte

Le maximum est donc atteint à (4; 5); il faut produire 4 tables de nuit et 5 bibliothèques par semaine pour maximiser le profit, qui serait alors de 396 $.

EXEMPLE 13.1.3

Le responsable des achats d'une entreprise doit se procurer au moins 210 chaises, 120 bureaux et 80 tables d'ordinateurs pour le nouveau siège social. Deux compagnies vendent des meubles de bureaux en lots non divisibles. La compagnie Ameublements de bureaux (AB) offre des lots de 30 chaises, 10 bureaux et 10 tables d'ordinateurs pour 2 000 $, et AC offre des lots de 20 chaises, 30 bureaux et 10 tables d'ordinateurs pour 2 000$. Combien de lots faut-il acheter de chacun de ces fournisseurs pour minimiser le coût total?

Solution

Représentation des données sous forme de tableau

Article	Fournisseur		Quantité minimale requise
	AB	AC	
Chaise	30	20	210
Bureau	10	30	120
Table	10	10	80
Coût ($)	2 000	2 000	

Description mathématique du problème

Soit x, le nombre de lots achetés du fournisseur AB;

y , le nombre de lots achetés du fournisseur AC.

Il faut donc résoudre le problème linéaire suivant.

Minimiser $w = C(x; y) = 2000x + 2000y$ sujette aux contraintes

$$30x + 20y \geq 210$$
$$10x + 30y \geq 120$$
$$10x + 10y \geq 80$$

où $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

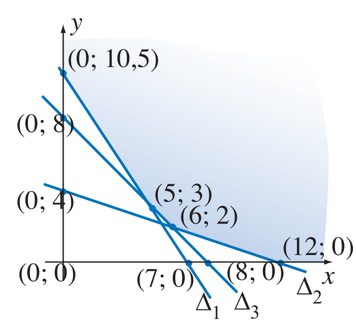
Représentation graphique des droites frontières

Les droites frontières sont :

Δ_1 : $30x + 20y = 210$, qui coupe les axes aux points (0; 10,5) et (7; 0);

Δ_2 : $10x + 30y = 120$,qui coupe les axes aux points (0; 4) et (12; 0);

Δ_3 : $10x + 10y = 80$, qui coupe les axes aux points (0; 8) et (8; 0).



Calcul des coordonnées des sommets

L'intersection de Δ_1 et Δ_3 est (5; 3) et celle de Δ_2 et Δ_3 est (6; 2).

Évaluation de la fonction économique

En évaluant la fonction économique $w = 2000x + 2000y$ en chacun des sommets du polygone, on obtient

$(x; y)$	(0; 10,5)	(5; 3)	(6; 2)	(12; 0)
w	21 000	16 000	16 000	24 000

Analyse des résultats en tenant compte du contexte

Dans ce cas, la solution (0; 10,5) n'est pas admissible puisque les deux compagnies ne vendent que des lots complets. La valeur minimale est 16 000$. Elle est atteinte à (5; 3) et à (6; 2). Il n'y a pas d'autre solution entière sur le segment de droite joignant ces deux points. Le produit des matrices sert à comparer ces deux solutions.

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 10 & 30 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 210 \\ 140 \\ 80 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 10 & 30 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 220 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

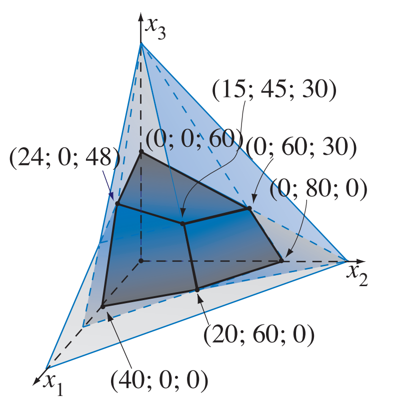
Si elle opte pour la solution (5; 3), l'entreprise achètera en tout 210 chaises pour 220 postes de travail (tables et bureaux); si elle opte pour la solution (6; 2), elle achètera en tout 220 chaises pour 200 postes de travail. La décision finale ne relève pas des mathématiques : c'est une décision administrative.

EXEMPLE 13.1.4

Un marchand d'aliments naturels prépare des mélanges à grignoter, vendus en sachets, dont les ingrédients de base sont des arachides, des raisins secs et des noix de cajou. Il achète chaque semaine 2 400g d'arachides, 1 200 g de raisins secs et 1 200 g de noix de cajou. Le mélange M_1 rapporte 2,00$ par sachet et il est composé de 30 g d'arachides, de 10 g de raisins et de 30 g de noix de cajou; le mélange M_2 rapporte 1,50$ par sachet et il est composé de 30 g d'arachides, 10 g de raisins et de 10 g de noix de cajou; le mélange M_3 rapporte 1,00$ du sachet et il est composé de 20 g d'arachides, de 20 g de raisins et de 10 g de noix de cajou. Sachant que le commerçant vend chaque semaine tous les mélanges qu'il peut préparer, calculer combien il en prépare de chaque sorte si son profit est maximal.

REMARQUE

L'objectif est de déterminer le sommet pour lequel le profit est maximal.



On sait que le profit est maximal en un point du plan de vecteur normal $\vec{N} = (2; 1{,}5; 1)$ le plus éloigné de l'origine. Cependant, il n'est pas toujours simple de construire une représentation graphique pour identifier les solutions admissibles et déterminer les points d'intersection des plans.

■ ***Solution***

Représentation des données sous forme de tableau

	Mélange			Disponibilité
	M_1	M_2	M_3	
Arachides	30	30	20	2 400
Raisins	10	10	20	1 200
Noix de cajou	30	10	10	1 200
Profit	2,00$	1,50$	1,00$	

Description mathématique du problème

Soit x_1, le nombre de sachets de mélange M_1,

x_2, le nombre de sachets de mélange M_2,

x_3, le nombre de sachets de mélange M_3.

Le problème s'énonce comme suit :

Maximiser la fonction $z = 2x_1 + 1{,}5x_2 + x_3$ en respectant les contraintes

$$30x_1 + 30x_2 + 20x_3 \leq 2\,400$$
$$10x_1 + 10x_2 + 20x_3 \leq 1\,200$$
$$30x_1 + 10x_2 + 10x_3 \leq 1\,200$$

où $x_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

Pour déterminer les sommets, il faut prendre trois à trois les équations de contraintes. Ainsi, en considérant les deux premières contraintes de disponibilité et la première contrainte de non négativité, on obtient

$$\begin{cases} 30x_1 + 30x_2 + 20x_3 = 2\ 400 \\ 10x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 1\ 200 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

En substituant 0 à x_1 dans les deux premières équations, puis en simplifiant les équations, on a le système

$$\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 = 240 \\ x_2 + 2x_3 = 120 \end{cases}$$

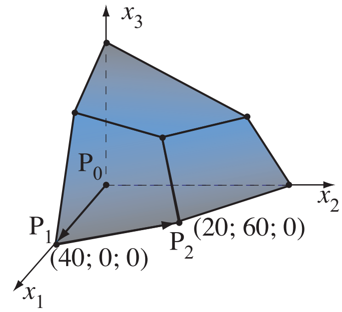
d'où l'on tire $x_2 = 60$ et $x_3 = 30$. Le sommet est (0; 60; 30).

Interprétation des résultats

La valeur maximale est atteinte à $x_1 = 20$, $x_2 = 60$ et $x_3 = 0$. Pour maximiser son profit, le marchand doit préparer 20 sachets de mélange M_1, 60 sachets de mélange M_2 et ne préparer aucun de mélange M_3. Le profit hebdomadaire est ainsi de 130 $ et il reste 400 g de raisins.

REMARQUE

La solution admissible initiale est représentée par le sommet P_0(0; 0; 0). Au sommet P_1(40; 0; 0), le profit est de 80 $.



Au sommet P_2(20; 60; 0), le profit est de 130$. C'est en ce sommet que le profit est maximal.

REMARQUE

La méthode du simplexe, développée par George Bernard Dantzig, permet de résoudre les problèmes de programmation linéaire sans construire de représentation graphique.

Un peu *d'histoire*

GEORGE BERNARD DANTZIG

1914-2005

George Bernard Dantzig, un mathématicien américain, naquit à Portland en Oregon en 1914. Son père, Tobias, mathématicien russe, étudia avec Henri Poincaré à Paris et épousa une collègue de la Sorbonne, Anja Ourisson, avant d'émigrer aux États-Unis.

Dantzig fut l'acteur principal d'une anecdote bien connue des mathématiciens. Un jour que Dantzig était en retard à un cours de statistiques de niveau doctoral à l'université de Berkeley, le professeur Jerzy Neyman proposa deux problèmes ouverts aux étudiants. Un problème ouvert est un problème clairement formulé, mais non résolu en raison de son haut niveau de difficulté. La résolution d'un tel problème demande parfois des années de recherche. Pensant que les deux problèmes constituaient un devoir, Dantzig les résolut en quelques jours.

Dantzig reçut son doctorat de l'université Berkeley en 1946 et il travailla d'abord comme statisticien, puis il devint conseiller mathématique pour l'aviation militaire américaine. Il s'intéressa aux problèmes d'allocation optimale des ressources et mit au point la méthode du simplexe, qui sert à résoudre ce type de problèmes. Cette découverte, faite en 1947, coïncida avec l'invention d'ordinateurs permettant derésoudre des problèmes comportant un grand nombre de variables. À l'origine, sa méthode fut surtout employée pour planifier des sessions d'entraînement, organiser la distribution d'équipement et déployer des militaires. En moins de 25 ans, elle devint un instrument indispensable pour la gestion industrielle, l'étude de systèmes économiques et l'affectation de personnel et de ressources.

13.2 EXERCICES

1. Résoudre les problèmes suivants en évaluant la fonction économique en chacun des points sommets du polygone convexe.
   a) Maximiser $z = 3x + 3y$
   en respectant les contraintes :
   $x + 4y \leq 12$
   $2x + y \leq 10$
   où $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
   b) Minimiser $w = 5x + 7y$
   en respectant les contraintes :
   $x + 2y \geq 8$
   $2x + y \geq 8$
   $x + y \geq 6$
   où $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

2. Un manufacturier de meubles en plastique moulé à armature de métal désire ajouter à sa gamme de produits deux nouveaux modèles de chaises afin de diminuer le temps libre dans ses ateliers de moulage, de soudure et d'assemblage.
   Étant donné la rapidité d'exécution des différentes opérations par les machines, le temps de réalisation est donné en unités de deux minutes chacune. La fabrication du premier modèle nécessite 1 unité de temps au moulage, 2 unités à la soudure et 4 unités à l'assemblage. La fabrication du deuxième modèle nécessite 3 unités de temps au moulage, 3 unités à la soudure et 3 unités à l'assemblage.
   Le relevé des temps morts a révélé qu'il y a 105 unités de temps disponibles à l'atelier de moulage, 120 à l'atelier de soudure et 180 à l'atelier d'assemblage. Par ailleurs, il n'y a pas de contraintes sur les matières premières, le manufacturier pouvant se procurer facilement ce dont il a besoin. Si le profit de l'entreprise est de 60 $ par chaise.
   Combien de chaises de chaque modèle doit-elle produire par semaine pour maximiser ses profits.

3. Une entreprise doit fabriquer deux modèles d'armoires de cuisine (Antique et Traditionnel) pour une firme de construction. Dans leur version standard, les deux modèles ont les mêmes dimensions et peuvent s'intégrer aux différentes maisons que la firme construit. Le procédé de fabrication des armoires comporte trois étapes distinctes, réalisées dans les ateliers de sciage, d'assemblage et de finition. La durée de chacune des opérations est exprimée en unités de 15 minutes chacune. Le temps de sciage d'un exemplaire du modèle Antique est de 2 unités de temps; l'assemblage prend 1 unité de temps et la finition 3 unités. Le temps de sciage d'un exemplaire du modèle Traditionnel est de 3 unités; l'assemblage nécessite 1 unité de temps et la finition 2 unités. Le relevé des temps morts de ces ateliers a permis de constater qu'il y a mensuellement 60 unités de temps disponibles à l'atelier de sciage, 25 à l'atelier d'assemblage et 60 à l'atelier de finition. Si le profit sur les armoires est de 225 $ pour le modèle Antique et de 200 $ pour le modèle Traditionnel, déterminer combien d'armoires de chaque modèle l'entreprise doit produire pour maximiser ses profits mensuels en supposant qu'elle est certaine de vendre toute sa production.

4. Une entreprise projette de fabriquer deux nouveaux modèles d'étagères à disques afin d'occuper les temps morts dans ses ateliers. La production du premier modèle nécessite 2 unités de temps à l'atelier de sciage, 3 unités à l'atelier d'assemblage et 3 unités à l'atelier de sablage. La production du deuxième modèle nécessite 3 unités de temps à l'atelier de sciage, 2 unités à l'atelier d'assemblage et 1 unité à l'atelier de sablage.
   Le relevé des temps morts a révélé qu'il y a 240 unités de temps disponibles à l'atelier de sciage, 210 à l'atelier d'assemblage et 180 à l'atelier de sablage. Par ailleurs, il n'y a pas de contraintes sur les matières premières puisque l'entreprise peut se procurer facilement ce dont elle a besoin.
   a) Sachant que le profit est de 80 $ pour le premier modèle et de 60 $ pour le deuxième modèle, déterminer combien d'étagères de chaque modèle l'entreprise doit produire pour maximiser son profit.
   b) Quelle serait la solution si le profit était de 90 $ pour le premier modèle et de 60 $ pour le deuxième modèle?

5. Le directeur d'une usine de meubles désire ajouter à la production mensuelle deux modèles d'étagères en utilisant les surplus de matériaux qui s'accumulent chaque mois et le temps libre dans les ateliers. Les matériaux nécessaires pour fabriquer les étagères sont des montants, dont les surplus mensuels sont de 250 mètres linéaires et des panneaux de

contreplaqué dont les surplus mensuels sont de 100 panneaux. Par ailleurs, le directeur a constaté qu'il se perd actuellement 60 h de travail dans les ateliers et que ce temps pourrait être affecté à la production des étagères. La fabrication du premier modèle nécessite 1 h de travail, 3 mètres linéaires de montants et 2 panneaux de contreplaqué. La fabrication du deuxième modèle nécessite 1 h de travail, 5 mètres linéaires de montants et 1 panneau de contreplaqué.

a) Sachant que les profits escomptés pour les étagères sont de 40 $ pour le premier modèle et de 50 $ pour le deuxième modèle, déterminer combien l'usine doit produire d'étagères de chaque modèle pour maximiser ses profits.
b) Quels sont les surplus mensuels de montants et de contreplaqué si l'usine produit les quantités déterminées en a)?

6. Un marchand offre à sa clientèle deux mélanges de café maison qui contiennent trois types de café : brésilien, colombien et africain, et qui sont vendus en sachets de 500 g. Pour préparer un sachet du mélange corsé, le marchand utilise 100 g de brésilien, 300 g de colombien et 100 g d'africain; pour préparer un sachet du mélange velouté, il utilise 100 g de brésilien, 100 g de colombien et 300 g d'africain. Par ailleurs, il bénéficie d'un rabais s'il commande simultanément au moins 6 kg de brésilien, 10 kg de colombien et 10 kg d'africain.
   a) Les sachets de 500 g sont tous vendus au même prix. Cependant, le café africain coûte plus cher que les deux autres de sorte que le coût de production des deux mélanges n'est pas identique; il est de 3 $ pour le mélange corsé et de 4 $ pour le mélange velouté. Le marchand veut continuer à offrir les deux mélanges à sa clientèle tout en minimisant ses coûts. Combien de sachets de chaque mélange devrait-il produire hebdomadairement?
   b) Quelles quantités de chaque type de grains doit-il alors acheter par semaine?

7. Un manufacturier reçoit une commande pour deux de ses produits en rupture de stock, soit P_1 et P_2. La fabrication de ces deux produits nécessite l'emploi de trois machines, soit M_1, M_2 et M_3 qui ne sont utilisées pour aucun autre produits. Cependant, lorsqu'elles sont mises en marche, un temps d'utilisation trop court peut entraîner des dommages à ces machines. Le temps minimum d'emploi spécifié par le fabricant est de 380 min pour M_1, 120 min pour M_2 et 150 min pour M_3. La fabrication du produit P_1 nécessite 4 min sur la machine M_1, 3 min sur la machine M_2 et 1 min sur la machine M_3. La fabrication du produit P_2 nécessite 5 min sur la machine M_1, 1 min sur la machine M_2 et 4 min sur la machine M_3.
   a) Sachant que le manufacturier a reçu une commande de 10 exemplaires de P_1 et de 10 exemplaires de P_2 et que le coût de fabrication est de 5 $ par exemplaire de l'un ou de l'autre de ces produits, déterminer le nombre d'exemplaires de chaque produit que le manufacturier fabriquer pour minimiser le coût de production.
   b) Quel sera alors le temps d'utilisation de chaque machine?

8. Une entreprise fabrique des compléments alimentaires pour le bétail qui doivent respecter certaines contraintes quant à leur contenu en vitamines A, B et C. Un kilo de la variété SuperA doit contenir 400 g de vitamine A, 300 g de vitamine B et 300 g de vitamine C; un kilo de la variété ExtraC doit contenir 200 g de vitamine A, 300 g de vitamine B et 500 g de vitamine C. Les fournisseurs de l'entreprise lui garantissent 38 kg de vitamine A, 30 kg de vitamine B et 45 kg de vitamine C par semaine.
   a) Sachant que l'entreprise est certaine de vendre toute sa production et qu'elle escompte réaliser un profit de 3 $/kg sur la variété SuperA et de 2 $/kg sur la variété ExtraC, quel doit être son plan de production?
   b) Quelle quantité de chaque vitamine la compagnie doit-elle commander par semaine pour ne pas accumuler de surplus?

9. Un manufacturier de jouets désire ajouter à sa gamme de produits une table pour enfants et une maison de poupée en bois. Pour fabriquer une table, il faut 6 min à l'atelier de sciage, 8 min à l'atelier d'assemblage et 8 min à l'atelier de peinture.
   Pour fabriquer une maison de poupée, il faut 4 min à l'atelier de sciage, 12 min à l'atelier d'assemblage et 8 min à l'atelier de peinture. Les temps morts par semaine dans ces ateliers sont actuellement de 72 min à l'atelier de sciage, 144 min à l'atelier d'assemblage et 112 min à l'atelier de peinture.
   a) Sachant que le manufacturier réalise un profit de

50 $ par table et de 60 $ par maison de poupée, calculer combien d'exemplaires de chaque article il doit produire pour maximiser son profit.

b) Quels sera le temps mort dans chaque atelier si le manufacturier applique le plan de production déterminé en a) ?

10. Le responsable des ventes d'une usine de meubles signale que les chaises Grand-mère et Grand-père sont en rupture de stock. Comme la politique de l'entreprise est d'avoir toujours au moins un exemplaire de chaque modèle qu'elle produit pour sa salle de montre, elle doit fabriquer des exemplaires des deux meubles.

Pour ce faire, l'usine doit rappeler du personnel au travail, car le reste de la production monopolise tous les employés actuels. La convention stipule que la compagnie doit payer au moins 6 h à un tourneur rappelé au travail et au moins 4 h à tout autre ouvrier.

La fabrication du modèle Grand-mère nécessite 20 min à l'atelier de sciage, 60 min à l'atelier de tournage et 24 min à l'atelier d'assemblage et finition; la fabrication du modèle Grand-père nécessite 40 min à l'atelier de sciage, 30 min à l'atelier de tournage et 24 min à l'atelier d'assemblage et finition.

Les travailleurs de l'atelier de sciage sont payés 12,00 $ l'heure, les tourneurs 14,00 $ l'heure et les assembleurs 8,00 $ l'heure.

a) Calculer le coût de la main-d'œuvre pour la construction d'une unité de chaque modèle.

b) Déterminer le nombre de chaises de chaque modèle que l'usine doit produire pour minimiser les coûts de main-d'œuvre.

c) Quelle sera la durée du rappel pour chaque classe de travailleurs ?

11. Une entreprise de produits chimiques fabrique deux produits pour les carrosseries d'automobile: Brillenet et Clairnet. Les deux produits contiennent les mêmes ingrédients de base, mais dans des proportions différentes. Pour ne pas divulguer de secret industriel, on désigne les ingrédients par I_1, I_2 et I_3. Ces produits sont commercialisés dans des contenants de un litre.

Pour fabriquer un litre de Brillenet, il faut 0,4 L de I_1, 0,3 L de I_2 et 0,3 L de I_3; pour fabriquer un litre de Clairnet, il faut 0,5 L de I_1, 0,2 L de I_2 et 0,3 L de I_3. Les fournisseurs de l'entreprise peuvent garantir, à chaque semaine, 94 L de I_1, 51 L de I_2, et 60 L de I_3. Le profit réalisé est de 1,50 $/L pour le produit Brillenet et de 1,20 $/L pour le produit Clairnet.

a) Combien de litres de chaque produit l'entreprise doit-elle fabriquer chaque semaine pour maximiser son profit ?

b) Quelle quantité des trois ingrédients la compagnie doit-elle acheter par semaine si elle ne veut pas entreposer de surplus?

c) Le service de distribution avise le gérant de la production qu'il lui est impossible de vendre toute la production de Brillenet. Les relevés des derniers mois indiquent que les distributeurs n'ont écoulé que 70 L de ce produit par semaine. Compte tenu de cette information, quel doit être le plan de production ?

d) La modification du plan de production implique-t-elle une modification des achats hebdomadaires? Quelles quantités de chaque ingrédient la compagnie doit-elle acheter par semaine?